DIE VERALLGEMEINERTE KRONECKER'SCHE GRENZFORMEL UND IHRE ANWENDUNG AUF DIE BERECHNUNG DER KLASSENZAHL.

Von **Rudolf Fueter** (Basel).

Adunanza del 9 gennajo 1910.

Bekanntlich kann die Klassenanzahl eines algebraischen Körpers durch den Grenzwert

$$\lim_{s=1}(s-1)\zeta(s)$$

der zu dem Körper gehörigen ζ-Funktion berechnet werden. Wie aber schon DEDEKIND [1]) hervorhebt, ist damit das Problem nicht gelöst, sondern nur auf die Berechnung dieses limes zurückgeführt. Letztere ist bis jetzt nur für die *Kreiskörper*, d. h. die Körper der Einheitswurzeln $e^{\frac{2\pi i}{n}}$ allgemein von KUMMER durchgeführt worden. Diese Körper bilden nach KRONECKER *alle* im Bereiche der rationalen Zahlen abelschen Körper. Im folgenden will ich dasselbe Problem für die nächst compliziertere Klasse von Körpern durchführen, nämlich diejenigen, die im Gebiete der quadratisch imaginären Körper abelsch sind [2]). Diese Körper werden durch die in der complexen Multiplication auftretenden *singulären Moduln* und die Kreiskörper gemeinsam gegeben, und zwar, wie ich bewiesen habe [3]), ebenfalls *alle*.

Die Berechnung des Grenzwertes beruht in diesem Falle auf der Verallgemeinerung der *Grenzformel von* KRONECKER *auf den Fall,* dass die gegebene quadratische binäre positive Form nicht *alle* möglichen Werte annimmt, sondern nur diejenigen eines bestimmten Bereiches (Strahl- oder Ringklasse) [4]).

---

[1]) DIRICHLET-DEDEKIND, *Vorlesungen über Zahlentheorie* (Braunschweig, F. Vieweg u. Sohn, 1894), S. 610.

[2]) Dasselbe Problem habe ich spezieller und mehr zahlentheoretisch gelöst in der Arbeit: *Die Klassenanzahl der Körper der complexen Multiplikation* [Nachrichten von der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1907, S. 288-298]. Leider ist diese Arbeit durch einige Druckfehler und Ungenauigkeiten etwas entstellt.

[3]) *Die Theorie der Zahlstrahlen* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. CXXX (1905), S. 197-237; Bd. CXXXII (1907), S. 255-269].

[4]) Vergl. über die KRONECKER'sche Grenzformel: H. WEBER, *Lehrbuch der Algebra,* Bd. III (Braunschweig, Vieweg und Sohn, 1908), S. 526.

In § 1 gebe ich kurz die Begriffe Strahl, Ring, u. s. f. und lege den Aequivalenzbegriff fest.

In § 2 gebe ich die Werte an, die X und Y durchlaufen können, damit die quadratische Form $F \equiv AX^2 + BXY + CY^2$ nur Normen von Idealen einer Strahlklasse durchläuft.

In § 3 berechne ich in der Reihenentwicklung

$$\sum \frac{1}{F^s} = \frac{u_0}{s-1} + u_1 + (s-1)\,O(s).$$

(Verallgemeinerte KRONECKER'sche Grenzformel) die beiden Coeffizienten u_0 und u_1, falls in der Summe nur über die in 2.) festgelegten Werte X, Y summiert wird.

In § 4 zeige ich, dass die Formel als Spezialfall die KRONECKER'sche enthält.

In § 5 und 7 wende ich die Formel auf die Strahlklasse, in 6.) auf die Ringklasse an.

§ 8 bringt schliesslich die Anwendung der Formeln von 5.) 6.) und 7.) auf die Bestimmung der Klassenanzahl. Die Analogie mit der KUMMER'schen Theorie der Kreiskörper tritt dabei klar zutage [5]).

§ 1.

Zu Grunde gelegt werde ein quadratisch imaginärer Körper $k(\sqrt{m})$ (m ohne quadratischen Teiler) [6]). Der Körper werde in Bezug auf einen *Führer* f betrachtet, wo f eine *ganze rationale positive Zahl* sei. Die verschiedenen in f aufgehenden Primzahlen seien $l_1, l_2, \ldots, l_n$, so dass

$$f = l_1^{r_1} l_2^{r_2} \ldots l_n^{r_n}, \quad \text{wo} \quad r_i > 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Alle ganzen oder gebrochenen Zahlen α von k, für die

$$\alpha \equiv 1 \pmod{f}$$

heissen *Zahlen des Strahls mit dem Führer f. Strahlideale* sind alle zu f primen Ideale von k, wenn man in ihnen nur die Zahlen des Strahls betrachtet. Zwei Strahlideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$ sind *aequivalent im engern Sinne* (mod f) oder gehören zur selben *Strahlklasse im engern Sinne,* falls

$$\frac{\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{a}} = \alpha$$

gesetzt werden kann, wo α eine Zahl des Strahls.

Zwei Strahlideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$ sind *aequivalent im weitern Sinne* (mod f) oder gehören

5) Über die KUMMER'sche Theorie vergl. das fundamentale Werk: HILBERT, *Die Theorie der algebraischen Zahlkörper* [Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. IV (1897), S. I-XVIII, 177-546 (Bericht, erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung)], IV. Teil, S. 325-390. Ich werde dieses Werk in der Folge kurz als *Zahlbericht* zitieren.

6) Vergl. zu diesem Abschnitt meine Arbeiten 3).

zur selben *Strahlklasse im weitern Sinne,* falls

$$\frac{\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{a}} = \alpha$$

ist, und für jede in f aufgehende Primzahlpotenz l^r eine Einheit ε von k gefunden werden kann, so dass

$$\varepsilon\alpha \equiv 1 \pmod{l^r}.$$

Alle ganzen oder gebrochenen Zahlen von k, für die

$$\alpha \equiv a \pmod{f},$$

wo a irgend eine rationale Zahl ist, heissen *Zahlen des Ringes mit dem Führer f.*

Ringideale sind alle zu f primen Ideale von k, wenn man in ihnen nur die Zahlen des Ringes betrachtet. Zwei Ringideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$ heissen *aequivalent* (mod f) *oder gehören zur selben Ringklasse,* wenn

$$\frac{\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{a}} = \alpha$$

gesetzt werden kann, so dass α eine Zahl des Ringes.

Iede Strahl- oder Ringklasse enthält nur Ideale derselben Körperklasse, während jede Körperklasse eine endliche Anzahl von Strahl- oder Ringklassen in sich vereinigt.

Die Normen der Ideale einer Idealklasse von k werden repraesentiert durch eine quadratische Form

$$AX^2 + BXY + CY^2,$$

wo X, Y alle positiven und negativen ganzen Zahlen durchlaufen. Betrachten wir nur die Normen einer Ring- oder Strahlklasse so dürfen X und Y nicht mehr *alle* Zahlen durchlaufen.

Die erste Aufgabe ist daher, die Werte von X und Y so zu bestimmen, dass die gegebene quadratische Form *alle* Normen der Ideale einer Ring- resp. Strahlklasse durchläuft.

§ 2.

Wir wollen das Problem so allgemein anfassen, dass wir nachher beide Fälle des Strahls und Rings beherrschen. Es sei d die negativ genommene Discriminante von k; also $d = \sigma^2 m$ [$\sigma = 1$, wenn $m \not\equiv 1 \pmod 4$; $\sigma = 2$, wenn $m \equiv 1 \pmod 4$)] [7].

