

Studii sulle equazioni differenziali lineari, per riguardo ai loro integrali normali.

(Di ULISSE DINI, a Pisa.)

1. Nella Memoria pubblicata a pag. 179 e segg. del T. XII, Serie III di questi *Annali* al § 40, che fa seguito ad altre collo stesso titolo, ho dato un teorema generale relativo agli integrali normali delle equazioni lineari generali

$$E(y, z) = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = X, \quad (1)$$

quando in esse i primi n coefficienti $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ sono funzioni della sola x regolari (nel senso inteso nelle Memorie precedenti) in tutto un intervallo dato (a, b) (gli estr. incl.) almeno fino alle derivate $n^\circ, (n-1)^\circ, (n-2)^\circ, \dots, 1^\circ$ rispettivamente, e $a_n = g \varphi(z) + l$, essendo $\varphi(z)$ una funzione intera del parametro z , e g, l e X funzioni della x continue o no nello stesso intervallo (a, b) ma finite e atte alla integrazione in questo intervallo, e delle quali la prima non cambia mai di segno e non è d'integrale nullo in nessuna porzione dell'intervallo medesimo.

E si suppone inoltre nello stesso teorema che la equazione data (1) sia di quelle per le quali la equazione omogenea corrispondente $E(y, z) = 0$, almeno per un valore particolare γ del parametro z , se non per qualunque valore di questo parametro, si riproduce nella sua aggiunta; come si suppone anche che si riscontrino soddisfatte certe condizioni speciali nelle quali figurano insieme i valori dei primi n coefficienti della equazione data ai limiti a e b dell'intervallo e i coefficienti delle condizioni date per gl'integrali a questi limiti quando queste condizioni vi siano.

Questo teorema, in forza del quale si può affermare che sotto l'una o sotto l'altra delle due ipotesi generali contenute nell'enunciato del teorema stesso dovrà essere $X = 0$ in tutto l'intervallo (a, b) , dà luogo in sostanza a due casi veramente distinti nei quali si applica.

L'una di tali ipotesi infatti è quella di essersi assicurati in un modo qualsiasi della esistenza di un integrale normale della nostra equazione (1) che come funzione di z è funzione intera, e come funzione di x è regolare fino alle derivate n° , per ogni valore di z , in tutto l'intervallo da a a b (gli estr. incl.); e non si esclude che nello stesso intervallo il coefficiente a_0 possa anche divenire infinitesimo in qualche punto interno o agli estremi.

L'altra di tali ipotesi invece è quella che siano soddisfatte certe condizioni speciali indicate nell'enunciato del teorema stesso dalle quali consegue appunto la esistenza dell'integrale normale che ha le indicate particolarità rispetto ad x e a X ; ma allora fra le condizioni speciali che si richiedono vi ha quella che nell'intervallo da a a b e anche negli estremi, il coefficiente a_0 sia sempre diverso da zero; per quanto, in una nota al principio del § 34, io facessi rilevare che tale condizione veniva posta specialmente allo scopo di semplificare le considerazioni che allora si fecero, mentre salvo leggere modificazioni avrebbero potuto considerarsi anche alcuni casi nei quali a_0 fosse zero in alcuni punti fra a e b o a uno o a tutti e due i punti estremi.

Per le applicazioni dunque il primo di questi casi avrà più specialmente interesse quando, pei dati della questione da trattarsi, ci si debba necessariamente mantenere con x in un intervallo (a, b) nel quale a_0 non è sempre diverso da zero; e ora in vista di questo ci fermeremo appunto sul caso in cui questa circostanza si presenta, supponendo però che lo stesso coefficiente a_0 divenga infinitesimo soltanto in uno o in ambedue gli estremi a e b . E negli studi che ora faremo ammetteremo dapprima in modo più generale che nella equazione (1) che considereremo tutti i coefficienti dopo il primo possano anche contenere il parametro z essendo però funzioni intere di questo parametro, e rispetto ad x i primi n coefficienti $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ nell'intervallo dato (a, b) , non esclusi gli estremi, siano ancora funzioni regolari fino alle derivate $n^{\circ}, (n-1)^{\circ}, (n-2)^{\circ}, \dots, 1^{\circ}$ rispettivamente, mentre per a_n e per X e per le varie derivate d'ordine più alto delle quali si ammette la esistenza per gli altri coefficienti basterà richiedere che siano finite e atte alla integrazione fra a e b ; e all'infuori di queste non faremo altre ipotesi sulla nostra equazione.

Sotto queste condizioni rispetto alla equazione data, troveremo alcuni casi nei quali, pure essendo a_0 infinitesimo a uno o a tutti e due gli estremi dell'intervallo dato (a, b) esiste un integrale che rispetto ad x è regolare fino alle derivate n° fra a e b (gli estr. incl.) e rispetto a z è sempre una funzione intera; dopo di chè, limitandosi allora alle equazioni alle quali si

riferisce il teorema' del § 40 della Memoria precedente (*), quando ai limiti a e b si abbiano le particolarità di cui nel teorema stesso, si potrà affermare che per la equazione corrispondente si ha $X=0$ in tutto l'intervallo (a, b) .

2. Ciò posto, ammettiamo dunque che per es.: a sia un punto d'infinitesimo di a_0 , e b lo sia pure o no; e osserviamo allora che bisognerà per prima cosa assicurarsi della esistenza di integrali della nostra equazione (1) che siano regolari rispetto ad x anche nel punto a , e lo siano pure in b se anche b sarà come a un infinitesimo di a_0 , e al tempo siano funzioni intere di z per ogni valore di x fra a, b (a e b incl.); dopo di che volendo che siano anche integrali normali bisognerà cercare se sia possibile di soddisfare anche alle condizioni che si richiedono per questi integrali.

Indichiamo perciò ancora con w_1, w_2, \dots, w_n n integrali fondamentali della equazione omogenea $E(y, z)=0$ per ogni valore di x fra a e b , ad es.: un sistema di quelli che si ottengono coi soliti processi dalle formole generali delle mie Memorie precedenti di questi *Annali* sulle equazioni differenziali lineari, partendo cioè da un punto qualsiasi α fra a e b che ora dovrà suppersi diverso da a , e diverso anche da b quando anche b sia un punto d'infinitesimo di a_0 , per modo che in quelle formole i limiti inferiori degli integrali siano tutti uguali ad α , e prendendovi le solite c_1, c_2, \dots, c_n successivamente tutte eguali a zero fuorchè una che sarà presa uguale ad uno.

Questi integrali si manterranno regolari rispetto ad x fino alle derivate n° , nell'intervallo (a, b) , anche pei valori di x vicini quanto si vuole ad a e a b ; e per gli stessi valori di x saranno anche funzioni intere di z . Alcuni poi degli integrali medesimi potranno restare regolari anche fino in a sebbene ora in a l' a_0 diventi infinitesimo, come lo rimarranno tutti fino a b se b non sarà un infinitesimo di a_0 ; e quelli fra essi che saranno regolari fino ad uno o a tutti e due questi estremi inclusivamente per quanto si disse in generale al § 6 della Memoria precedente rimarranno funzioni intere di z per tutti i valori di x nell'intervallo (a, b) non esclusi gli estremi.

