Neue Begründung der arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen.

Von

Kurt Hensel in Marburg a/L.

Die in meiner Abhandlung im zweiten Bande dieser Zeitschrift S. 433—452 gegebene Theorie der algebraischen Zahlen kann ohne weiteres auf die Untersuchung der algebraischen Funktionen einer Variablen ausgedehnt werden, und ihre Ergebnisse sind hier wesentlich einfacher als die dort abgeleiteten. Es scheint mir aber, daß sie eine neue Einsicht in die arithmetische Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen ergeben. Ich benutze die Bezeichnungen und die Resultate der erwähnten Arbeit, welche ich hier mit A. Z. zitieren werde.

§ 1.

Untersuchung der rationalen Funktionen von z für eine Stelle $\mathfrak{p}$ dieser Variablen.

Ist z eine komplexe Variable, so bilden die rationalen Funktionen $Z = \varphi(z)$ von z mit beliebigen konstanten Koeffizienten einen Körper $K(z)$. Jedem konstanten Werte ($z = a$ bzw. $z = \infty$) von z ordne ich eindeutig *eine Stelle* $\mathfrak{p}$ zu. Dann besitzt jede Funktion Z dieses Körpers in einer beliebigen Stelle $\mathfrak{p}$ einen eindeutig bestimmten Zahlenwert $Z(\mathfrak{p})$, welcher 0, ∞ oder c sein kann, wo hier wie im folgenden c einen bestimmten endlichen und von Null verschiedenen Zahlenwert bezeichnet. Im ersten bzw. im zweiten Falle heißt $\mathfrak{p}$ *eine Nullstelle* bzw. *ein Pol* von Z, im letzten Falle wird Z eine *Einheit* oder eine *Einheitsfunktion* für diese Stelle genannt.

Die Funktion Z heißt *eine ganze Funktion* für die Stelle $\mathfrak{p}$, wenn $Z(\mathfrak{p})$ endlich ist; ist $Z(\mathfrak{p}) = \infty$, ist also $\mathfrak{p}$ ein Pol für Z, so wird Z *eine gebrochene Funktion* für diese Stelle genannt. Eine ganze oder gebrochene Funktion Z heißt durch eine andere U für diese Stelle *teilbar*, wenn der Quotient Z/U dort ganz ist. Die Einheitsfunktionen, und sie

allein, sind in *jeder* ganzen Funktion enthalten. Ist sowohl Z durch U als auch U durch Z für die Stelle $\mathfrak{p}$ teilbar, so heißen Z und U *äquivalent* ($Z \sim U(\mathfrak{p})$), und dies ist stets und nur dann der Fall, wenn sich diese Funktionen um eine Einheitsfunktion multiplikativ unterscheiden.

Eine ganze Funktion p heißt eine *Primfunktion für die Stelle* $\mathfrak{p}$, wenn sie dort eine Nullstelle hat und nicht in ein Produkt von Faktoren derselben Art zerlegt werden kann. Eine solche Primfunktion für eine endliche Stelle $z = \alpha$ ist z. B. die Funktion $p = z - \alpha$ für die unendlich ferne Stelle, z. B. $p = 1/z$. Alle Primfunktionen für dieselbe Stelle sind einander äquivalent.

Ist p eine Primfunktion für die Stelle $\mathfrak{p}$, so ist jede andere Funktion Z eindeutig in der Form $Z = \varepsilon p^{\varrho}$ darstellbar, wo ϱ eine von der Wahl von p unabhängige ganze Zahl und ε eine Einheitsfunktion bedeutet. Der Exponent ϱ heißt die *Ordnungszahl* von Z für die Stelle $\mathfrak{p}$. $\mathfrak{p}$ ist eine Nullstelle oder ein Pol für Z, je nachdem ϱ positiv oder negativ ist; ist ϱ gleich Null, so ist Z eine Einheit für $\mathfrak{p}$.

Wir ordnen nun jeder Stelle $\mathfrak{p}$ einen *Divisor* zu, welcher ebenfalls durch $\mathfrak{p}$ bezeichnet werden soll, und definieren die Teilbarkeit einer Funktion Z durch eine Potenz von $\mathfrak{p}$ folgendermaßen:

> Z heißt durch $\mathfrak{p}^r$ *teilbar*, wenn Z in der zugehörigen Stelle $\mathfrak{p}$ mindestens die Ordnungszahl r besitzt. Zwei Funktionen Z und Z' heißen *modulo* $\mathfrak{p}^r$ *kongruent*, wenn ihre Differenz mindestens durch $\mathfrak{p}^r$ teilbar ist.

Hieran schließt sich die für das Folgende besonders wichtige Definition der Gleichheit zweier Funktionen für eine Stelle $\mathfrak{p}$:

> Zwei Funktionen Z und Z' heißen *gleich für die Stelle* $\mathfrak{p}$, wenn sie für jede noch so hohe Potenz von $\mathfrak{p}$ kongruent sind. Zwei rationale Funktionen Z und Z' sind stets und nur dann für eine Stelle $\mathfrak{p}$ gleich, wenn sie identisch sind.

Jede Funktion Z ist für den Bereich von $\mathfrak{p}$ gleich einer Entwicklung:

$$(1) \qquad Z = a_{\varrho} p^{\varrho} + a_{\varrho+1} p^{\varrho+1} + \ldots + a_{\sigma-1} p^{\sigma-1} + A_{\sigma}(z) p^{\sigma},$$

in welcher $a_{\varrho}, a_{\varrho+1}, a_{\varrho+2}, \ldots$ eindeutig bestimmte Zahlkoeffizienten sind, welche beliebig weit berechnet werden können, und wo bei Abschluß der Rechnung bei einer beliebigen σ-ten Stelle das Element $A_{\sigma}(z)$ eine für die Stelle $\mathfrak{p}$ ganze rationale Restfunktion ist. Die beliebig weit fortsetzbare Reihe der rationalen Funktionen

$$(1a) \qquad a_{\varrho} p^{\varrho}, \quad a_{\varrho} p^{\varrho} + a_{\varrho+1} p^{\varrho+1}, \quad a_{\varrho} p^{\varrho} + a_{\varrho+1} p^{\varrho+1} + a_{\varrho+2} p^{\varrho+2}, \ldots$$

wird *die Reihe der sukzessiven Näherungswerte von Z für die Stelle* $\mathfrak{p}$ genannt. Die Zahlkoeffizienten $a_{\varrho}, a_{\varrho+1}, a_{\varrho+2}, \ldots$ hängen durch eine Rekursionsformel miteinander zusammen.

