Über affine Geometrie XXX: Die oskulierenden Flächen zweiter Ordnung in der affinen Flächentheorie.

Von

Ludwig Berwald in Prag.

Die Flächen zweiter Ordnung, die eine gegebene krumme, nicht abwickelbare Fläche in einem regulären Punkte oskulieren, haben bisher vornehmlich in der projektiven Flächentheorie einige Anwendung gefunden. Im folgenden wird gezeigt, daß sich mit ihrer Hilfe auch die wichtigsten Begriffe der Affingeometrie der Flächen, wie sie von den Herren G. Pick [1]), W. Blaschke [2]) und J. Radon [3]) entwickelt worden ist, in sehr einfacher Weise erklären lassen.

Das gilt insbesondere von den Affinnormalen der Fläche, von der Affininvariante J, deren identisches Verschwinden die Regelflächen charakterisiert [Nr. 4]; dann aber auch von gewissen inhaltstreu-affinen Maßbegriffen: der Affinentfernung eines Punktes vom orientierten Flächenelement zweiter Ordnung [Nr. 5] und der Affinentfernung zweier Punkte auf einer Tangente der Fläche [Nr. 6]. Endlich wird auch für zwei Begriffe, welche der projektiven und der affinen Flächentheorie gleichmäßig angehören, nämlich für die „tangentes d'osculation quadrique" von G. Darboux (vgl. [10])) und die zu ihnen konjugierten „Tangenten von Segre" (vgl. [13a]) je eine geometrische Definition gegeben [Nr. 4].

1) G. Pick, Über affine Geometrie IV: Differentialinvarianten der Flächen gegenüber affinen Transformationen. Ber. Ges. Lpz. (math.-phys.) **69** (1917), S. 107—136 („A. G. IV.").

2) W. Blaschke, a) Über affine Geometrie V: Kennzeichnende Eigenschaften des Ellipsoids. Ber. Ges. Lpz. (math.-phys.) **69** (1917), S. 166—206 („A. G. V."). b) Über affine Geometrie XII: Von den Eiflächen. Ber. Ges. Lpz. (math.-phys.) **70** (1918), S. 13—37 („A. G. XII.").

3) J. Radon, Über affine Geometrie XVI: Die Grundgleichungen der affinen Flächentheorie. Ber. Ges. Lpz. (math.-phys.) **70** (1918), S. 91—107 („A. G. XVI.").

Bemerkenswert ist es, daß alle genannten Begriffe sich — zum Teil sogar auf verschiedene Arten — mit Hilfe der oskulierenden Flächen zweiter Ordnung *allein* erklären lassen, ohne daß man es nötig hatte, von andersartigen Elementen Gebrauch zu machen. Das gilt auch noch von der affinen Krümmungstheorie (auf die in der folgenden Abhandlung nicht weiter eingegangen wird): denn diese basiert nur auf den projektiven Eigenschaften der Kongruenz der Affinnormalen und auf dem Begriffe der Affinentfernung eines Punktes vom Flächenelement zweiter Ordnung.

Der eben erwähnte prinzipielle Standpunkt ist wenigstens in einer Schlußbemerkung [Nr. 7] zur Geltung gebracht worden. Im übrigen habe ich es vorgezogen, die Darstellung möglichst an die bereits vorliegenden Arbeiten, insbesondere an die grundlegende Abhandlung[3]) des Herrn J. Radon anzuschließen [Nr. 1—3]. Dabei wurde auch je eine geometrische Erklärung des Affinbogenelements und der Affinnormalen mit aufgenommen, die zum Thema in keiner Beziehung stehen [Nr. 1].

1. Affinbogenelement und Affinnormale. — Wir betrachten ein reelles reguläres Flächenstück ohne parabolische Punkte[4]), das auf allgemeine Parameter u, v bezogen ist.

Man erklärt dann, nach G. Pick[1]), W. Blaschke[2a]) und J. Radon[3]), als *quadriertes Affinbogenelement* $d\sigma^2$ der Fläche im Punkte P von den Koordinaten $x_i = x_i(u, v)$, $(i = 1, 2, 3)$ die quadratische Differentialform:

$$(1) \qquad d\sigma^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2 = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{\sqrt[4]{\varepsilon(LN - M^2)}}$$

Hierin ist, in leicht verständlicher Bezeichnungsweise[5]):

$$(2) \qquad L = (x_{uu}\,x_u\,x_v), \qquad M = (x_{uv}\,x_u\,x_v), \qquad N = (x_{vv}\,x_u\,x_v)$$

gesetzt und $\varepsilon = +1$ oder -1 zu nehmen, je nachdem das Flächenstück elliptische $(LN - M^2 > 0)$ oder hyperbolische $(LN - M^2 < 0)$ Krümmung hat. Wir setzen ferner, mit Herrn J. Radon[3]), fest, daß die in (1) auftretende Wurzel stets *positiv* gezogen werden soll. Dadurch wird das Flächenstück *orientiert*, d. h. $d\sigma^2$ wechselt bei einer Parametertransformation mit negativer Transformationsdeterminante das Vorzeichen[6]). Die

---

[4]) Wir sagen dafür weiterhin in der Regel einfach „Fläche". Ebenso ist immer „Punkt" gleich eigentlicher Punkt, und, wo sich nicht aus dem Zusammenhange das Gegenteil ergibt, gleich reeller eigentlicher Punkt.