3. Ciò premesso, supponiamo per maggior chiarezza che fra gl'integrali w_1, w_2, \dots, w_n ve ne siano i , per es.: w_1, w_2, \dots, w_i , che godono della parti-

(*) Ci limiteremo cioè allora a considerare le equazioni (1) nelle quali z figura soltanto in a_n e si ha $a_n = g \varphi(z) + l$, essendo g e l le solite funzioni di x finite e atte alla integrazione fra a e b delle quali la prima non cangia mai di segno in questo intervallo, e il primo membro $E(y, z)$ delle stesse equazioni, almeno per un valore particolare γ di z , si riproduce nella solita equazione aggiunta.

colarità di non avere singolarità in a , e non averle neppure in b quando anche b sia un infinitesimo di a_0 ; ve ne siano i_a , ad es.: $w_{i+1}, w_{i+2}, \dots, w_{i+i_a}$, che le hanno in a e non in b ; i_b , ad es.: $w_{i+i_a+1}, w_{i+i_a+2}, \dots, w_{i+i_a+i_b}$, che le hanno in b e non in a ; e i rimanenti $i_{a,b} = n - (i + i_a + i_b)$ le abbiano tanto in a che in b , senza escludere che *per valori speciali di z* quegli integrali che ordinariamente hanno singolarità in a o in b possano perderle e divenire anch'essi regolari in questi punti, e senza escludere inoltre che alcuni di questi numeri $i, i_a, i_b, i_{a,b}$ possano anche essere zero; ma non potendo però essere zero contemporaneamente i_a e $i_{a,b}$, perchè a è un infinitesimo di a_0 , se

sarà $\int_a^a \frac{a_1}{a_0} dx = -\infty$; e non potendo essere zero insieme i_b e $i_{a,b}$ se anche

b è un infinitesimo di a_0 e se sarà $\int_a^b \frac{a_1}{a_0} dx = -\infty$ (V. nota al § 18 della

Mem. preced.).

Allora per ogni integrale y della nostra equazione completa $E(y, z) = X$, finchè x è fra a e b (gli estremi al più esclusi) potremo sempre scrivere

$$y = c_1 w_1 + c_2 w_2 + \dots + c_n w_n + Y,$$

essendo Y il solito integrale particolare della equazione stessa che diviene zero insieme alle sue prime $n-1$ derivate nel punto a , e pel quale si ha

$$Y = \sum_1^n w_s \int_a^x \Theta_c X D_{s,n} dx$$

dove $D_{s,n}$ è il complemento algebrico di $w_s^{(n-1)}$ nel solito determinante fondamentale D relativo agli integrali w_1, w_2, \dots, w_n , e per semplicità di scrittura si intende posto come nella Memoria precedente al § 17

$$\Theta_c = \frac{1}{a_0} e^{\int_c^x \frac{a_1}{a_0} dx};$$

essendo c un numero qualsiasi fra a e b pel quale a_0 non è zero; e noi tenendo conto dei dati che abbiamo dovremo ora cercare come debbano essere prese le c_1, c_2, \dots, c_n o a quali condizioni debbano soddisfare, sia pure facendo qualche limitazione nella equazione (1) da considerarsi, per far sì che y sia un integrale normale che ha tutte le particolarità volute rispetto a z e rispetto ad x in tutto l'intervallo (a, b) , non esclusi ora gli estremi a e b .

4. Ammetteremo perciò senz'altro, anche allo scopo di semplificare le nostre considerazioni, che se anche tutte o alcune delle $D_{s,n}$ o le

$\frac{1}{\alpha_0} e^{\int_c^x \frac{a_1}{a_0} dx} D_{s,n}$ o $\Theta_c D_{s,n}$ hanno qualche singolarità per $x = a$ o per $x = b$, esse però moltiplicate per X restino tutte atte alla integrazione anche negli in-

torni di a o di b , per modo quindi che gli integrali $\int_a^x \Theta_c X D_{s,n} dx$ anche

al tendere di x ad a o a b e a questi estremi si mantengano determinati e finiti, ciò che il più spesso avverrà quando negli intorni di a , e in quelli di b se anche b è un infinitesimo di a_0 , X sia delle forme $(x - a)^\lambda \varphi(x)$ o $(b - x)^\mu \psi(x)$ essendo λ e μ numeri positivi sufficientemente grandi, e essendo $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ funzioni di x continue o no ma atte alla integrazione negli intorni di a e b rispettivamente, e che se anche divengono infinite restano atte alla integrazione anche ridotte ai valori assoluti.

Per x fra a e b (a escl. e b pure escl. se anche b sarà un infinitesimo di a_0) potremo scrivere per y

$$y = s + s_a + s_b + s_{a,b},$$

e per le derivate $y^{(r)}$ degli ordini $r = 1, 2, \dots, n - 1$ avremo

$$y^{(r)} = s^{(r)} + s_a^{(r)} + s_b^{(r)} + s_{a,b}^{(r)},$$

le s , s_a , s_b , $s_{a,b}$ essendo somme tutte della forma $\sum w_m \left(c_m + \int_a^x \Theta_c X D_{m,n} dx \right)$

e le $s^{(r)}$, $s_a^{(r)}$, $s_b^{(r)}$, $s_{a,b}^{(r)}$ indicando non le derivate r^e di s , s_a , s_b , $s_{a,b}$ ma soltanto

le somme della forma $\sum w_m^{(r)} \left(c_m + \int_a^x \Theta_c X D_{m,n} dx \right)$, queste somme per s e $s^{(r)}$,

per s_a e $s_a^{(r)}$, per s_b e $s_b^{(r)}$ e per $s_{a,b}$ e $s_{a,b}^{(r)}$ essendo estese rispettivamente agli integrali w_m che non hanno singolarità nè in a nè in b , a quelli che le hanno in a e non in b , a quelli che le hanno in b e non in a , e a quelli che le hanno sì in a che in b ; per modo che se b non sarà un infinitesimo di a_0 i due termini s_b e $s_{a,b}$ in y e i due corrispondenti $s_b^{(r)}$ e $s_{a,b}^{(r)}$ in $y^{(r)}$ mancheranno senz'altro.