§ 2.

Der Körper $\bar{K}(\mathfrak{p})$ der zur Stelle $\mathfrak{p}$ gehörigen Potenzreihen und der Körper $K(\mathfrak{p})$ der konvergenten Potenzreihen.

Ich betrachte jetzt den Bereich aller Potenzreihen

$$\bar{Z} = a_\varrho p^\varrho + a_{\varrho+1} p^{\varrho+1} + \dots \tag{2}$$

mit beliebigen konstanten Koeffizienten, deren Entwicklungselement p eine Primfunktion für die Stelle $\mathfrak{p}$ ist, also etwa $z - a$ bzw. $\frac{1}{z}$, und deren Koeffizienten soweit man will berechnet werden können. Dabei soll vollständig davon abgesehen werden, ob diese Reihe in einer endlichen Umgebung jener Stelle konvergiert oder nicht. Auch hier nennen wir die Reihe der rationalen Funktionen

$$a_\varrho p^\varrho, \quad a_\varrho p^\varrho + a_{\varrho+1} p^{\varrho+1}, \quad \dots \tag{2a}$$

die sukzessiven Näherungswerte von $\bar{Z}$. Wir nennen zwei solche Reihen Z und $\bar{Z}'$ wieder kongruent modulo $\mathfrak{p}^r$, wenn alle ihre Näherungswerte für diesen Modul kongruent sind, und genau wie vorher sollen zwei solche Reihen gleich heißen, wenn sie für jede noch so hohe Potenz von $\mathfrak{p}$ kongruent, wenn sie also identisch sind. Definiert man dann die Summe und das Produkt von zwei Potenzreihen wie gewöhnlich, so erkennt man, daß die Gesamtheit aller dieser Reihen einen Körper bildet, welchen ich durch $\bar{K}(\mathfrak{p})$ bezeichne.

Einen Teilkörper $K(\mathfrak{p})$ des Körpers $\bar{K}(\mathfrak{p})$ aller Potenzreihen (2) erhält man, wenn man nur diejenigen Potenzreihen in p betrachtet, welche in einer endlichen, wenn auch noch so kleinen Umgebung der Stelle $\mathfrak{p}$ konvergieren; denn die Summe, die Differenz, das Produkt und der Quotient konvergenter Potenzreihen ist ja wieder eine solche. Ich will $K(\mathfrak{p})$ auch *den Körper der Funktionselemente für die Stelle* $\mathfrak{p}$ nennen.

Ich nenne endlich eine rationale Funktion $Z = \varphi(z)$ von z für den Bereich von $\mathfrak{p}$ gleich einer Potenzreihe $\bar{Z} = a_\varrho p^\varrho + a_{\varrho+1} p^{\varrho+1} + \dots$, wenn Z für jede noch so hohe Potenz von $\mathfrak{p}$ kongruent $\bar{Z}$ ist. Dann folgt aus (1), daß jedes Element $Z = \varphi(z)$ von $K(z)$ für den Bereich der Stelle $\mathfrak{p}$ einer einzigen Potenzreihe von $\bar{K}(\mathfrak{p})$ gleich ist, nämlich derjenigen rekurrenten Reihe, welche sich aus (1) für ein über jedes Maß hinaus wachsendes σ ergibt. Bei dieser Definition der Gleichheit ist also der Körper $K(z)$ aller rationalen Funktionen ein Unterkörper des Körpers $\bar{K}(\mathfrak{p})$ aller Potenzreihen für die Stelle $\mathfrak{p}$.

Durch Majorantenbildung kann man aber noch weiter zeigen, daß $K(z)$ ein Teilkörper des Teilkörpers $K(\mathfrak{p})$ von $\bar{K}(\mathfrak{p})$ ist, daß nämlich alle rekurrenten Potenzreihen, denen die rationalen Funktionen Z von z

für den Bereich von $\mathfrak{p}$ gleich sind, innerhalb einer endlichen Umgebung von $\mathfrak{p}$ konvergieren und dort diese Funktionen Z darstellen. (Vgl. z. B. Hensel-Landsberg, Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen, S. 8—11. Dies Werk soll im folgenden durch H.-L. zitiert werden.) Und zwar stehen jene beiden Körper in der Beziehung zueineinander, daß jedes Element von $K(z)$ zu $K(\mathfrak{p})$ gehört, und daß umgekehrt jedes Element von $K(\mathfrak{p})$ der Grenzwert einer Reihe (2a) von Elementen von $K(z)$ ist.

§ 3.

Untersuchung der algebraischen Funktionen von z für eine Stelle $\mathfrak{p}$ dieser Variablen. Die Kongruenzringe $\bar{R}(u, \mathfrak{p})$ und ihre Zurückführung auf Kongruenzkörper $K(u, \mathfrak{p})$.

Es sei nun die Variable u eine algebraische Funktion von z, d. h. u werde als Funktion von z durch eine irreduzible Gleichung n-ten Grades

$$f(u, z) = u^n + a_1(z)\,u^{n-1} + \ldots + a_n(z) = 0 \tag{3}$$

mit rationalen Funktionen von z als Koeffizienten definiert. Dann bilden alle rationalen Funktionen von u und z einen Körper $\mathfrak{R}(u, z)$, dessen Untersuchung den Gegenstand der Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen bildet. Dieser ist isomorph dem Kongruenzkörper

$$\bar{K}(u, z) = K_z(u, \bmod f(u, z)) \tag{4}$$

aller modulo $f(u, z)$ betrachteten rationalen Funktionen von u und z; im folgenden soll daher dieser statt des Körpers $\mathfrak{R}(u, z)$ untersucht werden.