Betrachten wir alle zu $\mathfrak{a}$ aequivalenten Ideale $\mathfrak{a}_1$, für die

$$\frac{\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{a}} = \alpha \equiv \frac{a + b\sqrt{d}}{2} \pmod{f}, \qquad \text{wo} \qquad \begin{cases} 0 < a < f \\ 0 \leqq b < f \end{cases}$$

---

7) *Zahlbericht* [l. c. 5)], S. 280 u. ff.

und $\frac{a+b\sqrt{d}}{2}$ eine gegebene ganze Zahl ist. Wir setzen:

$$\alpha = \frac{a+b\sqrt{d}}{2} + f\frac{x+y\sqrt{d}}{2 . n(\mathfrak{a})};$$

x und y können dann alle diejenigen ganzen rat. Zahlen durchlaufen, für die

$$\frac{x+y\sqrt{d}}{2} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{a}'} \qquad \text{und} \qquad \frac{x^2-y^2 d}{4}$$

ganz ist. Die Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$ seien durch ihre Basis [8]) gegeben (Man darf $\mathfrak{a}$ *ohne* rationalen Teiler annehmen):

$$\mathfrak{a} = \left(A,\ \frac{B+\sqrt{d}}{2}\right), \qquad n(\mathfrak{a}) = A > 0, \qquad B > 0;$$

$$\mathfrak{a}_1 = \left(A_1,\ \frac{B_1+c_1\sqrt{d}}{2}\right), \qquad n(\mathfrak{a}_1) = A_1 c_1 > 0.$$

B und B_1 sind immer gerade, wenn $d \equiv 0 \pmod 4$, sonst ungerade. Somit muss nach obigem:

$$(A)\left(A_1,\ \frac{B_1+c_1\sqrt{d}}{2}\right) = \left(A\frac{a+b\sqrt{d}}{2} + f\frac{x+y\sqrt{d}}{2}\right)\left(A,\ \frac{B+\sqrt{d}}{2}\right).$$

Die Ideale links und rechts sind aber nur einander gleich, wenn es eine ganze rat. unimodulare Substitution $\begin{pmatrix} u & v \\ u_1 & v_1 \end{pmatrix}$ $(uv_1 - u_1 v = \pm 1)$ gibt [9]), so dass

$$AA_1 = u\, A\left(A\frac{a+b\sqrt{d}}{2} + f\frac{x+y\sqrt{d}}{2}\right) + v\,\frac{B+\sqrt{d}}{2}\left(A\frac{a+b\sqrt{d}}{2} + f\frac{x+y\sqrt{d}}{2}\right),$$

$$A\frac{B_1+c_1\sqrt{d}}{2} = u_1 A\left(A\frac{a+b\sqrt{d}}{2} + f\frac{x+y\sqrt{d}}{2}\right) + v_1\frac{B+\sqrt{d}}{2}\left(A\frac{a+b\sqrt{d}}{2} + f\frac{x+y\sqrt{d}}{2}\right).$$

Jede der Gleichungen löst sich in zwei auf:

$$AA_1 = u\, A\frac{Aa+fx}{2} + v\left(\frac{B}{2}\,\frac{Aa+fx}{2} + \frac{d}{2}\,\frac{Ab+fy}{2}\right),$$

$$0 = u\, A\frac{Ab+fy}{2} + v\left(\frac{B}{2}\,\frac{Ab+fy}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{Aa+fx}{2}\right),$$

$$A\frac{B_1}{2} = u_1 A\frac{Aa+fx}{2} + v_1\left(\frac{B}{2}\,\frac{Aa+fx}{2} + \frac{d}{2}\,\frac{Ab+fy}{2}\right),$$

$$A\frac{c_1}{2} = u_1 A\frac{Ab+fy}{2} + v_1\left(\frac{B}{2}\,\frac{Ab+fy}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{Aa+fx}{2}\right).$$

Aus der 2. und 4. folgt:

$$(\alpha) \qquad a = \frac{\pm c_1(2Au + Bv) - fx}{A}, \qquad b = \frac{\mp c_1 v - fy}{A}.$$

---

[8]) Vergl.: SOMMER, *Vorlesungen über Zahlentheorie* (Leipzig, Teubner, 1907), S. 37 u. ff.

[9]) *Zahlbericht* [l. c. [5])], S. 182.

Setzt man diese Werte in der ersten Gleichung ein, so ergibt sich:

$$\frac{A_1}{\pm c_1} = Au^2 + Buv + Cv^2, \quad \text{wo} \quad C = \frac{B^2 - d}{4A}.$$

Es kann also nur das obere Zeichen eintreten, und es ist:

$$n(\mathfrak{a}_1) = c_1 A_1 = A(c_1 u)^2 + B(c_1 u)(c_1 v) + C(c_1 v)^2.$$

Anderseits ergeben die Formeln (α):

$$c_1 u = \frac{a + bB}{2} + f\frac{x + By}{2A}$$

$$- c_1 v = Ab + fy.$$

Nun ist aber nach früherem:

$$\frac{x + y\sqrt{d}}{2} \equiv \frac{x + By}{2} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{a}'}$$

umsomehr also:

$$\frac{x + By}{2} \equiv 0 \quad [\operatorname{mod} A = n(\mathfrak{a})].$$

Wir dürfen also setzen:

$$\frac{x + By}{2A} = x'.$$

Statt x, y, die an die Bedingung $\frac{x + y\sqrt{d}}{2} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{a}'}$ gebunden waren, führen wir x' und y ein, die nun *alle* ganzen rat. positiven und negativen Zahlen durchlaufen können. Lassen wir den Strich an x' wieder weg, so ist

$$c_1 u = \frac{a + bB}{2} + fx,$$

$$- c_1 v = Ab + fy.$$

SATZ: *Gibt man in*

$$F \equiv AX^2 + BXY + CY^2, \qquad (B^2 - 4AC = d)$$

X, Y alle Werte

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{a + bB}{2} + fx \\ -Y &= Ab + fy \end{aligned}\right\} x, y \text{ laufen von } -\infty \text{ bis } +\infty$$

so durchläuft F die Normen aller Ideale $\mathfrak{a}_1$, für die

$$\frac{\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{a}} \equiv \frac{a + b\sqrt{d}}{2} \pmod{f}$$

und zwar die Norm jedes Ideals $\mathfrak{a}_1$, w_s mal.

w_s ist die Anzahl der Strahleinheiten. Denn umgekehrt sieht man, dass sich zwei Zahlen $\alpha = \frac{a + b\sqrt{d}}{2} + f\frac{x + y\sqrt{d}}{2A}$ nur um eine Einheit unterscheiden können, wenn $f = 2$; dann ist $w_s = 2$. Sonst ist aber immer $w_s = 1$.

§ 3.

Wir betrachten jetzt:

$$F \equiv AX^2 + BXY + CY^2, \quad \text{wo} \quad \begin{cases} X = \dfrac{a+bB}{2} + fx; & A > 0, \quad B > 0, \\ Y = -Ab + fy; & 0 < a < f, \\ B^2 - 4AC = d; & 0 \leqq b < f \end{cases}$$

[a und B gerade, wenn $d \equiv 0 \pmod 4$; B ungerade, wenn $d \equiv 1 \pmod 4$].