Segue da ciò che saremo certamente sicuri che y sia un integrale che si mantiene finito almeno fino alle derivate $(n - 1)^e$ nel punto a , e così pure nel punto b se anche b sarà un infinitesimo di a_0 , quando le s_a , s_b e $s_{a,b}$ e così le $s_a^{(r)}$, $s_b^{(r)}$ e $s_{a,b}^{(r)}$ per $r = 1, 2, \dots, n - 1$ si mantengano finite per $x = a$

e $x = b$; e « il caso più semplice nel quale questo avverrà sarà quello nel

« quale le $c_m + \int_a^x \Theta_c X D_{m,n} dx$ tendano a zero di per sè e anche moltiplicate

« per w_m e per $w_m^{(r)}$ con $r = 1, 2, \dots, n - 1$ al tendere di x ad a se si tratta
« dei termini corrispondenti a s_a , al tendere di x a b se si tratta di quelli
« corrispondenti a s_b , e al tendere di x sì ad a che a b se si tratta di quelli
« corrispondenti a $s_{a,b}$ (*) »; per modo che limitandoci per semplicità a con-

siderare soltanto questo caso, pei termini di s_a dovremo intanto avere
 $c_m = \int_a^x \Theta_c X D_{m,n} dx$; per quelli di s_b dovremo avere $c_m = \int_b^x \Theta_c X D_{m,n} dx$; e per
quelli di $s_{a,b}$ dovremo avere

$$\int_a^x \Theta_c X D_{m,n} dx = \int_b^x \Theta_c X D_{m,n} dx,$$

ciò che porta in particolare che se α_0 sarà infinitesimo tanto in a che in b ,
e se vi saranno integrali w_m che abbiano singolarità in ambedue questi punti,

per ciascuno di questi integrali w_m dovremo avere $\int_a^b \Theta_c X D_{m,n} dx = 0$ se si

vorrà che tutte le condizioni che ora poniamo siano soddisfatte.

5. Ammesso ora che tutto questo avvenga, e nella espressione precedente di y cambiando per comodo le prime i delle c_m (cioè quelle che figurano

in s) in $c_m + \int_a^x \Theta_c X D_{m,n} dx$, si vede che sarà

$$y = \sum_1^i w_m \left(c_m + \int_a^x \Theta_c X D_{m,n} dx \right) + \sum_a w_m \int_a^x \Theta_c X D_{m,n} dx + \left. \begin{aligned} &+ \sum_b w_m \int_b^x \Theta_c X D_{m,n} dx + \sum_{a,b} w_m \int_a^x \Theta_c X D_{m,n} dx, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

(*) Evidentemente queste condizioni sono soltanto sufficienti. Noi le poniamo perchè sono le più semplici, ma basterebbe ad es.: anche supporre che, sempre tendendo a zero le

$c_m + \int_a^x \Theta_c X D_{m,n} dx$ al tendere di x ad a o a b nei rispettivi casi, tendessero poi a quantità finite quando sono moltiplicate per w_m e per $w_m^{(r)}$.

dove s'intende che $\Sigma_a, \Sigma_b, \Sigma_{a,b}$ si estendano rispettivamente alla w_m che hanno le singolarità soltanto in a , o soltanto in b , o che le hanno ad un tempo in a e b , e nell'ultima somma all'integrale \int_a^x potrà anche sostituirsi l'altro \int_b^x ; e una formola simile l'avremo per $y^{(r)}$ per $r = 1, 2, \dots, n-1$ mutando soltanto, sotto le varie somme che figurano in y , le w_m in $w_m^{(r)}$.

E in questo integrale y della equazione completa $E(y, z) = X$ e nelle sue prime $n-1$ derivate $y^{(r)}$, delle c_i rimarranno dunque indeterminate soltanto le prime i c_1, c_2, \dots, c_i , cioè tante quante sono gli integrali w_i della equazione omogenea corrispondente $E(y, z) = 0$ che sono regolari contemporaneamente in a e b , e non ve ne rimarrà nessuna quando di questi integrali non ve ne sieno, cioè quando sia $i=0$; e per ciò che riguarda le derivate lo stesso integrale y le avrà finite e continue almeno fino a quelle dell'ordine $(n-1)$ in tutto l'intervallo (a, b) , non esclusi gli estremi a e b , mentre le derivate n° che si determineranno per mezzo della equazione data e che saranno sempre finite (continue però o no perchè non si richiede la continuità per le funzioni a_n e X) nei punti interni fra a e b , potranno essere infinite o anche mancare affatto a questi estremi a e b .

E inoltre, sempre sotto le varie condizioni che abbiamo poste, quando nel caso di $i > 0$, per le c_1, c_2, \dots, c_i rimaste finora indeterminate vengano poi scelte funzioni intere di z , lo stesso integrale y e le sue prime n derivate rispetto ad x , per quanto dicemmo in modo generale nella Memoria precedente, saranno funzioni intere di z per ogni valore di x fra a e b (gli estr. a e b al più esclusi per le sole derivate n°); mentre se sarà $i=0$ l'integrale stesso (2), nel quale allora verrà a mancare il primo termine del secondo membro, avrà già la indicata particolarità rispetto ad x e a z finchè x è fra a e b (a e b al più escl.), e sarà quindi senz'altro l'integrale cercato se non vi saranno altre condizioni speciali ai limiti alle quali esso debba soddisfare.

6. Volendo ora che questi integrali siano anche integrali normali della nostra equazione completa $E(y, z) = X$, osserviamo che nel caso di $i > 0$ la determinazione delle c_1, c_2, \dots, c_i dovrà farsi per mezzo delle condizioni ai limiti che saranno state date, e che potranno anche non esserci (V. § 21 della Mem. precedente) se α_0 sarà zero ai due estremi a e b e se al tempo stesso

a questi estremi sarà $\int_a^x \frac{a_1}{a_0} dx = -\infty$; e se

$$k_0 y_a + k_1 y'_a + k_2 y''_a + \dots + k_{n-1} y_a^{(n-1)} = 0 \quad (3)$$

sarà una qualsiasi delle condizioni ai limiti che potranno esserci per $x = a$, e

$$h_0 y_b + h_1 y'_b + h_2 y''_b + \dots + h_{n-1} y_b^{(n-1)} = 0 \quad (4)$$

sarà una di quelle che potranno esserci per $x = b$, per ciascuna di queste condizioni dovremo avere rispettivamente le formole

$$\left. \begin{aligned} c_1 \left(\sum_0^{n-1} k_s w_1^{(s)} \right)_a + c_2 \left(\sum_0^{n-1} k_s w_2^{(s)} \right)_a + \dots + c_i \left(\sum_0^{n-1} k_s w_i^{(s)} \right)_a &= K_a, \\ c_1 \left(\sum_0^{n-1} h_s w_1^{(s)} \right)_b + c_2 \left(\sum_0^{n-1} h_s w_2^{(s)} \right)_b + \dots + c_i \left(\sum_0^{n-1} h_s w_i^{(s)} \right)_b &= -H_b, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

essendo

$$\left. \begin{aligned} K_a &= \sum_b \left\{ \left[\sum_0^{n-1} (k_s w_m^{(s)})_a \right] \int_a^b \Theta_r X D_{m,n} dx \right\}, \\ H_b &= \sum'_b \left\{ \left[\sum_0^{n-1} h_s w_m^{(s)} \right]_b \int_a^b \Theta_r X D_{m,n} dx \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

dove la somma \sum_b in K_a s'intende estesa ai termini nei quali figurano le w_m che hanno le singolarità soltanto nel punto b , e l'altra \sum'_b in H_b s'intende estesa ai termini nei quali figurano le $i + i_a w_m$ che non hanno singolarità nello stesso punto b ; e di qui risulta intanto che onde, colle condizioni poste, l'integrale cercato possa esistere, bisognerà che le condizioni date ai limiti a e b fra tutte non siano più di i , cioè non siano più del numero degli integrali distinti w_1, w_2, \dots, w_i che non hanno singolarità nè in a nè in b , a meno che, quando le condizioni stesse ai limiti siano più di i , alcune di quelle simili alle (5) che ne verranno risultino identicamente soddisfatte qualunque sia z o rientrano l'una nell'altra in forza della natura stessa degli integrali w_1, w_2, \dots, w_n della equazione omogenea dai quali si parte.