Der Körper $K(u, z)$ ist, in bezug auf den Körper $K(z)$ aller rationalen Funktionen von z allein, ein algebraischer Körper n-ten Grades, denn die n Elemente $(1, u, u^2, \ldots, u^{n-1})$ sind in bezug auf $K(z)$ linear unabhängig, während je $(n+1)$ Elemente desselben $(u_0, u_1, \ldots, u_n)$ stets linear abhängig sind. Je n linear unabhängige Elemente $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ heißen *eine Basis für* $K(u, z)$. Jedes Element v dieses Körpers ist durch eine beliebige Basis (u_i) eindeutig in der Form:

$$v = c_1 u_1 + \ldots + c_n u_n$$

mit rationalen Koeffizienten c_i darstellbar. Jedes Element $v = \varphi(u, z)$ genügt einer sog. *Hauptgleichung* n-ten Grades $g(v, z) = 0$ in $K(z)$ (A. Z. S. 435 (2)), deren linke Seite entweder irreduzibel oder die Potenz einer irreduziblen Funktion ist. Im ersten Falle heißt v ein *primitives Element* von $K(u, z)$, und der Kongruenzkörper $K(u, z)$ ist isomorph dem Kongruenzkörper

$$K(v, z) = K_z(v, \bmod g(v, z)) \tag{4a}$$

aller modulo $g(v, z)$ betrachteten rationalen Funktionen von v und z und

kann daher, wenn dies erwünscht sein sollte, statt des Kongruenzkörpers $K(u,z)$ der Untersuchung zugrunde gelegt werden.

Ich betrachte nun alle Elemente $v=\varphi(u,z)$ von $K(u,z)$ für den Bereich einer beliebigen endlichen oder der unendlich fernen Stelle $\mathfrak{p}$ der unabhängigen Veränderlichen z. Dann können alle Koeffizienten von v in konvergente Potenzreihen entwickelt werden, welche nach Potenzen einer beliebigen Primfunktion p für diese Stelle $\left(\text{z. B. } p=z-\alpha \text{ bzw. } p=\frac{1}{z}\right)$ fortschreiten. Sie bilden also einen Teilbereich des größeren Bereiches

$$\bar{R}(u,\mathfrak{p})=\bar{R}_{\mathfrak{p}}(u, \bmod f(u,z)) \tag{4b}$$

aller modulo $f(u,z)$ ganzen Funktionen von u, deren Koeffizienten beliebige konvergente oder nicht konvergente Potenzreihen von p sind. Also ist $K(u,z)$ ein Teilkörper dieses Bereiches $\bar{R}(u,\mathfrak{p})$, welcher nun weiter untersucht werden soll.

Der wesentliche Unterschied zwischen dem Kongruenzkörper $K(u,z)$ und diesem erweiterten Bereiche $\bar{R}(u,\mathfrak{p})$ besteht darin, daß in dem letzteren die Funktion $f(u,z)$ im allgemeinen nicht unzerlegbar bleibt, sondern in ein Produkt von eindeutig bestimmten unzerlegbaren Primfaktoren zerfällt, welche jedoch alle voneinander verschieden sind. Es sei

$$f(u,z)=f_1(u,\mathfrak{p})f_2(u,\mathfrak{p})\dots f_\nu(u,\mathfrak{p}) \tag{5}$$

diese Zerlegung; dann ist jeder dieser Faktoren $f_i(u,\mathfrak{p})$ eine in $\bar{K}(\mathfrak{p})$ irreduzible ganze Funktion von u, deren Koeffizienten Potenzreihen sind, welche nach ganzen Potenzen der Primfunktion p fortschreiten.

Alle modulo $f(u,z)$ ganzen Funktionen $v=\varphi(u,\mathfrak{p})$ des Bereiches $R(u,\mathfrak{p})$ bilden wegen der Zerlegbarkeit des Moduls nicht einen Kongruenz*körper*, sondern nur einen Kongruenz*ring*, denn in ihm sind nur die elementaren Rechenoperationen der Addition, Subtraktion und Multiplikation, nicht aber die der Division unbeschränkt und eindeutig ausführbar. Dagegen kann die Untersuchung der Elemente dieses Ringes $\bar{R}(u,\mathfrak{p})$ leicht und einfach auf diejenige der ν folgenden Kongruenzkörper

$$\bar{K}_i(u,\mathfrak{p})=\bar{K}_{\mathfrak{p}}(u, \bmod f_i(u,\mathfrak{p})) \qquad (i=1,2,\dots,\nu) \tag{6}$$

aller modulo der ν Primfunktionen $f_1(u,\mathfrak{p}),\dots,f_\nu(u,\mathfrak{p})$ ganzen Funktionen von u innerhalb $K(\mathfrak{p})$ zurückgeführt werden (A. Z. § 1).

Bezeichnen wir nämlich wie a. a. O. die zu den ν Primfaktoren $f_i(u,\mathfrak{p})$ komplementären Faktoren von $f(u,z)$ durch $F_i(u,\mathfrak{p})$, und sind allgemein $G_i(u,\mathfrak{p})$ die durch das Euklidische Teilerverfahren bestimmbaren Multiplikatoren, für welche die Gleichung besteht:

$$F_1(u,\mathfrak{p})\cdot G_1(u,\mathfrak{p})+\dots+F_\nu(u,\mathfrak{p})\cdot G_\nu(u,\mathfrak{p})\equiv 1 \pmod{f(u,z)},$$

so gelten für die ν so gefundenen Funktionen:

(6a) $$F_i(u, \mathfrak{p}) \cdot G_i(u, \mathfrak{p}) = 1_i$$

die Beziehungen:

(7) $$\begin{aligned} 1_i &\equiv \delta_{ik} \pmod{f_k(u, \mathfrak{p})}, \\ 1_i 1_k &= \delta_{ik} \cdot 1_k \pmod{f(u, z)}, \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} \delta_{ik} = 0 \text{ für } i \gtrless k \\ = 1 \text{ für } i = k \end{pmatrix}$$

und hieraus ergibt sich für jede modulo $f(u, z)$ ganze Funktion $v = \varphi(u, z)$ des Ringes $\overline{R}(u, \mathfrak{p})$ die folgende eindeutig bestimmte Darstellung:

(7a) $$\begin{aligned} v &\equiv v_1 \cdot 1_1 + v_2 \cdot 1_2 + \ldots + v_\nu \cdot 1_\nu \pmod{f(u, z)} \\ &= (v_1, v_2, \ldots, v_\nu), \end{aligned}$$

wo allgemein

(7b) $$v_i \equiv v \pmod{f_i(u, \mathfrak{p})},$$

d. h. der Wert von v in dem i-ten Kongruenzkörper $\overline{K}_i(u, \mathfrak{p})$ ist. Sind umgekehrt $v_1, \ldots, v_\nu$ beliebige Elemente jener Kongruenzkörper $\overline{K}_1, \ldots, \overline{K}_\nu$, so enthält der Ring $\overline{R}(u, \mathfrak{p})$ ein einziges Element $v = v_1 \cdot 1_1 + \ldots + v_\nu \cdot 1_\nu$, welches gerade diese Werte v_i in den Körpern $\overline{K}_i$ besitzt.