Man setze

$$\omega_1 = \frac{B + \sqrt{d}}{2A}, \qquad \omega_2 = \frac{-B + \sqrt{d}}{2A}$$

unter $\sqrt{d}$ die *positive* imaginäre Zahl verstanden. Dann ist:

$$F \equiv A(X + Y\omega_1)(X - Y\omega_2)$$
$$= A\left[\frac{a+bB}{2} + fx + (-Ab + fy)\omega_1\right]\left[\frac{a+bB}{2} + fx - (-Ab + fy)\omega_2\right].$$

Wir wollen $\sum\limits_{-\infty,+\infty}^{x,y} \frac{1}{F^s}$ $(s > 1)$ angenähert berechnen. Dazu verfährt man am besten nach WEBER [loc. cit. [4]), S. 526]. (Herleitung der KRONECKER'schen Grenzformel). Es sei

$$\sum_{-\infty,+\infty}^{x,y} \frac{1}{F^s} = \sum_{1,\infty}^{y} \sum_{-\infty,+\infty}^{x} \frac{1}{F^s} + \sum_{-1,-\infty}^{y} \sum_{-\infty,+\infty}^{x} \frac{1}{F^s} + \left[\sum_{-\infty,+\infty}^{x} \frac{1}{F^s}\right]_{y=0}$$
$$= M_s \qquad + N_s \qquad + P_s.$$

Wir nehmen der Einfachheit halber an es sei $Ab < f$ [sonst muss man für Ab überall den kleinsten Rest $> 0 \pmod f$ einführen] dann darf man in M_s setzen:

$$\frac{1}{F^s} = \frac{(2\pi)^{2s}}{A^s \Gamma(s)^2} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{2\pi i (X+\omega_1 Y)\xi - (X-\omega_2 Y)\eta} (\xi\eta)^{s-1} d\xi\, d\eta$$
$$= \frac{(2\pi)^{2s}}{2A^s\Gamma(s)^2} \int_0^\infty [e^{2\pi i f x u} \varphi_+(u) + e^{-2\pi i f x u} \varphi_-(u)]\, du,$$

wo $\Gamma(s)$ die Gammafunktion und [10])

$$\varphi_\pm(u) = e^{\pm 2\pi i \frac{a+bB}{2} u} \int_u^\infty e^{\pi i Y[v(\omega_1+\omega_2) \pm u(\omega_1-\omega_2)]} \left(\frac{v^2 - u^2}{4}\right)^{s-1} dv.$$

Somit

$$M_s = \frac{(2\pi)^{2s}}{2A^s\Gamma(s)^2} \sum_{1,\infty}^{y} \sum_{-\infty,+\infty}^{x} \left[\int_0^\infty e^{2\pi i f x u} \varphi_+(u)\, du + \int_0^\infty e^{-2\pi i f x u} \varphi_-(u)\, du\right].$$

Nun ist aber

$$\int_0^\infty e^{\pm 2\pi i u x f} \varphi_\pm(u)\, du = \sum_{0,\infty}^{\nu} \int_{\frac{\nu}{f}}^{\frac{\nu+1}{f}} e^{\pm 2\pi i u x f} \varphi_\pm(u)\, du = \sum_{0,\infty}^{\nu} \frac{1}{f} \int_0^1 e^{\pm 2\pi i x u} \varphi_\pm\left(\frac{u+\nu}{f}\right) du$$

---

[10]) WEBER, l. c. [4]), S. 527, 528.

oder nach der Theorie der FOURIER'schen Reihe:

$$\sum_{-\infty,+\infty}^{x} \int_0^\infty e^{\pm 2\pi i f x u} \varphi_\pm(u)\, du = \frac{1}{f}\left[\frac{1}{2}\varphi(0) + \sum_{1,\infty}^{\nu} \varphi_\pm\left(\frac{\nu}{f}\right)\right]$$

daher:

$$(1) \qquad M_s = \frac{(2\pi)^{2s}}{2 f A^s \Gamma(s)^2}\left\{\sum_{1,\infty}^{y} \varphi(0) + \sum_{1,\infty}^{y}\sum_{1,\infty}^{\nu}\left[\varphi_+\left(\frac{\nu}{f}\right) + \varphi_-\left(\frac{\nu}{f}\right)\right]\right\}.$$

Wir berechnen zuerst $\sum \varphi(0)$, indem wir in $\varphi(0)$ an Stelle von v die Integrationsvariable $t = \pi|\omega_1 + \omega_2| f v = 2\pi \frac{|\sqrt{d}|}{2A} f v$ einführen. Die Summation ausgeführt gibt:

$$\sum_{1,\infty}^{y} \varphi(0) = \frac{2A^{2s-1}}{\left(2\pi f|\sqrt{d}|\right)^{2s-1}} \int_0^\infty \frac{e^{-\left(1-\frac{Ab}{f}\right)t}}{1-e^{-t}}\, t^{2s-2}\, dt$$

$$= \frac{2A^{2s-1}}{\left(2\pi f|\sqrt{d}|\right)^{2s-1}}\left[\int_0^\infty \left(\frac{e^{-\left(1-\frac{Ab}{f}\right)t}}{1-e^{-t}} - \frac{e^{-t}}{t}\right) t^{2s-2}\, dt + \int_0^\infty e^{-t} t^{2s-3}\, dt\right].$$

In dem ersten Integral kann man $s = 1$ setzen; dasselbe geht dann in ein bekanntes Integral der Theorie der Gammafunktion [11]) über; und es wird, wie man leicht erkennt:

$$(2) \qquad \sum_{1,\infty}^{y} \varphi(0) = \frac{A^{2s-1}}{\left(2\pi f|\sqrt{d}|\right)^{2s-1}}\left[\frac{1}{s-1} + 2\Gamma'(1) - \frac{2\Gamma\left(1-\frac{Ab}{f}\right)'}{\Gamma\left(1-\frac{Ab}{f}\right)} + (s-1)O(s)\right]$$

Dabei ist Γ' die 1. Derivierte der Gammafunktion, und $O(s)$ soll von nun an stets eine unbekannte Funktion von s bedeuten, von der man nur weiss, dass sie für $s = 1$ *endlich* bleibt.

Um in (1) die 2^{te} Summe zu berechnen, führt man in $\varphi_\pm\left(\frac{\nu}{f}\right)$ an Stelle von v die Variable t ein, wo

$$\frac{\nu}{f} - \pi i(\omega_1 + \omega_2) f t = v$$

dann ist:

$$\varphi_\pm\left(\frac{\nu}{f}\right) = \frac{A}{\pi|\sqrt{d}|} e^{\frac{2\pi i \nu}{f}\left(\pm\frac{a+bB}{2} - Ab\omega_{12}\right)} \int_0^\infty e^{-\left(y-\frac{Ab}{f}\right)t + 2\pi i \nu y \omega_{12}}\, \psi(t)^{2(s-1)}\, dt$$

(ω_{12} bedeutet ω_1 oder ω_2, je nachdem $+$ oder $-$).