Ricordando dunque il processo che tenemmo nei §§ 34 e segg. della Memoria precedente per la trattazione del problema analogo quando ponevamo la condizione che a_0 fosse sempre diversa da zero fra a e b e a questi estremi, si vede ora che salva l'indicata limitazione nel numero delle indeterminate c_s e in quelle delle condizioni ai limiti a e b che possono ancora aversi, e salvo la sostituzione di K_a e H_b alle quantità 0 e \bar{Y}_b che figuravano allora nei secondi membri delle formole (36) della Memoria stessa, che sono quelle alle quali ora corrispondono le precedenti (5), il nostro problema attuale

pel caso di $i > 0$ resta ora ridotto a quello già studiato nella detta Memoria, e quindi per trattarlo completamente basterà seguire la via che tracciammo allora.

Nel caso poi di $i = 0$, non avendosi affatto indeterminate c_s , e l'integrale cercato y , come abbiamo detto, risultando già pienamente determinato colle (2), se saranno date anche condizioni ai limiti come le (3) o (4), bisognerà assicurarsi che queste vengano rese identiche dall'integrale stesso y , per essere certi che questo integrale è l'integrale normale cercato, e il problema con ciò in questo caso di $i = 0$ rimarrà completamente esaurito.

7. Portata dunque la questione a questo punto non è il caso di fermarsi più oltre sul problema attuale che, quando si voglia, potrà ora essere svolto completamente con tutta facilità, seguendo la via che indicammo; e solo, siccome il caso che più comunemente si presenta è quello delle equazioni del second'ordine, esporremo con dettaglio le varie particolarità che meritano di essere segnalate pel caso di queste equazioni, il che faciliterà anche la trattazione, quando voglia farsi, dei casi di equazioni di ordini superiori.

Consideriamo dunque la equazione del second'ordine

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = X, \quad (7)$$

nella quale supporremo che i coefficienti a_0 , a_1 , a_2 e X abbiano le solite particolarità, e indichiamo con w_1 e w_2 i due integrali fondamentali che si ottengono coi soliti nostri processi generali partendo da un punto α fra a e b diverso da questi estremi.

Le condizioni poste sopra in generale al principio del § 4 rispetto agli integrali $\int \Theta_c X D_{m,m} dx$, estesi a intorni (a, x) , (x, b) dei punti a e b , e agli stessi integrali moltiplicati per w_m , w'_m , $w''_m, \dots, w_m^{(n-1)}$ si ridurranno ora a quella che anche quando gli estremi a e b sono punti d'infinitesimo di a_0 , per qualunque valore di z le funzioni $\Theta_c X w_1$ e $\Theta_c X w_2$ siano sempre integrabili negli intorni di a e di b , e i loro integrali da a ad x o da x a b (x compreso fra a e b) col tendere di x ad a e a b tendano a zero anche moltiplicati rispettivamente per w_2 e w'_2 , e per w_1 e w'_1 ; e oltre a ciò quando tanto a che b siano infinitesimi di a_0 e uno almeno degli integrali w_1 e w_2 per es. w_2 abbia singolarità sì in a che in b , per quanto dicemmo in fine

dello stesso § 4 bisognerà che per l'altro w_1 si abbia $\int_a^b \Theta_c X w_1 dx = 0$; e noi,

quand'anche non si dica esplicitamente, ammetteremo sempre di avere verificato che queste condizioni siano soddisfatte nei varii casi che considereremo.

Indicheremo poi con

$$k_0 y_a + k_1 y'_a = 0, \quad \text{e} \quad h_0 y_b + h_1 y'_b = 0 \quad (8)$$

le condizioni ai limiti a e b che potranno essere date pei nostri integrali da determinarsi y , senza escludere che possano anche ridursi a una sola o non esserci affatto, nei quali casi però potremo scriverle ancora ambedue intendendo allora che se una o tutte e due dovranno mancare siano zero i coefficienti k o h corrispondenti; e rispetto ad i considereremo i varii casi che ora possono presentarsi, che saranno quelli di $i=0$, $i=1$, e $i=2$, e li tratteremo separatamente, osservando che in ogni caso l'integrale corrispondente (2) avrà ora nel secondo membro uno o due termini soltanto.

8. Incominciando dal primo caso quello cioè di $i=0$ osserviamo che esso si suddivide in più altri, ma basterà naturalmente considerare i due seguenti, che indicheremo successivamente, cioè:

1.º il caso in cui i due integrali w_1 e w_2 sono regolari l'uno soltanto in a e l'altro soltanto in b , per es. w_1 è regolare soltanto in a , e w_2 lo è soltanto in b , nel qual caso la formola (2) ci darà per l'integrale

$$y = -w_1 \int_b^x \Theta_c X w_2 dx + w_2 \int_a^x \Theta_c X w_1 dx, \quad (9)$$

e le condizioni ai limiti (8) se vi saranno porteranno che debbano essere soddisfatte qualunque sia z le due condizioni corrispondenti

$$(k_0 w_1 + k_1 w'_1)_a \int_a^b \Theta_c X w_2 dx = 0, \quad (h_0 w_2 + h_1 w'_2)_b \int_a^b \Theta_c X w_1 dx = 0; \quad (10)$$

talchè in questo caso, se le condizioni ai limiti (8) vi saranno una o tutte e due, l'integrale normale cercato vi sarà e sarà dato dalla (9) quando siano soddisfatte identicamente qualunque sia z una o tutte e due le condizioni corrispondenti (10), e in particolare quindi quando siano soddisfatte le due

$$\int_a^b \Theta_c X w_1 dx = 0 \quad \text{e} \quad \int_a^b \Theta_c X w_2 dx = 0, \quad (11)$$

o quando le w_1 e w_2 soddisfino esse pure alle condizioni ai limiti per quello dei limiti a o b nel quale sono regolari; mentre se le condizioni ai limiti (8) non ci saranno l'integrale cercato esisterà e sarà dato dalla (9) senz'altro.