Sind ferner $v = (v_1, \ldots, v_\nu) = (v_i)$, $w = (w_1, \ldots, w_\nu) = (w_i)$ zwei beliebige Elemente von $\overline{R}(u, \mathfrak{p})$ in dieser Darstellung, so folgen aus den Gleichungen (7) für ihre Summe, Differenz, Produkt und ihren Quotienten die entsprechenden Darstellungen:

(7c) $$v \pm w = (v_i \pm w_i), \qquad v w = (v_i w_i), \qquad \frac{v}{w} = \left(\frac{v_i}{w_i}\right);$$

die letzte Gleichung besteht aber dann und nur dann, wenn $\frac{v}{w}$ wirklich dem Ringe $\overline{R}(u, \mathfrak{p})$ angehört, denn allein in diesem Falle sind ja alle Komponenten w_i von Null verschieden. Werden also für zwei solche Elemente (v_i) und (w_i) die Verknüpfungsoperationen der Addition und Multiplikation durch die Gleichungen

(7d) $$(v_i) + (w_i) = (v_i + w_i), \qquad (v_i)(w_i) = (v_i w_i)$$

definiert, so wird der Ring $R(u, \mathfrak{p})$ einstufig isomorph auf das System $(\overline{K}_1(u, \mathfrak{p}), \ldots, \overline{K}_\nu(u, \mathfrak{p}))$ der ν zu den Primfaktoren $f_i(u, \mathfrak{p})$ von $f(u, z)$ gehörigen Kongruenzkörper abgebildet.

Jedes Element $v = (v_i)$ des Ringes $\overline{R}(u, \mathfrak{p})$ genügt in demselben einer Hauptgleichung $g(t, \mathfrak{p}) = 0$ vom n-ten Grade; andererseits genügt jede seiner Komponenten v_i im zugehörigen Körper $\overline{K}_i(u, \mathfrak{p})$ einer Hauptgleichung $g_i(t, \mathfrak{p}) = 0$ vom λ_i-ten Grade, deren linke Seite irreduzibel oder die Potenz einer irreduziblen Funktion ist, je nachdem v_i in $\overline{K}_i(u, \mathfrak{p})$ primitiv oder imprimitiv ist. Die linken Seiten jener Hauptgleichungen hängen dann durch die Beziehung

$$(8) \qquad g(t,\mathfrak{p}) = \prod_{i=1}^{\nu} g_i(t,\mathfrak{p})$$

miteinander zusammen (A. Z. S. 437, (9a)).

Jedem von den ν Kongruenzkörpern $\overline{K}_i(u,\mathfrak{p})$ ordne ich nun eine Stelle $\mathfrak{P}_i$ zu und nenne v_i den Wert eines Elementes $v=\varphi(u,z)$ für diese Stelle, wenn v_i der Kongruenzwert von v modulo $f_i(u,\mathfrak{p})$, d. h. im Kongruenzkörper $\overline{K}_i(u,\mathfrak{p})$ ist. Dann gehören also zu der einen Stelle $\mathfrak{p}$ genau ν Stellen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_\nu$, entsprechend den ν Primfaktoren von $f(u,z)$ innerhalb $K(p)$.

Durch diese Resultate ist die Untersuchung eines beliebigen Ringes $\overline{R}(u,\mathfrak{p})$ vollständig auf diejenige eines beliebigen Kongruenzkörpers

$$(9) \qquad \overline{K}(u,\mathfrak{p}) = \overline{K}(u, \bmod f(u,\mathfrak{p}))$$

aller modulo $f(u,\mathfrak{p})$ ganzen rationalen Funktionen von u für diesen Modul mit konvergenten oder nicht konvergenten Potenzreihen innerhalb $K(\mathfrak{p})$ als Koeffizienten zurückgeführt, wenn $f(u,\mathfrak{p})$ eine beliebige Prim funktion innerhalb $\overline{K}(\mathfrak{p})$ bedeutet. Diese Untersuchung soll im folgenden Paragraphen durchgeführt werden.

§ 4.

Der Kongruenzkörper $\overline{K}(u,\mathfrak{p})$ und der ihm gleiche Körper $\overline{K}(\mathfrak{P})$ aller Potenzreihen für die zu $\mathfrak{p}$ gehörige Stelle $\mathfrak{P}$.

Es sei also jetzt

$$(10) \qquad f(u,\mathfrak{p}) = u^\lambda + a_1(\mathfrak{p})u^{\lambda-1} + \ldots + a_\lambda(\mathfrak{p})$$

eine Primfunktion λ-ten Grades innerhalb $\overline{K}(\mathfrak{p})$. Dann genügt jedes Element $v=\varphi(u,\mathfrak{p})$ des zugehörigen Kongruenzkörpers $\overline{K}(u,\mathfrak{p}) = \overline{K}(u, \bmod f(u,\mathfrak{p}))$ einer Hauptgleichung λ-ten Grades

$$(10a) \qquad g(v,\mathfrak{p}) = v^\lambda + b_1(\mathfrak{p})v^{\lambda-1} + \ldots + b_\lambda(\mathfrak{p}) = 0,$$

deren linke Seite irreduzibel oder die Potenz einer in $\overline{K}(\mathfrak{p})$ irreduziblen Funktion ist. Wir nennen v *algebraisch ganz* oder *gebrochen*, je nachdem die Koeffizienten $b_i(\mathfrak{p})$ ihrer Hauptgleichung alle oder nicht alle ganz sind. Dann gilt auch hier der Fundamentalsatz (A. Z., S. 440):

Ein Element v des Körpers $\overline{K}(u,\mathfrak{p})$ ist algebraisch ganz oder gebrochen, je nachdem seine Norm:

$$(10b) \qquad n(v) = (-1)^\lambda b_\lambda(\mathfrak{p})$$

ganz oder gebrochen ist.

Dieser Satz wird wörtlich ebenso wie a. a. O. bewiesen. Aus ihm ergeben sich alle Sätze über die Teilbarkeitseigenschaften der Elemente v,

welche dort auf S. 441 und 442 zusammengestellt sind. Speziell folgt hieraus, daß die ganzen Elemente des Körpers $\overline{K}(u, \mathfrak{p})$ einen Ring bilden, dessen Elemente sich durch Addition, Subtraktion und Multiplikation wieder erzeugen.