[5]) $(abc) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$; $x_u = \frac{\partial x}{\partial u}$, $x_v = \frac{\partial x}{\partial v}$, $x_{uu} = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}$ usw. x bezeichnet dabei den Vektor des Punktes von den Koordinaten x_1, x_2, x_3.

[6]) Nr. 1—6 bezieht sich daher durchaus auf Parametersysteme, die aus einem fest gewählten durch „eigentliche" Parametertransformation (Determinante positiv) hervorgehen.

Differentialform (1) ist jetzt im Falle elliptischer Krümmung der Fläche definit, im Falle hyperbolischer Krümmung indefinit.

Weiter bezeichnen wir als Affinnormalvektor x^* der Fläche[7]) im Punkte P den Vektor

$$x^* = -\tilde{x} = \frac{1}{2}\Delta_2 x, \tag{3}$$

wenn Δ_2 der zweite Beltramische Differentialparameter der quadratischen Differentialform (1) ist. Die Gerade durch P parallel zum Vektor (3) heißt die *Affinnormale*[8]) der Fläche im Punkte P; den Punkt, dessen Vektor $x + x^*$ ist, nennen wir den *Einheitspunkt* der Affinnormalen, die Ebene durch diesen Einheitspunkt parallel zur Tangentenebene der Fläche in P die *Einheitsebene*. Der Affinnormalvektor liegt nicht in der Tangentenebene der Fläche. Es besteht vielmehr die Identität:

$$(x^* x_u x_v) = \sqrt[4]{\varepsilon(LN - M^2)} = \sqrt{\varepsilon(eg - f^2)}. \tag{4}$$

Die zweite in (4) auftretende Wurzel ist dabei durch die erste erklärt.

Das Affinbogenelement gestattet die folgende geometrische Erklärung, die freilich nur für hyperbolisch gekrümmte Flächen reell ausfällt:

Man betrachte auf der Fläche zwei Nachbarpunkte $P(u, v)$ und $P'(u + du, v + dv)$, und lege durch jeden von ihnen die beiden Asymptotenlinien. Die Asymptotenlinie der einen (anderen) Schar[9]) *durch P schneide die der zweiten (ersten) Schar durch P' in einem Punkte P'' (P'''). Dann ist die achte Potenz des Affinbogenelementes PP', abgesehen von infinitesimalen Größen neunter und höherer Ordnung, gleich dem quadrierten Inhalt des Tetraeders $PP'P''P'''$, multipliziert mit $-3^2 \cdot 2^6 \cdot \varepsilon$.*

Auf das Tetraeder $PP'P''P'''$ läßt sich auch eine anscheinend neue Definition der Affinnormalen gründen:

Bezeichnet S den Schwerpunkt der vier (mit gleichen Massen belegten) Punkte P, P', P'', P''', und H den Schwerpunkt von P'' und *P''', so geht die Gerade HS, wenn man den Punkt P' in den Punkt P hineinrücken läßt, in der Grenze in die Affinnormale der Fläche im Punkte P über*[9a]).

[7]) Vgl. W. Blaschke, A. G. V., S. 181, wo zuerst der Vektor x^* eingeführt wird und A. G. XII., S. 20.

[8]) Vgl. z. B. G. Pick, A. G. IV., S. 127 ff.

[9]) Die beiden Scharen von Asymptotenlinien werden nicht als in eine bestimmte Reihenfolge gesetzt gedacht. Deshalb tritt weiter unten das Quadrat des Tetraederinhaltes auf, nicht dieser selbst.

[9a]) An Stelle des Punktes S kann man in der obigen Definition der Affinnormalen natürlich auch den Schwerpunkt H' von P und P' benutzen; eine Bemerkung, die ich Herrn G. Pick verdanke.

Vorausgesetzt ist dabei, daß das Element PP' keiner Asymptotenlinie der Fläche angehört.