2.º il caso in cui ambedue gli integrali w_1 e w_2 hanno singolarità in uno stesso dei limiti per es. in a , le abbiano essi o no anche in b , nel qual caso la formola (2) ci darà sempre per l'integrale y

$$y = -w_1 \int_a^x \Theta_c X w_2 dx + w_2 \int_a^x \Theta_c X w_1 dx, \quad (12)$$

e ora la condizione al limite a se anche ci sarà risulterà soddisfatta da sè. Invece quella al limite b se ci sarà darà luogo all'altra

$$(h_0 w_2 + h_1 w'_2)_b \int_a^b \Theta_c X w_1 dx - (h_0 w_1 + h_1 w'_1)_b \int_a^b \Theta_c X w_2 dx = 0 \quad (13)$$

che dovrà essere soddisfatta identicamente qualunque sia x , e rimarrà sotto questa forma se w_1 e w_2 non avranno singolarità nel punto b .

Se poi saremo nel caso che uno o tutti e due gli integrali w_1 e w_2 abbiano singolarità anche in b , allora per le condizioni poste in generale nel paragrafo precedente oltre a queste, avremo una o tutte e due le altre

$$\int_a^b \Theta_c X w_1 dx = 0, \quad \int_a^b \Theta_c X w_2 dx = 0,$$

che sono ancora le (11), per modo che quando queste singolarità in b le abbiano ambedue gli integrali w_1 e w_2 avremo queste due condizioni cioè le (11), e allora la (13) verrà soddisfatta da sè qualunque siano le condizioni ai limiti date, mentre se per es. soltanto la w_1 avrà singolarità anche in b avremo la seconda delle (11) e invece della (13) avremo l'altra

$$(h_0 w_2 + h_1 w'_2)_b \int_a^b \Theta_c X w_1 dx = 0, \quad (14)$$

e quindi o dovrà essere soddisfatta anche la prima delle (11), o dovremo avere $(h_0 w_2 + h_1 w'_2)_b = 0$, cioè per l'integrale w_2 che allora non ha singolarità in b dovrà essere soddisfatta la condizione al limite corrispondente.

9. Passiamo ora a considerare il caso di $i = 1$, e supponendo che per es. w_1 sia quello dei due integrali w_1 e w_2 che sarà regolare in a e b qualunque sia z , osserviamo che allora w_2 dovrà necessariamente avere singolarità in uno o in ambedue gli stessi punti a e b ; e noi per essere più chiari, considereremo separatamente questi due casi ammettendo dapprima che w_2 abbia singolarità soltanto in un punto per es. in a , e poi che le abbia in ambedue gli stessi punti a e b .

1.° caso. Essendo ora w_1 regolare in a e in b , e w_2 essendo regolare soltanto in b , la formola (2) ci darà

$$y = w_1 \left(c_1 - \int_a^x \Theta_c X w_2 dx \right) + w_2 \int_a^x \Theta_c X w_1 dx, \quad (15)$$

e la c_1 dovrà essere determinata dalle condizioni ai limiti (8), una almeno delle quali ora supporremo sempre che vi sia perchè, se non vi fosse, questa formola per qualunque funzione intera di z che si prendesse come valore di c_1 darebbe subito un integrale colle particolarità volute.

Ora le dette condizioni ai limiti daranno luogo rispettivamente alle due

$$\left. \begin{aligned} (k_0 w_1 + k_1 w'_1)_a c_1 &= 0, \\ (h_0 w_1 + h_1 w'_1)_b \left(c_1 - \int_a^b \Theta_c X w_2 dx \right) + (h_0 w_2 + h_1 w'_2)_b \int_a^b \Theta_c X w_1 dx &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

che dovranno essere soddisfatte qualunque sia z , e quindi poichè per la prima di queste condizioni, se ci sarà, si potrà sempre prendere $c_1 = 0$ qualunque sia la espressione $(k_0 w_1 + k_1 w'_1)_a$, così quando ci saranno ambedue queste condizioni vi soddisfaremo sempre col prendere $c_1 = 0$ se per qualunque valore di z risulterà soddisfatta identicamente la condizione

$$(h_0 w_2 + h_1 w'_2)_b \int_a^b \Theta_c X w_1 dx - (h_0 w_1 + h_1 w'_1)_b \int_a^b \Theta_c X w_2 dx = 0 \quad (17)$$

alla quale si ridurrà allora la seconda delle precedenti (16), e che combina colla (13); e quando questo avvenga, come quando la condizione al limite b manchi (il che del resto corrisponde a un caso d'identità di questa equazione), l'integrale normale cercato y esisterà effettivamente e sarà dato dalla

formola

$$y = -w_1 \int_a^x \Theta_c X w_2 dx + w_2 \int_a^x \Theta_c X w_1 dx \quad (18)$$

che combina colla (12).

E poichè la condizione (17) sarà sempre soddisfatta identicamente quando lo siano le (11), così anche in questo caso l'essere soddisfatte le dette condizioni (11) porta subito all'esistenza dell'integrale y , vi siano o no le condizioni ai limiti o qualunque esse siano.

Se poi la condizione (17) non sarà identicamente soddisfatta qualunque sia z , ma l'integrale w_1 che noi supponiamo regolare in a e b soddisfarà esso qualunque sia z alla condizione data al limite nel punto a , allora non essendo più necessario di prendere $c_1 = 0$ per soddisfare alla prima delle (16), potremo talvolta soddisfare alla seconda di queste col prendere per c_1 una conveniente funzione intera di z diversa da zero.

In questo caso infatti se sarà nullo il secondo termine

$$(h_0 w_2 + h_1 w'_2)_b \int_a^b \Theta_c X w_1 dx \quad (19)$$

della condizione (16) qualunque sia z , allora si potrà prendere $c_1 = \int_a^b \Theta_c X w_2 dx$,

venendo quindi l'integrale sotto la forma

$$y = -w_1 \int_b^x \Theta_c X w_2 dx + w_2 \int_a^x \Theta_c X w_1 dx; \quad (20)$$

mentre se la stessa espressione (19) non sarà identicamente nulla e al tempo stesso non lo sarà l'altra $(h_0 w_1 + h_1 w'_1)_b$ che figura nel primo termine della seconda della (16) stessa, allora sarà ancora possibile di trovare per c_1 una funzione intera di z che renda identicamente soddisfatta la seconda della (16) tutte le volte che gli infinitesimi a distanza finita che abbia la espressione suddetta $(h_0 w_1 + h_1 w'_1)_b$ si trovino, e almeno allo stesso ordine, anche nella espressione (19); e quando questo avvenga l'integrale normale cercato y sarà quello dato dalla (15) nella quale c_1 abbia per valore la funzione intera di z che risulterà dalla seconda della (16). E in particolare se gli infinitesimi a di-

stanza finita della espressione $(h_0 w_1 + h_1 w'_1)_b$ saranno tutti del prim'ordine, basterà che essi si trovino anche nell'una o nell'altra delle due espressioni

$$(h_0 w_2 + h_1 w'_2)_b \text{ e } \int_a^b \Theta_c X_1 dx w \text{ a un ordine qualsiasi.}$$

Quando poi non essendo identicamente nulla la espressione (19), lo fosse la espressione $(h_0 w_1 + h_1 w'_1)_b$, o se per questa espressione non fosse soddisfatta la condizione ora indicata rispetto ai suoi infinitesimi, allora l'integrale normale cercato y colle condizioni date al limite b non potrebbe esistere per qualunque valore di z . Esso esisterebbe però ancora, e per qualunque valore che si prendesse per c_1 , per quei valori particolari di z che soddisfacessero la seconda delle (16), ma per gli studi che ora facciamo questa particolarità a nulla gioverebbe.