Da die Norm eines jeden ganzen Elementes, welches keine Einheit ist, eine positive ganzzahlige Ordnungszahl hat, so muß es wenigstens ein ganzes Element π geben, für welches die Ordnungszahl von $n(\pi)$ positiv und möglichst klein ist. Jedes solche Element soll *eine Primfunktion für den Körper* $\overline{K}(u, \mathfrak{p})$ oder für die ihm zugeordnete Stelle $\mathfrak{P}$ heißen, und die Ordnungszahl f ihrer Norm werde *ihr Grad* genannt. Dann ist jedes andere ganze oder gebrochene Element v wieder eindeutig in der Form $v = \varepsilon \pi^a$ darstellbar, wo ε eine Einheit ist, und die ganze Zahl a die *Ordnungszahl* von v für die Stelle $\mathfrak{P}$ heißt; alle und nur die Elemente von nicht negativer Ordnungszahl a sind algebraisch ganz. Ist speziell $p = \varepsilon \pi^e$, enthält also die Primfunktion p für die Stelle $\mathfrak{p}$ genau die e-te Potenz der Primfunktion für $\mathfrak{P}$, so heißt e *die Ordnung von* π. Geht man in der obigen Gleichung für p zur Norm über, so ergibt sich $p^\lambda = p^{ef}$. Die Ordnung e und der Grad f einer Primfunktion π sind also komplementäre Teiler von λ. Es wird gleich gezeigt werden, daß für alle hier betrachteten Kongruenzkörper stets $e = \lambda$, also $f = 1$ ist.

Im Körper $\overline{K}(u, \mathfrak{p})$ hört $p \sim \pi^e$ auf, ein Primteiler zu sein, und an seine Stelle tritt die Primfunktion π oder irgendein äquivalentes Element $\pi' = \varepsilon \pi$. Für die Teilbarkeit der Elemente von $\overline{K}(u, \mathfrak{p})$ durch eine beliebige Potenz von π gelten die folgenden Sätze: Zwei Elemente v und v' heißen wieder *kongruent modulo* π^e *oder modulo* $\mathfrak{P}^e$, wenn $v - v'$ durch π^e teilbar, wenn also $n(v - v')$ mindestens durch p^{fe} teibar ist. Zwei Elemente v und v' sind dann und nur dann für jede noch so hohe Potenz von π kongruent, wenn $n(v - v')$ durch jede Potenz von p teilbar, d. h. gleich Null ist. Dann sind aber nach dem soeben angegebenen Satze alle Koeffizienten der Hauptgleichung λ-ten Grades $n(t - \gamma) = t^\lambda - \ldots \pm n(\gamma) = 0$, der $\gamma = (v - v')$ genügt, gleich Null, d. h. es ist $\gamma^\lambda = (v - v')^\lambda = 0$ oder $v = v'$. Es besteht also der wichtige Satz:

> Zwei Elemente v und v' des Bereiches $K(u, \mathfrak{p})$ sind dann und nur dann für jede noch so hohe Potenz von π kongruent, wenn sie gleich sind.

Jedes ganze Element v ist modulo π einer endlichen Konstanten, nämlich derjenigen Zahl c kongruent, für welche:

$$n(c - v) = c^\lambda - b_1(\mathfrak{p}) c^{\lambda-1} + \ldots \pm b_\lambda(\mathfrak{p}) \equiv 0 \pmod{p}$$

ist, für welche also die Zahlengleichung besteht:

$$c^\lambda - b_1(0) c^{\lambda-1} + \ldots \pm b_\lambda(0) = 0.$$

Diese Gleichung besitzt nur eine einzige λ-fache Wurzel, denn hätte sie zwei verschiedene Wurzeln c und c', so wären diese modulo π kongruent, d. h. $n(c-c')=(c-c')^{\lambda}=0$.

Für irgendein algebraisch ganzes Element v ergibt sich also eine beliebig weit fortsetzbare Reihe von Gleichungen:

$$v=c_0+\pi v_1, \quad v_1=c_1+\pi v_2, \quad \ldots,$$

in denen die $c_0, c_1, c_2, \ldots$ Konstanten, die $v_1, v_2, \ldots$ ganze Elemente sind, und aus ihnen erhält man genau wie in (1) für eine beliebig hohe Potenz von π eine eindeutig bestimmte Darstellung

$$v=c_0+c_1\pi+c_2\pi^2+\ldots+c_{\sigma-1}\pi^{\sigma-1}+v_\sigma\pi^\sigma, \tag{11}$$

in welcher das Restglied v_σ wieder ein ganzes Element des Körpers bedeutet.

Ich betrachte jetzt die Gesamtheit aller unendlichen Reihen:

$$U=c_\varrho\pi^\varrho+c_{\varrho+1}\pi^{\varrho+1}+\ldots \tag{12}$$

mit konstanten Koeffizienten $c_\varrho, c_{\varrho+1}, \ldots$, welche beliebig weit berechnet werden können und deren Entwicklungselement π eine *Primfunktion* des Körpers $\overline{K}(u,\mathfrak{p})$ für die Stelle $\mathfrak{P}$ ist. Dabei soll vollständig davon abgesehen werden, ob diese Reihe in einer endlichen Umgebung jener Stelle konvergiert oder nicht. Die Elemente des Körpers $\overline{K}(u,\mathfrak{p})$

$$c_\varrho\pi^\varrho, \quad c_\varrho\pi^\varrho+c_{\varrho+1}\pi^{\varrho+1}, \quad \ldots \tag{12a}$$

werden wieder die sukzessiven *Näherungswerte von* U genannt. Zwei solche Reihen U und U' heißen *kongruent modulo* $\mathfrak{P}^r$, wenn alle ihre Näherungswerte modulo $\mathfrak{P}^r$, d. h. modulo π^r kongruent sind, und es sollen U und U' *gleich* genannt werden, wenn sie für jede noch so hohe Potenz von $\mathfrak{P}$ kongruent, wenn sie also identisch sind. Definiert man dann die Summe und das Produkt zweier solchen Reihen wie gewöhnlich, so bilden diese Reihen wieder einen Körper, welchen ich durch $\overline{K}(\mathfrak{P})$ bezeichnen will.