Daher

$$\sum_{1,\infty}^{y}\left[\varphi_+\left(\frac{\nu}{f}\right) + \varphi_-\left(\frac{\nu}{f}\right)\right]$$

$$= \frac{A}{\pi|\sqrt{d}|}\left[e^{\frac{2\pi i\nu}{f}\left[\frac{a+bB}{2} + (f-Ab)\omega_1\right]} \int_0^\infty \frac{e^{-\left(1-\frac{Ab}{f}\right)t}}{1 - e^{2\pi i \nu w_1} e^{-t}}\, dt\right.$$

$$\left. + e^{\frac{2\pi i\nu}{f}\left[-\frac{a+bB}{2} + (f-Ab)\omega_2\right]} \int_0^\infty \frac{e^{-\left(1-\frac{Ab}{f}\right)t}}{1 - e^{2\pi i \nu \omega_2} e^{-t}}\, dt + (s-1)O(s)\right].$$

---

[11]) Vergl. z. B.: C. JORDAN, *Cours d'Analyse*, 2e édition, t. II (Paris, Gauthier-Villars, 1894), S. 180.

Diese beiden Integrale sind leicht zu berechnen; sie werden, da A, b, f ganze rat. Zahlen sind, durch $e^{-\frac{t}{f}} = \xi$ in ein Integral über eine rat. Funktion verwandelt. Es wird:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\left(1-\frac{Ab}{f}\right)t}}{1-e^{2\pi i\nu\omega}e^{-t}}\,dt = -\sum_{0,f-1}^{\mu}\frac{1}{f}\,e^{\frac{2\pi i Ab}{f}(\mu+\nu\omega)-2\pi i\nu\omega}\lg\left(1-e^{\frac{2\pi i}{f}(\mu+\nu\omega)}\right),$$

wo zur Festlegung des $\lg\chi$ die negative reelle Axe aufgeschnitten und $\lg\chi$ auf der posit. reellen Axe reell sei. So findet man:

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}\sum_{1,\infty}^{\nu}\left[\varphi_+\left(\frac{\nu}{f}\right)+\varphi_-\left(\frac{\nu}{f}\right)\right] = -\frac{A}{\pi f|\sqrt{d}|}\sum_{0,f-1}^{\mu}\Big[&e^{\frac{2\pi i}{f}\left(\frac{a+bB}{2}\nu+Ab\mu\right)}\lg\left(1-e^{\frac{2\pi i}{f}(\mu+\nu\omega_1)}\right)\\ &+e^{\frac{2\pi i}{f}\left(-\frac{a+bB}{2}\nu+Ab\mu\right)}\lg\left(1-e^{\frac{2\pi i}{f}(\mu+\nu\omega_2)}\right)+(s-1)\,O(s)\Big].\end{aligned}\right.$$

Setzt man (2) und (3) in (1) ein, so erhält man:

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}M_s = {}&\frac{\pi A^{s-1}}{f^{s}|\sqrt{d}|^{2s-1}\Gamma(s)^2}\left[\frac{1}{s-1}+2\Gamma'(1)-\frac{2\Gamma\left(1-\frac{Ab}{f}\right)'}{\Gamma\left(1-\frac{Ab}{f}\right)}\right]\\ &-\frac{(2\pi)^{2s-1}}{A^{s-1}f^2|\sqrt{d}|\Gamma(s)^2}\sum_{0,f-1}^{\mu}\sum_{1,\infty}^{\nu}\Big[e^{\frac{2\pi i}{f}\left(\frac{a+bB}{2}\nu+Ab\mu\right)}\lg\left(1-e^{\frac{2\pi i}{f}(\mu+\nu\omega_1)}\right)\\ &+e^{\frac{2\pi i}{f}\left(-\frac{a+bB}{2}\nu+Ab\mu\right)}\lg\left(1-e^{\frac{2\pi i}{f}(\mu+\nu\omega_2)}\right)\Big]+(s-1)\,O(s).\end{aligned}\right.$$

Genau ebenso findet man:

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}N_s = {}&\frac{\pi A^{s-1}}{f^{2s}|\sqrt{d}|^{2s-1}\Gamma(s)^2}\left[\frac{1}{s-1}+2\Gamma'(1)-2\,\frac{\Gamma\left(1+\frac{Ab}{f}\right)'}{\Gamma\left(1+\frac{Ab}{f}\right)}\right]\\ &-\frac{(2\pi)^{2s-1}}{A^{s-1}f^2|\sqrt{d}|\Gamma(s)^2}\sum_{0,f-1}^{\mu}\sum_{1,\infty}^{\nu}\Big[e^{\frac{2\pi i}{f}\left(-\frac{a+bB}{2}\nu-Ab\mu\right)}\lg\left(1-e^{\frac{2\pi i}{f}(\mu+\nu\omega_1)}\right)\\ &+e^{\frac{2\pi i}{f}\left(\frac{a+bB}{2}\nu-Ab\mu\right)}\lg\left(1-e^{\frac{2\pi i}{f}(\mu+\nu\omega_2)}\right)\Big]+(s-1)\,O(s).\end{aligned}\right.$$

Aus (4) und (5) folgt:

$$\begin{aligned}M_s+N_s = {}&\frac{\pi A^{s-1}}{f^{s}|\sqrt{d}|^{2s-1}\Gamma(s)^2}\left[\frac{2}{s-1}+4\Gamma'(1)-2\,\frac{\Gamma\left(1-\frac{Ab}{f}\right)'}{\Gamma\left(1-\frac{Ab}{f}\right)}-2\,\frac{\Gamma\left(1+\frac{Ab}{f}\right)'}{\Gamma\left(1+\frac{Ab}{f}\right)}\right]\\ &+\frac{2(2\pi)^{2s-1}}{A^{s-1}f^2|\sqrt{d}|\Gamma(s)^2}\sum_{0,f-1}^{\mu}\sum_{1,\infty}^{\nu}\left[\cos 2\pi\,\frac{\frac{a+bB}{2}\nu+Ab\mu}{f}\,\lg\left(1-e^{\frac{2\pi i}{f}(\mu+\nu\omega_1)}\right)\right.\\ &\left.+\cos 2\pi\,\frac{\frac{a+bB}{2}\nu-Ab\mu}{f}\,\lg\left(1-e^{\frac{2\pi i}{f}(\mu+\nu\omega_2)}\right)\right]+(s-1)\,O(s).\end{aligned}$$

Nun kann aber μ ebenso wohl die Zahlen 0, -1 bis $-(f-1)$ durchlaufen. Ferner kann man die Faktoren vor den Klammern ebenfalls in Reihen nach $(s-1)$ entwickeln. Es ergibt sich so:

$$(6)\quad \begin{cases} M_s + N_s = \dfrac{2\pi}{f^2|\sqrt{d}|}\dfrac{1}{s-1} - \dfrac{2\pi}{f^2|\sqrt{d}|}\left[\dfrac{\Gamma\left(1+\frac{Ab}{f}\right)'}{\Gamma\left(1+\frac{Ab}{f}\right)} + \dfrac{\Gamma\left(1-\frac{Ab}{f}\right)'}{\Gamma\left(1-\frac{Ab}{f}\right)}\right] \\ + \dfrac{2\pi}{f^2|\sqrt{d}|}\lg\dfrac{A}{f^2|d|} - \dfrac{4\pi}{f^2|\sqrt{d}|}\sum_{0,f-1}^{\mu}\sum_{1,\infty}^{\nu}\cos 2\pi\dfrac{\frac{a+bB}{2}\nu + Ab\mu}{f}\lg\left(1-e^{\frac{2\pi i}{f}(\mu+\nu\omega_1)}\right)\left(1-e^{\frac{2\pi i}{f}(-\mu+\nu\omega_2)}\right) \\ + (s-1)\,O(s). \end{cases}$$