2.° caso. Essendo ora w_1 regolare nei due punti a e b , e w_2 invece avendo singolarità in ambedue questi punti, a_0 dovrà essere infinitesimo nell'uno e nell'altro degli stessi punti, e si avrà ancora la formola (15) come nel caso precedente; e poichè in forza delle condizioni generali che abbiamo

poste nel § 7 dovrà essere $\int_a^b \Theta_c X w_1 dx = 0$ qualunque sia z , nell'ultimo ter-

mine della formola stessa (15) all'integrale \int_a^x potrà anche sostituirsi l'altro \int_b^x .

Ne segue che per le condizioni ai limiti a e b quando vi siano, si avranno ancora le (16), riducendosi però ora la seconda di queste all'altra più semplice

$$(h_0 w_1 + h_1 w'_1)_b \left(c_1 - \int_a^b \Theta_c X w_2 dx \right) = 0,$$

e quindi si avranno ancora, ma con maggiore semplicità, e senza verun caso di eccezione, i risultati stessi del caso precedente, poichè si potrà prendere ancora $c_1 = 0$ qualunque sia la condizione al limite a , se sarà identicamente nulla qualunque sia z la espressione

$$(h_0 w_1 + h_1 w'_1)_b \int_a^b \Theta_c X w_2 dx$$

che è più semplice di quella che figura nel primo membro della condizione (17), e allora l'integrale y sarà dato dalla (18), e se sarà identicamente nulla qua-

lunque sia z la espressione $(k_0 w_1 + k_1 w'_1)_a$ si potrà prendere $c_1 = \int_a^b \Theta_c X w_2 dx$

venendo allora l'integrale sotto la forma (20).

E così in particolare anche in questo caso se saranno soddisfatte ambedue le condizioni (11) esisterà sempre l'integrale normale cercato y e avrà la forma (18) che concorderà anche colla (20), qualunque siano le condizioni date ai limiti che potranno anche non esservi.

10. Passiamo infine a considerare il caso di $i = 2$, e allora osserviamo che venendo ad essere w_1 e w_2 ambedue regolari ai due estremi a e b , la formula (2) si ridurrà alla seguente

$$y = w_1 \left(c_1 - \int_a^x \Theta_c X w_2 dx \right) + w_2 \left(c_2 - \int_a^x \Theta_c X w_1 dx \right), \quad (21)$$

e le condizioni ai limiti a e b quando ci siano porteranno alle formole

$$\left. \begin{aligned} (k_0 w_1 + k_1 w'_1)_a c_1 + (k_0 w_2 + k_1 w'_2)_a c_2 &= 0, \\ (h_0 w_1 + h_1 w'_1)_b c_1 + (h_0 w_2 + h_1 w'_2)_b c_2 &= - (h_0 Y + h_1 Y')_b, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

dove Y è il solito integrale particolare

$$Y = - w_1 \int_a^x \Theta_c X w_2 dx + w_2 \int_a^x \Theta_c X w_1 dx, \quad (23)$$

che si annulla insieme alle derivate prime per $x = a$; e poichè queste formole sono quelle stesse precise che si avevano nella Memoria precedente pel caso allora considerato pel quale si supposeva che α_0 fosse sempre diverso da zero fra a e b e anche agli estremi, e che vi fossero due condizioni ai limiti, così, anche ora che si suppone che α_0 si annulli a uno o a tutti e due gli estremi a e b , se malgrado questo gli integrali w_1 e w_2 saranno regolari a questi estremi qualunque sia z , e si avranno ancora effettivamente due condizioni ai limiti, otterremo gli stessi risultati della Memoria stessa, quando la espressione

$$(k_0 w_1 + k_1 w'_1)_a (h_0 w_2 + h_1 w'_2)_b - (k_0 w_2 + k_1 w'_2)_a (h_0 w_1 + h_1 w'_1)_b \quad (24)$$

non sarà identicamente nulla qualunque sia z , o essendolo non lo saranno contemporaneamente anche le due espressioni

$$(k_0 w_1 + k_1 w'_1)_a \quad \text{e} \quad (k_0 w_2 + k_1 w'_2)_a, \quad (25)$$

o le due

$$(h_0 w_1 + h_1 w'_1)_b \quad \text{e} \quad (h_0 w_2 + h_1 w'_2)_b. \quad (26)$$

Se poi mancherà ad es. la condizione al limite a (ciò che allora non fu supposto), o se essendovi anche questa condizione le due espressioni (25) saranno ambedue identicamente zero (il che ora può ammettersi che possa avvenire perchè a_0 è zero per $x=a$), allora non avremo che la seconda delle condizioni (22), e quindi se una almeno delle espressioni (26) non sarà identicamente nulla qualunque sia z , avuto riguardo al valore (23) di Y si vede subito che per soddisfare alla stessa condizione con valori di c_1 e c_2 che siano funzioni intere di z , basterà prendere

$$c_1 = \int_a^b \Theta_c X w_2 dx - (h_0 w_2 + h_1 w'_2)_b \psi(z),$$

$$c_2 = - \int_a^b \Theta_c X w_1 dx + (h_0 w_1 + h_1 w'_1)_b \psi(z)$$

essendo $\psi(z)$ una funzione intera qualsiasi di z ; e, come ora apparisce ben naturale, risultati simili si avranno se mancherà la condizione al limite b , o se non mancando saranno identicamente nulle qualunque sia z le due espressioni (26) senza che lo siano ambedue le (25), bastando allora di prendere

$$c_1 = - (k_0 w_2 + k_1 w'_2)_a \psi(z),$$

$$c_2 = (h_0 w_1 + h_1 w'_1)_a \psi(z),$$

essendo ancora $\psi(z)$ una funzione intera qualsiasi di z ; come se mancheranno ambedue le condizioni ai limiti a e b , o se saranno identicamente nulle qualunque sia z le quattro espressioni (25) e (26) i valori di c_1 e c_2 rimarranno completamente indeterminati, e potremo prendere per essi funzioni intere qualsiasi di z .