Ich nenne endlich wieder ein Element $v=\varphi(u,\mathfrak{p})$ des Kongruenzkörpers $\overline{K}(u,\mathfrak{p})$ *gleich einer Reihe* $V=\Sigma c_\sigma\pi^\sigma$ dieses Körpers $\overline{K}(\mathfrak{P})$, wenn v für jede noch so hohe Potenz von $\mathfrak{P}$ kongruent V ist. Dann folgt aus der Gleichung (11), daß jedes Element v von $\overline{K}(u,\mathfrak{p})$ für den Bereich der Stelle $\mathfrak{P}$ einer einzigen Potenzreihe V von $\overline{K}(\mathfrak{P})$ gleich ist, nämlich derjenigen Reihe, welche sich aus (11) für ein über jedes Maß hinaus wachsendes σ ergibt. Hiernach ist also der Kongruenzkörper $\overline{K}(u,\mathfrak{p})$ ein Unterkörper des Körpers $\overline{K}(\mathfrak{P})$ aller Potenzreihen (12).

Umgekehrt ist aber auch jede Potenzreihe $V=\Sigma c_\sigma\pi^\sigma$ einem Elemente v des Körpers $K(u,\mathfrak{p})$ gleich, d. h. die beiden Körper $\overline{K}(u,\mathfrak{p})$ und $\overline{K}(\mathfrak{P})$ sind identisch.

Ist nämlich $(x_1, \ldots, x_\lambda)$ eine Basis von $K(u, \mathfrak{p})$, deren Elemente x_i algebraisch ganz sind, was ja stets vorausgesetzt werden kann, so ist jedes Element $c_\nu \pi^\nu$ eindeutig in der Form:

$$(13) \qquad c_\nu \pi^\nu = c_1^{(\nu)} x_1 + c_2^{(\nu)} x_2 + \ldots + c_\lambda^{(\nu)} x_\lambda$$

darstellbar, deren Koeffizienten $c_i^{(\nu)}$ Potenzreihen aus $\bar{K}(\mathfrak{p})$ sind; und da mit unbegrenzt wachsendem ν $c_\nu \pi^\nu$ durch jede noch so hohe Potenz von π also auch von p algebraisch teilbar ist, so nähert sich $c_\nu \pi^\nu$ mit wachsendem ν der Grenze Null, d. h. die Ordnungszahlen der λ Koeffizienten $c_i^{(\nu)}$ wachsen mit zunehmendem ν über jedes Maß hinaus. Also wird die unendliche Reihe:

$$(14) \quad V = \Sigma c_\nu \pi^\nu = (\Sigma c_1^{(\nu)}) x_1 + \ldots + (\Sigma c_\lambda^{(\nu)}) x_\lambda \qquad c_1 x_1 + \ldots + c_\lambda x_\lambda = v$$

ein eindeutig bestimmtes Element v des Körpers $\bar{K}(u, \mathfrak{p})$, da seine Koeffizienten $c_i = \Sigma c_i^{(\nu)}$ jede Potenz von p mit einem endlichen Zahlkoeffizienten multipliziert enthalten [1]).

Die Primfunktion π ist nun ein primitives Element des Körpers $\bar{K}(u, \mathfrak{p})$, d. h. sie genügt innerhalb $\bar{K}(\mathfrak{p})$ einer *irreduziblen* Hauptgleichung λ-ten Grades. Wählt man nämlich statt der unendlich vielen Elemente 0-ter, erster, zweiter, ... Ordnung 1, $\pi, \ldots, \pi^{e-1}, \pi^e, \pi^{e+1}, \ldots$ die ihnen äquivalenten

[1]) Um dieses wichtige Resultat noch ausführlicher zu begründen, bemerke ich folgendes: Sind

$$v = v_1 x_1 + \ldots + v_\lambda x_\lambda \qquad \text{und} \qquad w = w_1 x_1 + \ldots + w_\lambda x_\lambda$$

zwei ganze Elemente von $K(u, \mathfrak{p})$, so ist auch $vw = \sum_{i,k} v_i (x_i x_k) w_k$ algebraisch ganz; das gleiche gilt somit von allen λ Koeffizienten der Hauptgleichung für vw:

$$n(t - vw) = t^\lambda - b_1(vw) t^{\lambda-1} + \ldots \pm b_\lambda (vw).$$

Speziell ist also der erste dieser Koeffizienten:

$$b_1(vw) = \sum_i \sum_k v_i c_{ik} w_k$$

ganz, wo allgemein $c_{ik} = b_1(x_i x_k)$ der erste Koeffizient der Hauptgleichung für das Produkt der beiden Basiselemente x_i und x_k ist. Die Determinante $|c_{ik}| = C$, die sog. Diskriminante des Systems $(x_1, \ldots, x_\lambda)$, ist sicher von Null verschieden, wenn dasselbe, wie angenommen wurde, eine Basis ist.

Ist nun speziell v durch eine Potenz p^ν von p teilbar, also $\frac{v}{p^\nu}$ algebraisch ganz, so ist also für beliebige *ganze* Elemente $w_1, \ldots w_\lambda$ $b_1(vw)$ durch p^ν teilbar. Wählt man also speziell $w_1 \ldots w_\lambda$ gleich den Elementen $C_{1i}, C_{2i}, \ldots, C_{\lambda i}$ der i-ten Spalte des adjungierten Systems zu (c_{ik}), so folgt, daß jedes $C v_i$ durch p^ν teilbar sein muß. Ein Element $v = v_1 x_1 + \ldots + v_\lambda x_\lambda$ ist also nur dann algebraisch teilbar durch eine Potenz p^ν, wenn alle Produkte $C v_i$ diese Potenz enthalten. Hieraus folgt also, daß die Ordnungszahlen der Koeffizienten $c_i^{(\nu)}$ der Elemente $c_\nu \pi^\nu$ in (13) wirklich mit zunehmendem ν über jedes Maß hinaus wachsen.