Schliesslich ist noch P_s zu berechnen:

$$(7)\quad \begin{cases} P_s = \displaystyle\sum_{-\infty,+\infty}^{x}\frac{1}{(AX^2 - ABXb + A^2Cb^2)^s} \\ = \dfrac{-i}{b|\sqrt{d}|A}\displaystyle\sum_{-\infty,+\infty}^{x}\left(\frac{1}{\frac{a+bB}{2} - bA\omega_1 + fx} + \frac{1}{-\frac{a+bB}{2} - bA\omega_2 - fx}\right) \\ + (s-1)\,O(s) \\ = \dfrac{\pi i}{bf|\sqrt{d}|A}\left[\operatorname{cotg}\pi\dfrac{\frac{a+bB}{2}+bA\omega_1}{f} + \operatorname{cotg}\pi\dfrac{-\frac{a+bB}{2}+bA\omega_2}{f}\right] \\ + (s-1)\,O(s). \end{cases}$$

(6) und (7) zusammen ergeben die *verallgemeinerte* KRONECKER'*sche Grenzformel:*

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{-\infty,+\infty}^{x,y}\frac{1}{F^s} = \frac{2\pi}{f^2|\sqrt{d}|}\frac{1}{s-1} - \frac{2\pi}{f^2|\sqrt{d}|}\left[\frac{\Gamma\left(1+\frac{Ab}{f}\right)'}{\Gamma\left(1+\frac{Ab}{f}\right)} + \frac{\Gamma\left(1-\frac{Ab}{f}\right)'}{\Gamma\left(1-\frac{Ab}{f}\right)}\right] \\ + \dfrac{\pi i}{bAf|\sqrt{d}|}\left(\operatorname{cotg}\pi\dfrac{\frac{a+bB}{2}+bA\omega_1}{f} + \operatorname{cotg}\pi\dfrac{-\frac{a+bB}{2}+Ab\omega_2}{f}\right) \\ + \dfrac{2\pi}{f^2|\sqrt{d}|}\lg\dfrac{A}{f^2|d|} \\ - \dfrac{4\pi}{f^2|\sqrt{d}|}\displaystyle\sum_{0,f-1}^{\mu}\sum_{1,\infty}^{\nu}\cos 2\pi\frac{\frac{a+bB}{2}\nu + Ab\mu}{f}\lg\left(1-e^{\frac{2\pi i}{f}(\mu+\nu\omega_1)}\right)\left(1-e^{\frac{2\pi i}{f}(-\mu+\nu\omega_2)}\right) \\ + (s-1)\,O(s). \end{cases}$$

§ 4.

Wir nehmen zunächst $b = 0$ an; dann muss a gerade sein. Wir setzen für $a : 2a$ und finden:

$$\text{(II)} \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{-\infty,+\infty}^{x,y} \frac{1}{F^s} &= \frac{2\pi}{f^2|\sqrt{d}|}\frac{1}{s-1} - \frac{4\pi}{f^2|\sqrt{d}|}\Gamma'(1) + \frac{\pi^2}{f^2 A \sin^2\frac{\pi a}{f}} + \frac{2\pi}{f^2|\sqrt{d}|}\lg\frac{A}{f^2|d|} \\ &- \frac{4\pi}{f^2|\sqrt{d}|}\sum_{1,\infty}^{\nu}\cos\frac{2\pi a\nu}{f}\lg(1-e^{2\pi i\nu\omega_1})(1-e^{2\pi i\nu\omega_2}) + (s-1)\,O(s). \end{aligned} \right.$$

Dieselbe geht über in die bekannte KRONECKER'sche Formel, wenn wir in ihr $f = 1$ setzen. Nur muss dann $a = 0$ sein, und in der Summe links wird das Glied, das $x = 0$, $y = 0$ entspricht:

$$\frac{1}{(A a^2)^s}.$$

Unendlich gross. Wir müssen deshalb dieses Glied zuerst beiderseits subtrahieren. Es wird dann rechts

$$\lim_{a=0}\left(\frac{\pi^2}{A\sin^2\frac{\pi a}{f}} - \frac{1}{Aa^2}\right) = \frac{\pi^2}{3f^2 A} = -\frac{4\pi}{f^2|\sqrt{d}|}\,\frac{\pi i(\omega_1+\omega_2)}{12}$$

somit:

$$\begin{aligned} \sum_{-\infty,+\infty}^{x,y}{}' \frac{1}{F^s} &= \frac{2\pi}{|\sqrt{d}|}\frac{1}{s-1} - \frac{4\pi}{|\sqrt{d}|}\Gamma'(1) + \frac{2\pi}{|\sqrt{d}|}\lg\frac{A}{|d|} \\ &- \frac{4\pi}{|\sqrt{d}|}\lg e^{\frac{\pi i}{12}(\omega_1+\omega_2)} - \frac{4\pi}{|\sqrt{d}|}\sum_{1,\infty}^{\nu}\lg(1-e^{2\pi i\omega_1\nu})(1-e^{2\pi i\omega_2\nu}) + (s-1)\,O(s) \\ &= \frac{2\pi}{|\sqrt{d}|}\frac{1}{s-1} - \frac{4\pi}{|\sqrt{d}|}\Gamma'(1) + \frac{2\pi}{|\sqrt{d}|}\lg\frac{A}{|d|} - \frac{4\pi}{|\sqrt{d}|}\lg\eta(\omega_1)\eta(\omega_2) \\ &+ (s-1)\,O(s) \end{aligned}$$

wenn $\sum'$ die Summe mit Ausschluss von $x = 0$, $y = 0$ und

$$\eta(\omega) = e^{\frac{\pi i\omega}{12}}\prod_{1,\infty}^{\nu}(1-e^{2\pi i\omega\nu})$$

ist. Dies ist die bekannte Formel [12]).

§ 5.

Die Formel (II) kann zur Berechnung der Klassenanzahl verwendet werden. Nach früherem steht links

$$w_s \sum^{(\mathfrak{a}_1)} \frac{1}{n(\mathfrak{a}_1)^s},$$

[12]) WEBER, l. c. [4]), S. 531.

wo die Summe über alle Ideale $\mathfrak{a}_1$ zu erstrecken für die

$$\frac{\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{a}} \equiv a \pmod{f}$$

ist. Setzt man $a = 1$, so durchläuft $\mathfrak{a}_1$ alle Ideale der Strahlklasse von $\mathfrak{a}$ im engeren Sinne; daher

$$\text{(III)} \left\{ \begin{aligned} \sum^{(\mathfrak{a}_1)} \frac{1}{n(\mathfrak{a}_1)^s} &= \frac{2\pi}{w_s f^2 |\sqrt{d}|} \frac{1}{s-1} - \frac{4\pi}{f^2|\sqrt{d}|}\Gamma'(1) + \frac{\pi^2}{f^2 A \sin^2\frac{\pi}{f}} + \frac{2\pi}{f^2|\sqrt{d}|}\lg\frac{A}{f^2|d|} \\ &- \frac{4\pi}{f^2|\sqrt{d}|}\sum_{1,\infty}^{\nu}\cos\frac{2\pi\nu}{f}\lg(1-e^{2\pi i\nu\omega_1})(1-e^{2\pi i\nu\omega_2}) + (s-1)\,O(s). \end{aligned} \right.$$

Die Summe links genommen über alle zu $\mathfrak{a}$ (mod f) im engeren Sinne aequivalenten Strahlideale.