E infine se saranno ancora soddisfatte le condizioni (11), allora avendosi $Y_b = 0$ e $Y'_b = 0$, le due condizioni (22) saranno sempre soddisfatte da $c_1 = 0$ e $c_2 = 0$ e talvolta anche da infiniti altri sistemi di valori di queste quan-

tità c_1 e c_2 che avranno maggiore o minore arbitrarietà a seconda dei valori delle quantità (25) e (26).

11. Riassumiamo ora i risultati qui ottenuti e quelli della Memoria precedente nelle loro parti più notevoli, mettendoli in relazione col teorema già ricordato del § 40 della Memoria stessa, e enunciandoli ora come proprietà della funzione X e degli integrali della equazione omogenea

$$\sum (y, z) = a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \quad (27)$$

quando in questa equazione a_0 si annulla o può annullarsi fra a e b ma soltanto in uno o in tutti e due gli estremi a e b , e il parametro z s'intende ora che figuri soltanto in a_2 , e sia $a_2 = gz + l$, essendo g e l come la X le solite funzioni della sola x continue o no ma finite e atte alla integrazione fra a e b , e delle quali la prima non cambia mai di segno in questo intervallo, e non è d'integrale nullo in nessuna porzione di esso (*).

Inoltre per la equazione data (27) ammettiamo:

A) che w_1 e w_2 siano due suoi integrali fondamentali ottenuti con processi qualsiasi, ma sempre tali che pei valori di x fra a e b (gli estr. al più esclusi) siano funzioni regolari di x fino alle derivate seconde e siano funzioni intere di z , come sono quelli che si ottengono nel solito modo colle solite nostre formole generali;

B) che quando, essendo a_0 infinitesimo in uno o in tutti e due i punti a e b , gli stessi integrali w_1 o w_2 presentino singolarità in questi punti d'infinitesimo di a_0 , gli integrali $\int \Theta_c X w_1 dx$ e $\int \Theta_c X w_2 dx$, estesi agli intornoi (a, x) e (x, b) dei punti stessi, abbiano un significato, e sì essi che i loro prodotti per w_2 e w'_2 , e per w_1 e w'_1 rispettivamente tendano a zero all'impiccolire indefinitamente degli intornoi medesimi come si disse in modo generale al § 7;

C) che quando degli stessi integrali w_1 e w_2 uno almeno, per es. w_2 , abbia singolarità in ambedue gli estremi a e b , allora per l'altro integrale w_1 si abbia $\int_a^b \Theta_c X w_1 dx = 0$ qualunque sia z ;

(*) Non si accenna qui alla condizione che la equazione data (27) si riproduca nella sua aggiunta, perchè essendo del second'ordine si può sempre ridurre a soddisfare a questa condizione moltiplicandola pel fattore $\frac{1}{a_0} e^{\int \frac{a_1}{a_0} dx}$ senza cambiare i suoi integrali.

D) e infine che siano

$$k_0 y_a + k_1 y'_a = 0, \quad \text{e} \quad h_0 y_b + h_1 y'_b = 0$$

le solite equazioni ai limiti a e b , l'una delle quali o anche tutte e due potranno mancare, il che però non sarà ora da noi esplicitamente indicato nei nostri enunciati, intendendo che questi casi, quando si presentino, corrispondano a quelli pei quali k_0 e k_1 insieme, e h_0 e h_1 insieme sono zero.

Con questi dati si potrà ora affermare che:

1.^o Se qualunque sia z , gli integrali w_1 e w_2 sono regolari ai due estremi a e b , essendo o no a_0 infinitesimo in uno o in tutti e due questi estremi, e al tempo stesso:

a) se la espressione

$$(k_0 w_1 + k_1 w'_1)_a (h_0 w_2 + h_1 w'_2)_b - (k_0 w_2 + k_1 w'_2)_a (h_0 w_1 + h_1 w'_1)_b \quad (28)$$

non è identicamente nulla qualunque sia z , e i suoi infinitesimi a distanza finita (quando vi sono) sono tutti del prim'ordine, e per ciascuno α_τ di questi

infinitesimi è sempre zero l'espressione $\int_a^b \Theta_\tau X y dx$, dove y è un integrale della equazione $E(y, \alpha_\tau) = 0$ che al limite b soddisfa alla condizione $h_0 y_b + h_1 y'_b = 0$; o:

b) se essendo la espressione (28) identicamente nulla qualunque sia z , senza che lo siano insieme le due

$$(k_0 w_1 + k_1 w'_1)_a \quad \text{e} \quad (k_0 w_2 + k_1 w'_2)_a, \quad (29)$$

o le due

$$(h_0 w_1 + h_1 w'_1)_b \quad \text{e} \quad (h_0 w_2 + h_1 w'_2)_b, \quad (30)$$

risulti pure identicamente nulla qualunque sia z la espressione $\int_a^b \Theta_\tau X y dx$,

dove y ora è un integrale della equazione $E(y, z) = 0$ che al limite b soddisfa alla condizione $h_0 y_b + h_1 y'_b = 0$, sempre qualunque sia z , o:

c) se sono identicamente nulle qualunque sia z le due espressioni (29) o le due (30) o anche tutte e quattro insieme, o anche infine:

d) se siano zero qualunque sia z gli integrali $\int_a^b \Theta_\tau X w_i dx$ e

$\int_a^b \Theta_c X w_2 dx$, o (il che è lo stesso) sia zero l'altro $\int_a^b \Theta_c X w dx$ per qualsiasi integrale w della equazione $E(y, z) = 0$; allora sarà sempre $X = 0$ per ogni valore di x da a a b (§ 10 e Mem. preced., §§ 35 a 43) (*).

2.º Se qualunque sia z l'integrale w_1 è regolare in a e b , e w_2 lo è soltanto in uno di questi estremi per es. in b , e inoltre:

a) se saranno identicamente nulli qualunque sia z i due soliti integrali (11) cioè $\int_a^b \Theta_c X w_1 dx$ e $\int_a^b \Theta_c X w_2 dx$, o l'altro $\int_a^b \Theta_c X w dx$ per qualsiasi integrale w della $E(y, z) = 0$; o più generalmente:

b) se sarà identicamente nulla qualunque sia z la espressione (17) o

$$(h_0 w_2 + h_1 w'_2)_b \int_a^b \Theta_c X w_1 dx - (h_0 w_1 + h_1 w'_1)_b \int_a^b \Theta_c X w_2 dx, \quad (31)$$

o se lo saranno insieme le due espressioni

$$(k_0 w_1 + k_1 w'_1)_a \quad \text{e} \quad (h_0 w_2 + h_1 w'_2)_b \int_a^b \Theta_c X w_1 dx; \quad (32)$$

o anche:

c) se di queste ultime espressioni la prima $(k_0 w_1 + k_1 w'_1)_a$ sarà identicamente zero qualunque sia z , e le due

$$(h_0 w_1 + h_1 w'_1)_b \quad \text{e} \quad (h_0 w_2 + h_1 w'_2)_b \int_a^b \Theta_c X w_1 dx \quad (33)$$

non lo saranno, ma gli infinitesimi a distanza finita della prima di queste espressioni apparterranno tutti e almeno allo stesso ordine anche alla seconda: allora sarà $X = 0$ per ogni valore di x da a a b (§ 9, 1.º caso).