Elemente $1, \pi, \ldots, \pi^{e-1}, p, p\pi, \ldots, p\pi^{e-1}, p^2, p^2\pi, \ldots$, so ergibt sich genau wie in (11), daß jedes ganze Element v des Körpers $\overline{K}(u, \mathfrak{p})$ auch durch sie homogen und linear mit konstanten Koeffizienten darstellbar ist. Und hieraus folgt, wenn man alle mit $1, \pi, \pi^2, \ldots, \pi^{e-1}$ multiplizierten Glieder zusammenfaßt, für jedes algebraisch ganze Element v die folgende eindeutige Darstellung

$$v = c_0 + c_1\pi + c_2\pi^2 + \ldots + c_{e-1}\pi^{e-1}$$

mit ganzen Potenzreihen von p als Koeffizienten. Ist dagegen v gebrochen, also von negativer Ordnungszahl, so liefert die entsprechende Betrachtung eine gleiche eindeutige Darstellung von v durch das System $(1, \pi, \ldots, \pi^{e-1})$, in welcher aber mindestens einer der Koeffizienten c_i von negativer Ordnung in p ist. Hieraus folgt zunächst, daß das System $(1, \pi, \ldots, \pi^{e-1})$ eine Basis für den Körper λ-ter Ordnung $\overline{K}(u, \mathfrak{p})$ ist; es muß also $e = \lambda$ sein. Hieraus folgt der schon auf S. 125 angekündigte Satz:

> Die Ordnung der Primfunktion π in einem beliebigen Kongruenzkörper λ-ten Grades ist stets gleich λ; ihr Grad f ist demnach gleich 1.

Ein Element π dieses Kongruenzkörpers $\overline{K}(u, \mathfrak{p})$ ist hiernach dann und nur dann eine Primfunktion, wenn $n(\pi) \sim p$ vom ersten Grade ist.

Zweitens bildet dasselbe System $(1, \pi, \pi^2, \ldots, \pi^{\lambda-1})$ ein sog. *Fundamentalsystem* für den Körper $\overline{K}(u, \mathfrak{p})$, d. h. eine solche Basis, daß alle und nur die *ganzen* Elemente desselben durch dieses homogen und linear mit *ganzen* Koeffizienten $c_0, c_1, \ldots, c_{\lambda-1}$ darstellbar sind.

Das primitive Element π genügt innerhalb $\overline{K}(\mathfrak{p})$ einer irreduziblen Hauptgleichung:

$$g(v) = n(v - \pi) = u^\lambda - pb_1(\mathfrak{p})u^{\lambda-1} + \ldots \pm pb_\lambda(\mathfrak{p}) = 0,$$

deren konstantes Glied $n(\pi)$ genau durch die erste Potenz von p teilbar ist; und daraus folgt wegen (10b), daß alle anderen Koeffizienten ebenfalls p enthalten; auch hieraus ergibt sich, daß diese Gleichung innerhalb $\overline{K}(\mathfrak{p})$ irreduzibel sein muß, weil sie sonst in Faktoren *derselben Art* zerfallen müßte.

Unter den unendlich vielen zu π äquivalenten Primzahlen $\pi' = \pi\varepsilon$ kann man nun stets eine solche auswählen, welche der einfachsten Gleichung dieser Art, nämlich der reinen Gleichung:

$$\pi^\lambda = p \tag{15}$$

genügt. Ist dies nämlich für die gewählte Primzahl π noch nicht der Fall, so beginne die Entwicklung von π^λ nach Potenzen von π mit den Anfangsgliedern

$$\pi^\lambda = p + c\pi^{\lambda+r} + \ldots \qquad (r > 0),$$

Ersetzt man dann π durch die äquivalente Primzahl:

$$\pi' = \pi - \frac{c}{\lambda}\pi^{r+1},$$

wofür $\pi = \pi' + \frac{c}{\lambda}\pi'^{r+1} + \ldots$ wird, so geht die obige Gleichung über in:

$$\left(\pi' + \frac{c}{\lambda}\pi'^{r+1} + \ldots\right)^{\lambda} = p + c(\pi' - \ldots)^{\lambda+r} + \ldots,$$

von welcher sich das Glied $(\lambda + r)$-ter Ordnung forthebt. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhält man also zuletzt eine Primfunktion π_0, welche der reinen Gleichung $\pi_0^{\lambda} = p$ genügt. Es kann und soll daher von vornherein π als eine Wurzel dieser Hauptgleichung $g(v, \mathfrak{p}) = v^{\lambda} - p = 0$ vorausgesetzt werden.

Ist v ein primitives Element des Kongruenzkörpers $\overline{K}(u, \mathfrak{p})$, und $n(t - v) = g(v, \mathfrak{p}) = 0$ die irreduzible Hauptgleichung, der v genügt, so ist, wie in (4a) hervorgehoben wurde, der zu untersuchende Kongruenzkörper $\overline{K}(u, \mathfrak{p})$ isomorph dem Kongruenzkörper

$$\overline{K}(v, \mathfrak{p}) = \overline{K}(v, \bmod g(v, \mathfrak{p}))$$

aller modulo $g(v, \mathfrak{p})$ ganzen Funktionen von v mit Potenzreihen in p als Koeffizienten modulo $g(v, \mathfrak{p})$ betrachtet; es kann somit statt $\overline{K}(u, \mathfrak{p})$ auch dieser Körper $\overline{K}(v, \mathfrak{p})$ weiter untersucht werden.

Wenden wir dieses Ergebnis an auf das soeben bestimmte primitive Element π, welches der Hauptgleichung $v^{\lambda} - p = 0$ genügt, so kann die Untersuchung von $\overline{K}(u, \mathfrak{p})$ ersetzt werden durch diejenige des Kongruenzkörpers:

$$\overline{K}(v, \mathfrak{p}) = \overline{K}(v, \bmod v^{\lambda} - p) \tag{16}$$

aller modulo $v^{\lambda} - p$ ganzen Funktionen von v mit Potenzreihen in p als Koeffizienten für den Modul $v^{\lambda} - p$.

Die Elemente $w(v, \mathfrak{p})$ dieses Körpers können nun sämtlich in einer sehr einfachen reduzierten Form dargestellt werden. Es ist nämlich stets:

$$w(v, \mathfrak{p}) \equiv c_0(p) + c_1(p)v + \ldots + c_{\lambda-1}(p)v^{\lambda-1} \pmod{v^{\lambda} - p},$$

und da allgemein für jede der Potenzreihen $c_i(p) = c_i(v^{\lambda})$ ist, so ergibt sich:

$$w(v, \mathfrak{p}) \equiv c_r v^r + c_{r+1}v^{r+1} + \ldots \pmod{v^{\lambda} - p} \tag{17}$$

kongruent einer einzigen Potenzreihe in v mit konstanten Koeffizienten, und umgekehrt ist jede solche Potenzreihe einem einzigen Element $w(v, \mathfrak{p})$ modulo $v^{\lambda} - p$ kongruent. Es kann somit an Stelle von $\overline{K}(u, \mathfrak{p})$ der Körper $\overline{K}(\mathfrak{P}(v), \bmod v^{\lambda} - p)$ aller Potenzreihen in v mit konstanten Koeffizienten modulo $v^{\lambda} - p$ untersucht werden.