§ 6.

Nehmen wir in (II) für a alle $\varphi(f)$ [13]) zu f teilerfremden positiven Zahlen $< f$ und addieren die $\varphi(f)$ Gleichungen, so erhalten wir links $\sum \frac{1}{n(\mathfrak{a}_1)^s}$ die Summe erstreckt über alle zu $\mathfrak{a}$ aequivalenten Ringideale (mod f). Es fragt sich nur, wie oft jedes Ideal auftritt. Um dies zu bestimmen, bedenken wir, dass $\mathfrak{a}_1$ nur öfters auftritt, wenn für verschiedene Paare $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ und zwei incongruente a_1 und a_2

$$a_1 + f\frac{x_1 + y_1\sqrt{d}}{2A} = \varepsilon\left(a_2 + f\frac{x_2 + y_2\sqrt{d}}{2A}\right),$$

wo ε irgend eine Einheit [14]). Also:

$$a_1 \equiv \varepsilon a_2 \pmod{f}.$$

Somit kann nur $\varepsilon = \pm 1$ sein; wir wollen die Anzahl dieser Einheiten, die zugleich Ringeinheiten sind, mit $w_r = 2$ bezeichnen. Jedes Ideal $\mathfrak{a}_1$ tritt also w_r mal auf, und es ist:

$$\begin{aligned} \sum^{(\mathfrak{a}_1)} \frac{1}{n(\mathfrak{a}_1)^s} &= \frac{2\pi\varphi(f)}{w_r f^2|\sqrt{d}|}\frac{1}{s-1} - \frac{4\pi\varphi(f)}{w_r f^2|\sqrt{d}|}\Gamma'(1) + \frac{2\pi\varphi(f)}{w_r f^2|\sqrt{d}|}\lg\frac{A}{f^2|d|} \\ &- \frac{i\pi^2(\omega_1+\omega_2)}{f^2|\sqrt{d}|\,w_r}\sum^{(a)}\frac{1}{\sin^2\frac{\pi a}{f}} - \frac{4\pi}{w_r f^2|\sqrt{d}|}\sum_{1,\infty}^{\nu}\sum^{(a)}\cos\frac{a\pi\nu}{f}\lg(1-e^{2\pi i\omega_1\nu})(1-e^{2\pi i\omega_2\nu}) \\ &+ (s-1)\,O(s), \end{aligned}$$

wo die Summe links über alle zu $\mathfrak{a}$ (mod f) aequivalenten Ringideale zu erstrecken ist. $\sum^{(a)}$ bedeutet die Summe über die $\varphi(f)$ zu f primen incongruenten Zahlen $a < f$.

[13]) DIRICHLET-DEDEKIND, l. c. [1]), S. 19.

[14]) Siehe § 2 dieser Arbeit.

Nun ist aber:

$$\sum^{(a)} \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi a}{f}} = \frac{f^2}{3} \prod_{1,n}^{i} \left(1 - \frac{1}{l_i^2}\right) = \frac{\psi(f)}{3}.$$

$\left[\text{Man setzt, um dies zu erkennen } \sum^{(a)} \frac{1}{\sin^2 \frac{a\pi}{f}} = \sum^{(a)} \sum_{-\infty,+\infty}^{x} \frac{1}{(a+fx)^2}\right]$. Ferner setze man:

$$H(\omega) = e^{\frac{\pi i \omega \psi(f)}{12}} \prod_{1,\infty}^{\nu} \prod^{(a)} \left(1 - e^{2\pi i \omega \nu}\right)^{\cos \frac{2\pi a \nu}{f}}$$

Dann wird:

$$\text{(IV)} \quad \begin{cases} \sum^{(\mathfrak{a}_1)} \frac{1}{n(\mathfrak{a}_1)^s} = \frac{2\pi\varphi(f)}{w_r f^2 |\sqrt{d}|} \frac{1}{s-1} - \frac{4\pi\varphi(f)}{w_r f^2 |\sqrt{d}|} \Gamma'(1) + \frac{2\pi\varphi(f)}{w_r f^2 |\sqrt{d}|} \lg \frac{A}{f^2 |d|} \\ \qquad - \frac{4\pi}{w_r f^2 |\sqrt{d}|} \lg H(\omega_1) H(\omega_2) + (s-1)\, O(s). \end{cases}$$

Die Summe links erstreckt über alle Ideale der Ringklasse von $\mathfrak{a}$. Diese Formel gilt auch für $f = 1$.

Man kann $H(\omega)$ leicht durch die Funktion $\eta(\omega)$ der Modulfunktionen ausdrücken. Hiezu verteile man das Product nach ν in so viel Producte als f Teiler t hat. Jedem Teiler t ordne man alle diejenigen ν zu, die mit f den grössten gemeinschaftlichen Divisor t haben. Hierauf wende man den folgenden Hilfssatz an:

Hilfssatz: *Ist* $\mu(f) = 0$ *oder* $= (-1)^n$, *je nachdem* f *durch ein Quadrat teilbar oder durch kein Quadrat teilbar ist* (n *die Anzahl der in* f *enthaltenen Primfactoren*), *so ist*

$$\mu(f) = \sum^{(a)} \cos \frac{2\pi a}{f},$$

wo a *ein System nach dem Modul* f *teilerfremden Zahlen durchlaufen soll.*

In der Tat, ist $f = l_1^{r_1} l_2^{r_2} \ldots l_n^{r_n}$, und wenigstens $r_1 > 1$, so ist:

$$\begin{aligned} \sum^{(a)} \cos \frac{2\pi a}{f} = \sum_{1,f-1}^{\nu} \cos \frac{2\pi\nu}{f} - \sum_{1,\frac{f}{l_1}-1}^{\nu} \cos \frac{2\pi\nu l_1}{f} - \cdots - \sum_{1,\frac{f}{l_n}-1}^{\nu} \cos \frac{2\pi\nu l_n}{f} \\ + \sum_{1,\frac{f}{l_1 l_2}-1}^{\nu} \cos \frac{2\pi\nu l_1 l_2}{f} + \cdots + \sum_{1,\frac{f}{l_{n-1} l_n}-1}^{\nu} \cos \frac{2\pi\nu l_{n-1} l_n}{f} \\ - \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + (-1)^n \sum_{1,\frac{f}{l_1 \ldots l_n}-1}^{\nu} \cos \frac{2\pi\nu l_1 l_2 \ldots l_n}{f} \\ = -1 + \binom{n}{1} - \binom{n}{2} + \cdots - (-1)^n = 0 = \mu(f). \end{aligned}$$

Ist dagegen $f = l_1 l_2 \ldots l_n$ so ergibt dieselbe Ueberlegung

$$\sum^{(a)} \cos \frac{2\pi a}{f} = -1 + \binom{n}{1} - \binom{n}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1}$$
$$= -(1-1)^n + (-1)^n = (-1)^n = \mu(f).$$

Mit Hilfe dieses Satzes findet man sofort:

$$H(\omega) = \frac{\eta(f\omega)^f \eta\left(\frac{f}{l_1 l_2}\omega\right)^{\frac{f}{l_1 l_2}} \cdots \eta\left(\frac{f}{l_1 l_2 l_3 l_4}\omega\right)^{\frac{f}{l_1 l_2 l_3 l_4}} \cdots}{\eta\left(\frac{f}{l_1}\omega\right)^{\frac{f}{l_1}} \eta\left(\frac{f}{l_2}\omega\right)^{\frac{f}{l_2}} \cdots \eta\left(\frac{f}{l_1 l_2 l_3}\omega\right)^{\frac{f}{l_1 l_2 l_3}} \cdots} = \frac{\prod^{(i)} \eta\left(\frac{f}{l_{i_1} l_{i_2} \ldots l_{i_{2k}}}\omega\right)^{\frac{f}{l_{i_1} l_{i_2} \ldots l_{i_{2k}}}}}{\prod^{(i)} \eta\left(\frac{f}{l_{i_1} l_{i_2} \ldots l_{i_{2k+1}}}\omega\right)^{\frac{f}{l_{i_1} l_{i_2} \ldots l_{i_{2k+1}}}}}.$$

Das wichtigste Resultat, das sich aus dieser Darstellung ergibt, lässt sich aus der Theorie der complexen Multiplication herleiten [15]).