3.º Se qualunque sia z l'integrale w_1 è regolare in a e in b e w_2 non lo è nè in a nè in b , allora se oltre ad essere nullo qualunque sia z (come già

(*) Poichè non si esclude che X possa essere discontinua fra a e b purchè sempre finita e atta alla integrazione, diciamo una volta per tutte che col dire in questi enunciati che «sarà sempre $X = 0$ per ogni valore di x da a a b » si fa sempre astrazione da una funzione d'integrale nullo alla quale potrebbe anche essere uguale X .

abbiamo ammesso che in questo caso debba essere) l'integrale $\int_a^b \Theta_c X w_1 dx$,

lo sarà anche l'altro $\int_a^b \Theta_c X w_2 dx$, o invece di questo sarà nulla identicamente qualunque sia z l'una o l'altra delle due espressioni

$$(h_0 w_1 + h_1 w'_1)_b, \quad (h_0 w_1 + h_1 w'_1)_a, \quad (34)$$

la funzione X sarà zero per ogni valore di x fra a e b (§ 9, 2.º caso).

4.º Se w_1 e w_2 sono regolari soltanto in uno dei due estremi a e b allora

a) nel caso che questo estremo non sia lo stesso per i due integrali e per es. w_1 sia regolare in a e non in b e w_2 sia regolare in b e non in a , se saranno identicamente nulle le due espressioni

$$(h_0 w_1 + h_1 w'_1)_a \int_a^b \Theta_c X w_2 dx, \quad (h_0 w_2 + h_1 w'_2)_b \int_a^b \Theta_c X w_1 dx, \quad (35)$$

b) e nel caso che l'estremo nel quale i due integrali w_1 e w_2 sono regolari sia lo stesso per tutti e due e sia per es. b se sarà identicamente nulla qualunque sia z la espressione (13) cioè

$$(h_0 w_2 + h_1 w'_2)_b \int_a^b \Theta_c X w_1 dx - (h_0 w_1 + h_1 w'_1)_b \int_a^b \Theta_c X w_2 dx, \quad (36)$$

e così in particolare in ambedue questi casi se saranno nulli identicamente qualunque sia z i due soliti integrali (11) la funzione X sarà ancora zero per qualunque valore di x fra a e b (§ 8, 1.º e 2.º caso).

5.º E nel caso che uno degli stessi integrali w_1 e w_2 per es. w_1 abbia singolarità in ambedue gli estremi a e b e l'altro w_2 le abbia solo in uno di questi estremi per es. in a , allora se avverrà che oltre ad essere identi-

camente nullo (come già sappiamo che dovrà essere) l'integrale $\int_a^b \Theta_c X w_2 dx$, sarà pure identicamente nulla la espressione

$$(h_0 w_2 + h_1 w'_2)_b \int_a^b \Theta_c X w_1 dx,$$

e così anche ora in particolare quando siano identicamente nulli insieme i due integrali (11), la funzione X sarà zero per qualunque valore di x fra a e b (§ 8, 2.º caso).

6.º Infine se w_1 e w_2 avranno entrambi singolarità sì in a che in b , allora quando risultino ancora soddisfatte tutte le condizioni generali poste in principio di questo paragrafo, avendosi di necessità le (11) qualunque sia z , la funzione X sarà pure sempre nulla per tutti i valori di x fra a e b (§ 8, 2.º).

E così, col riprendere in esame tutte le condizioni trovate in questi vari casi, si vede in particolare che si avrà sempre $X=0$ per tutti i valori di x fra a e b quando insieme alle condizioni generali A), B) e C) poste in principio di questo paragrafo, sia soddisfatta l'altra che per qualsiasi integrale w della

nostra equazione (27) si abbia $\int_a^b \Theta_c X w dx = 0$ qualunque sia z ; e ciò indi-

pendentemente dall'esservi o no le condizioni (8) ai limiti a e b , e qualunque siano queste condizioni quando vi sono.

12. Seguendo i processi che abbiamo indicato, studii simili potrebbero farsi per le equazioni di 3.º e 4.º ordine e in generale per quelle di ordine superiore, come si fecero in fine della Memoria precedenté per l'applicazione del teorema del § 40 della Memoria stessa; e dopo per ogni equazione che venisse data basterebbe cercare come si comportano nei punti estremi a e b gli integrali fondamentali dai quali si parte, e tenere conto delle condizioni ai limiti che fossero date per vedere quale dei teoremi che abbiamo dato precedentemente per le equazioni del second'ordine, e di quelli analoghi che potrebbero aversi per le altre equazioni, siano da applicarsi per potere giungere, quando ne sarà il caso, a concludere che deve essere sempre $X=0$ fra a e b .

E per le condizioni ai limiti, nel caso testè ricordato delle equazioni del second'ordine, si può osservare in modo generale che se ad un estremo a o b , o a tutti e due, α_0 sarà zero, allora per l'applicazione del teorema del § 40 della Memoria precedente e quindi anche di quelli del § 11 di questa non occorreranno condizioni al limite o ai limiti corrispondenti, mentre dovranno sempre esservi (sebbene con coefficienti costanti qualunque h o k) al limite o ai limiti stessi quando in essi α_0 non sia zero.

E quando α_0 sia zero ad ambedue gli estremi a e b , per potere concludere che $X=0$ per ogni valore di x in questo intervallo basterà verificare

se siano soddisfatte le condizioni generali poste in principio del § 11, senza curarsi delle condizioni ai limiti che particolari circostanze permettessero di porre, e delle condizioni particolari che nei varii teoremi sarebbero conseguenza di queste condizioni ai limiti, perchè l'integrale corrispondente al caso che non vi siano queste condizioni sarebbe già una funzione intera di z ; mentre se α_0 sarà diverso da zero a uno o a tutti e due gli estremi a e b , allora oltre chè delle condizioni generali poste in principio del § 11 che si avranno sempre, basterà occuparsi di quelle particolari dei teoremi corrispondenti che si riferiscono all'estremo o agli estremi a e b dove α_0 è diverso da zero.

E nel caso delle equazioni di ordine superiore, anche quando α_0 è zero ai due estremi a e b e a fortiori quando non lo è, per quanto si vide in fine della Memoria precedente potrà essere necessario di porre condizioni ai limiti per gli integrali da considerarsi onde potere fare l'applicazione del teorema del § 40 della Memoria stessa, e giungere così a concludere che deve essere sempre $X = 0$ fra a e b .

Tutto questo pel caso delle equazioni del second'ordine apparirà chiaramente dalle applicazioni che faremo al caso di alcune delle stesse equazioni in altra Memoria che pubblicheremo fra breve.

Pisa, Luglio 1910.