Es sei nun π eine der λ Wurzeln der Gleichung $v^{\lambda} - p = 0$, also etwa

der Hauptwert von $\sqrt[\lambda]{z-\alpha}$, bzw. $\sqrt[\lambda]{\frac{1}{z}}$, dann bildet der bisher untersuchte Körper $\overline{K}_p(v, \bmod v^\lambda - p)$ aller rationalen Funktionen von v, deren Koeffizienten Potenzreihen *in* p sind, einen Teilbereich des größeren Bereiches

$$\overline{R}_\pi(v, \bmod v^\lambda - p) \tag{18}$$

aller rationalen Funktionen von v, deren Koeffizienten Potenzreihen *in* π sind. Dieser letztere ist ein Ring, denn in dem erweiterten Koeffizientenkörper zerfällt die vorher irreduzible Funktion $v^\lambda - p$ vollständig in die Linearfaktoren:

$$v^\lambda - p = (v-\pi)(v-\omega\pi)\dots(v-\omega^{\lambda-1}\pi) = \prod_{i=0}^{\lambda-1}(v-\pi_i), \tag{19}$$

wenn ω eine primitive λ-te Einheitswurzel ist und allgemein $\pi_i = \omega^i\pi$ für $i = 0, 1, \dots, \lambda-1$ gesetzt wird.

Nach den auf S. 122—124 gegebenen Ausführungen reduziert sich nun die Untersuchung aller Elemente $w = w(v)$ des Körpers $\overline{K}(v, \bmod v^\lambda - p)$, oder, was dasselbe ist, aller Potenzreihen $w = c_r v^r + c_{r+1}v^{r+1} + \dots$ in v modulo $v^\lambda - p$ vollständig auf diejenige derselben Elemente in den λ konjugierten Kongruenzkörpern

$$\overline{K}_i = \overline{K}(v, \bmod v - \pi_i). \tag{20}$$

Sind nämlich, wie a. a. O.,

$$1_0, 1_1, \dots, 1_{\lambda-1}$$

die dort eingeführten Einheitsfunktionen und

$$w_0, w_1, \dots, w_{\lambda-1}$$

die Werte, welche w in jenen Körpern K_i annimmt, d. h. die λ konjugierten Potenzreihen:

$$w_i = c_r\pi_i^r + c_{r+1}\pi_i^{r+1} \dots,$$

so besteht für jedes Element w des Ringes $\overline{R}_\pi(v, \bmod v^\lambda - p)$ die folgende eindeutige Darstellung:

$$w = 1_0 w_0 + 1_1 w_1 + \dots + 1_{\lambda-1} w_{\lambda-1},$$

und nach (8) ergibt sich für die linke Seite der Hauptgleichung $h(t)$ für w die folgende Zerlegung in Linearfaktoren:

$$h(t) = (t-w_0)(t-w_1)\dots(t-w_{\lambda-1}). \tag{21}$$

Jede Hauptgleichung für ein Element $w = \varphi(u, p)$

$$h(t) = t^\lambda - b_1(p)t^{\lambda-1} + \dots \pm b_\lambda(p) = 0,$$

deren linke Seite im Körper $\overline{K}(p)$ der Potenzreihen von p irreduzibel

oder die Potenz einer irreduziblen Funktion ist, zerfällt also in dem Erweiterungskörper $\overline{K}(p, \pi)$, d. h. im Körper $\overline{K}(\mathfrak{P})$ aller konvergenten oder nichtkonvergenten Potenzreihen von π mit konstanten Koeffizienten in ein Produkt von λ konjugierten Linearfaktoren $t - w_1$, und diese Zerlegung ist eindeutig, da der Bereich $K(\mathfrak{P})$ eben ein Körper ist.

Wir wenden das soeben gefundene Ergebnis auf alle ν Faktoren $g_i(t, \mathfrak{p})$ an, in welche die linke Seite der Hauptgleichung $g(t, \mathfrak{p}) = \Pi g_i(t, \mathfrak{p})$ in (8) für ein beliebiges Element w des zugrunde gelegten Körpers $K(u, z)$ zerfällt; dann folgt, daß jeder von ihnen in einem Körper $K(\mathfrak{P}_i)$ von Potenzreihen in konjugierte Linearfaktoren zerfällt, welche nach Potenzen von $\pi_i = p^{\frac{1}{\lambda_i}}$ fortschreiten. Ist also $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu]$ das kleinste gemeinsame Vielfache aller λ_i und $\pi = \sqrt[\lambda]{z - a}$ bzw. $\sqrt[\lambda]{\frac{1}{z}}$, so zerfällt im Körper $\overline{K}(\mathfrak{P})$ aller konvergenten oder nichtkonvergenten Potenzreihen in π die linke Seite jeder Hauptgleichung $g(v, z) = 0$ des Körpers $K(u, z)$ eindeutig in n Linearfaktoren.

Jetzt können wir endlich den Nachweis führen, daß diese Zerlegung tatsächlich bereits in dem Teilkörper $K(\mathfrak{P})$ aller *konvergenten* Potenzreihen in π oder aller Funktionenelemente in π stattfindet, daß also die n Wurzeln jeder Hauptgleichung $g(w, z) = 0$ von $K(u, z)$ in der Umgebung jeder Stelle $\mathfrak{p}$ der unabhängigen Variablen z durch Elemente analytischer Funktionen dargestellt werden können.

In der Tat sind ja die n Koeffizienten jener Hauptgleichung, d. h. die elementaren symmetrischen Funktionen ihrer n Wurzeln $w_1, \ldots, w_n$ rational in z, also *konvergente* Potenzreihen in p und somit auch konvergente Reihen in π.

Hieraus kann man wiederum durch Majorantenbildung den Schluß ziehen, daß das gleiche auch für diese Wurzeln selbst der Fall sein muß. Den Beweis dieses wichtigen Satzes habe ich in dem erwähnten Werke (H. L., S. 68—72) vollständig geführt und möchte hier nur auf ihn verweisen.

Damit ist die rein arithmetische Grundlage für die Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen vollständig gegeben.

(Eingegangen am 16. Mai 1918.)