§ 7.

SATZ: *$H(\omega_1)$ und $H(\omega_2)$ sind algebraische Zahlen* ($f > 1$).

Wir wollen aus (II) schliesslich im Falle des Strahls noch für die weitere Fassung des Aequivalenzbegriffes die Ueberlegung durchführen. Zwei Strahlideale heissen dann aequivalent, wenn

$$\frac{\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{a}} \equiv a \pmod{f}$$

und für jede in f enthaltene Primzahlpotenz l^r:

$$\pm a \equiv 1 \pmod{l^r}.$$

a kann also irgend eine Wurzel der Congruenz

$$a^2 \equiv 1 \pmod{f}$$

sein. Dieselbe hat $2^{n+\sigma}$ incongruente Lösungen, wenn n die Anzahl der in f enthaltenen von einander verschiedenen Primzahlen ist: $\sigma = 0$ für $f \not\equiv 0 \pmod 4$; $\sigma = 1$ für $f = 8r + 4$; $\sigma = 2$ für $f \equiv 0 \pmod 8$ [16]). Summiert man daher Formel (II) über alle a eines solchen Lösungssystems, so erhält man links die Summe über alle Ideale der Strahlklasse von $\mathfrak{a}$ im weitern Sinne, allein jedes Ideal 2 mal genommen. Somit ist:

$$(\mathrm{V}) \left\{ \begin{aligned} \sum^{(\mathfrak{a}_1)} \frac{1}{n(\mathfrak{a}_1)^s} &= \frac{2\pi \cdot 2^{n+\sigma-1}}{f^2 |\sqrt{d}|} \frac{1}{s-1} - \frac{4\pi\, 2^{n+\sigma-1}}{f^2|\sqrt{d}|} \Gamma'(1) + \frac{2\pi\, 2^{n+\sigma-1}}{f^2 |\sqrt{d}|} \lg \frac{A}{f^2 |d|} \\ &+ \frac{\pi^2}{2f^2 A} \sum^{(a)} \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi a}{f}} - \frac{4\pi}{2f^2 |\sqrt{d}|} \sum_{1,\infty}^{\nu} \sum^{(a)} \cos \frac{2\pi a \nu}{f} \lg(1 - e^{2\pi i \nu \omega_1})(1 - e^{2\pi i \nu \omega_2}) \\ &+ (s-1)\, O(s). \end{aligned} \right.$$

Die Summe links über alle Ideale einer Strahlklasse (mod f) *im weitern Sinne erstreckt.*

---

15) WEBER, l. c. 4), § 121, S. 437.

16) DIRICHLET-DEDEKIND, l. c. 1), S. 87 u. ff.

§ 8.

Anwendung auf die Berechnung der Klassenanzahl.

Die complexe Multiplication gibt uns die Existenz von Körpern $\mathfrak{K}$ die zu k relativ abelsch sind [17]). Dieselben bilden mit den Kreiskörpern zusammen den Bereich *aller* zu k überhaupt möglicher relativ- abelschen Körper [18]). Jenachdem man die Körper der complexen Multiplication allein oder mit den Kreiskörpern zusammen nimmt, hat man in k dem Oberkörper einen *Ring* oder *Strahl im weitern Sinne* zuzuordnen. Ihr Führer f wird durch alle in der Relativdiscriminante aufgehenden Primzahlen erhalten. Der Hauptsatz über den Zusammenhang von Oberkörper und Ring resp. Strahl lautet:

SATZ: *Für alle Primideale einer Ring- resp. Strahlklasse gilt dasselbe Zerlegungsgesetz* [19]).

Es ist deshalb leicht, jedem Ideal $\mathfrak{a}$ einer Ring- resp. Strahlklasse eine bestimmte Einheitswurzel $[\mathfrak{a}]$ zuzuordnen, die *nur von der betreffenden Klasse von* $\mathfrak{a}$ abhängt; also: *Jedem Ideal* $\mathfrak{a}$ *derselben Ring- resp. Strahlklasse ist dieselbe Einheitswurzel* $[\mathfrak{a}]$ *zugeordnet* [20]).

Die $\zeta_{\mathfrak{K}}$-Funktion des Oberkörpers $\mathfrak{K}$ lautet daher:

$$\zeta_{\mathfrak{K}} = F_s . \zeta_k(s) \prod^{\zeta} \sum^{(\mathfrak{a})} [\mathfrak{a}] \sum^{(\mathfrak{a}_1)} \frac{1}{n(\mathfrak{a}_1)^s},$$

wo die innere Summe über alle Ideale der Ring- resp. Strahlklasse von $\mathfrak{a}$, die äussere über ein Repraesentantensystem von Klassen des Rings- resp. Strahls zu nehmen ist; das Product erstreckt sich über alle $(h-1)$ möglichen Combinationen von Einheitswurzeln in $[\mathfrak{a}]$ mit Ausnahme von $(1, 1, \ldots, 1)$; $\zeta_k(s)$ ist die ζ-Funktion von k. F_s ist ein endliches Product, das nur von den Primzahlen von f abhängt [21]): über das Symbol $[\mathfrak{a}]$ gilt der Satz:

$$(\beta) \qquad \sum^{(\mathfrak{a})} [\mathfrak{a}] = 0.$$

Wir wollen den Fall von Ring und Strahl von jetzt an trennen:

a) *Ring*: Wir setzen Formel (IV) in $\zeta_{\mathfrak{K}}$ ein und berücksichtigen (β).

Dann wird:

$$\begin{aligned}\zeta_{\mathfrak{K}}(s) &= F_s \zeta_k(s) \prod^{\zeta} \sum^{(\mathfrak{a})} [\mathfrak{a}] \frac{4\pi}{w_r f^2 |\sqrt{d}|} \lg \frac{\sqrt{A}}{H(\omega_1) H(\omega_2)} + O(s) \\ &= \left(\frac{4\pi}{w_r f^2 |\sqrt{d}|}\right)^{h_r - 1} F_s \zeta_k(s) \prod^{\zeta} \sum^{(\mathfrak{a})} [\mathfrak{a}] \lg \frac{\sqrt{A}}{H(\omega_1) H(\omega_2)} + O(s).\end{aligned}$$

---

[17]) WEBER, l. c. [4]), S. 433 u. ff.

[18]) l. c. [3]), Bd. CXXXII, S. 255, 267.

[19]) l. c. [3]), Bd. CXXXII, S. 262 u. ff.

[20]) Die ausführlich zahlentheoretisch durchgeführte Entwicklung findet sich in meiner in Anm. [2]) zitierten Arbeit.

[21]) l. c. [2]), S. 295.

Multipliziert man beiderseits mit $(s-1)$ und geht zur Grenze $s=1$ über, so wird:

$$\text{(VI)} \qquad K.H = \varkappa\, h \left(\frac{4\pi}{w_r f^2 |\sqrt{d}|}\right)^{h_r - 1} F \prod^{\zeta} \sum^{(\mathfrak{a})} [\mathfrak{a}] \lg \frac{\sqrt{A}}{H(\omega_1) H(\omega_2)}.$$

Dabei ist h die Klassenanzahl von k; $\varkappa$ die charakteristische Zahl von k. H und K die entsprechenden Zahlen des Oberkörpers [22]) h_r ist die Ringklassenanzahl (mod f)

$$\varkappa = \frac{2\pi}{w|\sqrt{d}|}, \qquad K = \frac{(2\pi)^{h_r} R}{W|\sqrt{D}|} \quad (D \text{ Discriminante von } K).$$

Wir wollen diese Formel (VI) noch auf den speziellen Fall $f=1$ und $h=l=$ Primzahl anwenden. Dann wird der Ring zum Körper k und es muss jedenfalls m eine Primzahl sein.

Die Fälle $m=-1$ und $=-3$ sind hier ausgeschlossen. Die Discriminante D des Oberkörpers ist gleich $|d|^l$.

Somit (da auch $F=1$ wird):

$$\text{(VI}^a\text{)} \qquad H = l \frac{W}{2R} \prod^{\zeta} \sum^{(\mathfrak{a})} [\mathfrak{a}] \lg \frac{\sqrt{A}}{\eta(\omega_1)\eta(\omega_2)}.$$

Wählen wir als Repräsentantensystem $\mathfrak{a}$ ein Primideal $\mathfrak{p}$ und dessen Potenzen

$$\mathfrak{p},\ \mathfrak{p}^2, \ldots, \mathfrak{p}^l = \left(\frac{r + s\sqrt{d}}{2}\right),$$

so durchläuft A die Werte $p, p^2, p^3, \ldots, p^l = \dfrac{r^2 - d s^2}{4}$, und wir können B immer so bestimmen, dass

$$B^2 \equiv d \pmod{p^l}.$$

Es wird dann

$$\text{(VI}^b\text{)} \qquad H = l \frac{W}{2} \frac{\Delta}{R}.$$

Dabei ist:

$$\Delta = (-1)^{\frac{l-1}{2}} \begin{vmatrix} \lg \varepsilon_1 & \lg \varepsilon_2 \ldots \lg \varepsilon_{l-1} \\ \lg \varepsilon_2 & \lg \varepsilon_3 \ldots \lg \varepsilon_l \\ \ldots & \ldots \\ \lg \varepsilon_{l-1} & \lg \varepsilon_l \ldots \lg \varepsilon_{l-3} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{cases} \varepsilon_\mu = \dfrac{\eta\left(\dfrac{B+\sqrt{d}}{2p^{\mu+1}}\right)\eta\left(\dfrac{-B+\sqrt{d}}{2p^{\mu+1}}\right)}{\sqrt{p}\,\eta\left(\dfrac{B+\sqrt{d}}{2p^{\mu}}\right)\eta\left(\dfrac{-B+\sqrt{d}}{2p^{\mu}}\right)}, \\[2ex] \varepsilon_l = \dfrac{\eta\left(\dfrac{B+\sqrt{d}}{2p}\right)\eta\left(\dfrac{-B+\sqrt{d}}{2p}\right)}{\sqrt{p}\,\eta\left(\dfrac{B+\sqrt{d}}{2p^{l}}\right)\eta\left(\dfrac{-B+\sqrt{d}}{2p^{l}}\right)}. \end{cases}$$

Ueber die Grössen ε_μ gilt der Satz.

SATZ: *Die Grössen* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{l-1}$ *bilden ein System unabhängiger algebraischer Einheiten.*

---

[22]) *Zahlbericht* [l. c. [5])], S 229 u. ff. S. 308.

Denn man kann setzen:

$$\varepsilon_\mu = \frac{1}{\left(\frac{r+s\sqrt{d}}{2}\right)^{\frac{1}{2l}}} \frac{\eta\left(\frac{B+\sqrt{d}}{2p^{\mu+1}}\right)}{\eta\left(\frac{B+\sqrt{d}}{2p^{\mu}}\right)} \cdot \frac{1}{\left(\frac{r-s\sqrt{d}}{2}\right)^{\frac{1}{2l}}} \frac{\eta\left(\frac{-B+\sqrt{d}}{2p^{\mu+1}}\right)}{\eta\left(\frac{-B+\sqrt{d}}{2p^{\mu}}\right)}$$

Nach der Theorie der complexen Multiplication ist aber [23]:

$$\frac{r \pm s\sqrt{d}}{2} = \rho \left[\frac{\eta\left(\frac{\pm B+\sqrt{d}}{2p^{\mu+1}}\right)}{\eta\left(\frac{\pm B+\sqrt{d}}{2p^{\mu}}\right)} \right]^{2l},$$

wo ρ eine algebraische Einheit. Da $H \neq 0$, muss auch $\Delta \neq 0$; also sind die Einheiten unabhängig [24].

Ist l ungerade, so muss immer $m \equiv 1 \pmod 4$, also $m = d$ sein. W ist dann immer gleich 2 und es ist

(VI^c) $$H = l\frac{\Delta}{R}.$$

Ist dagegen $l = 2$, so wollen wir den Fall $m \equiv 3 \pmod 4$ noch etwas betrachten. Dann wird der Klassenkörper $\mathfrak{K}$ erhalten durch $\sqrt{|m|}$ [25]. In $\mathfrak{K}$ tritt daher $\sqrt{-1} = i$ auf und es ist $W = 2$ oder

(VI^d) $$H = 4\frac{\Delta}{R}.$$

Es ginge über den Rahmen dieser Arbeit, den interessanten Zusammenhang dieser Formel mit der Theorie des Dirichlet'schen Körpers $(\sqrt{m}, i)$, dessen Klassenanzahl man rein arithmetrisch kennt, aufzudecken.

b) Strahl im weiteren Sinne.

Man findet, genau wie oben, mittelst (V):

(VII) $$\left\{ \begin{aligned} K.H = \varkappa . h \left(\frac{2\pi}{f^2 |\sqrt{d}|}\right)^{h_s - 1} F \prod^{\zeta} \sum^{(\mathfrak{a})} [\mathfrak{a}] \Bigg\{ & 2^{n+\sigma-1} \lg A \\ & + \sum^{(a)} \left[\frac{\pi |\sqrt{d}|}{4A \sin^2 \frac{\pi a}{f}} - \sum_{1,\infty}^{\nu} \cos \frac{2\pi a \nu}{f} \lg(1 - e^{2\pi i \nu \omega_1})(1 - e^{2\pi i \nu \omega_2}) \right] \Bigg\}. \end{aligned} \right.$$

Dabei ist h_s die Strahlklassenanzahl.

Basel, den 31. Dezember 1909.

Rudolf Fueter.

---

[23]) Weber, l. c. [4]), S. 449.

[24]) *Zahlbericht* [l. c. [5])], S. 222.

[25]) Weber, l. c. [4]), S. 516.