2. Die kubische Fundamentalform. — Die affine Flächentheorie läßt sich auffassen als Theorie der simultanen invarianten Bildungen der quadratischen Differentialform (1) und einer kubischen Differentialform, die zuerst von Herrn G. Pick[1]) eingeführt worden ist. Wir erklären diese „kubische Fundamentalform"

$$(5) \qquad \psi = A\,du^3 + 3B\,du^2 dv + 3C\,du\,dv^2 + D\,dv^3$$

mit Herrn J. Radon[3]) durch:

$$(5') \qquad \psi = \frac{(d^3x\,x_u\,x_v)}{\sqrt[4]{\varepsilon(LN-M^2)}} - \frac{3}{2}d(e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2).$$

Sie ist zur Differentialform (1) apolar:

$$(6) \qquad \begin{cases} Ag - 2Bf + Ce = 0, \\ Bg - 2Cf + De = 0. \end{cases}$$

Daher besitzen $d\sigma^2$ und ψ nur eine absolute Invariante:

$$(7) \qquad J = \frac{1}{(eg-f^2)^2}\begin{vmatrix} A & B & C \\ B & C & D \\ e & f & g \end{vmatrix} = \frac{2}{e}\,\frac{AC-B^2}{eg-f^2} = \frac{1}{f}\,\frac{AD-BC}{eg-f^2} = \frac{2}{g}\,\frac{BD-C^2}{eg-f^2}.$$

Wegen der Apolarität ist ferner die Diskriminante R von ψ durch:

$$(8) \qquad R = J^2(eg-f^2)^3$$

gegeben.

Wenn im betrachteten Punkte P der Fläche $J \neq 0$ ist, so definiert die Gleichung $\psi = 0$ drei getrennte, von P ausgehende, mit der Fläche *projektiv*-kovariant verbundene Tangenten der Fläche, die als „tangentes d'osculation quadrique" zuerst bei G. Darboux[10]) auftreten und deshalb *die Tangenten von Darboux* heißen sollen. Sie fallen dann und nur dann zusammen, und zwar in eine Asymptote der Fläche im Punkte P, wenn dort $J = 0$ ist und ψ nicht in P identisch verschwindet. Diese Asymptote besitzt dann, wie aus dem Folgenden ersichtlich ist, eine mehr als dreipunktige Berührung mit der Fläche. Wenn ψ an der Stelle P identisch verschwindet, so werden die Tangenten von Darboux unbestimmt, und beide Asymptoten der Fläche berühren diese dort mehr als dreipunktig. J ist also beständig Null für die Regelflächen (und nur für sie), ψ ebenso für die Flächen zweiter Ordnung, wie übrigens bekannt ist.

[10]) G. Darboux, Sur le contact des courbes et des surfaces. Bull. sc. math. astr. (2) **4** (1880), S. 348—384, auf S. 357f. — Eine affin-invariante Erklärung hat Verf. gegeben: L. Berwald, Über affine Geometrie XXVII. Liesche F_2, Affinnormale und mittlere Affinkrümmung. Math. Zeitschr. **8** (1920), S. 63—78, insbes. S. 68.

3. Kanonische Entwicklung der Fläche in der Umgebung eines ihrer Punkte. — Herr G. Pick[11]) hat die folgenden, gegenüber inhaltstreuen Affinitäten kanonischen Entwicklungen einer Fläche in der Umgebung eines ihrer Punkte P angegeben:

$$(9)\qquad \begin{cases} \text{(a)} & x_3 = \frac{1}{2}(x_1^2 + \varepsilon x_2^2) + \frac{K}{6}(x_1^3 - 3\varepsilon x_1 x_2^2) + [4] + \dots, \\ \text{(b)} & x_3 = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2) + \frac{1}{6}(x_1 + x_2)^3 + [4] + \dots, \\ \text{(c)} & x_3 = \frac{1}{2}(x_1^2 + \varepsilon x_2^2) + \quad * \quad + [4] + \dots \;^{12)} \end{cases}$$

($\varepsilon^2 = 1$, $K = \text{const} \neq 0$). Durch $[4]$ sind in (9) die Glieder vierter Ordnung angedeutet. (9c) entsteht aus (9a) für $K = 0$. Die erste (zweite, dritte) der Entwicklungen (9) gilt in der Umgebung eines Flächenpunktes, in dem keine (eine, jede) Asymptote der Fläche mit ihr eine mehr als dreipunktige Berührung hat. In sämtlichen Entwicklungen (9) ist der Punkt P, dessen Umgebung betrachtet wird, Anfangspunkt des (Parallel-) Koordinatensystems x_1, x_2, x_3, die zugehörige Tangentenebene der Fläche $x_1 x_2$-Ebene. Endlich hat die Größe ε, hier und weiterhin, die in Nr. 1 festgesetzte Bedeutung.

Wenn die Fläche in einer der kanonischen Entwicklungen vorliegt, so nehmen die in Nr. 1 und 2 eingeführten Größen im Punkte P folgende Werte an:

$$(1^*)\qquad d\sigma^2 = dx_1^2 + \varepsilon\, dx_2^2,$$

$$(5\text{a}^*)\quad \psi = -\frac{K}{2}(dx_1^3 - 3\varepsilon\, dx_1\, dx_2^2), \qquad (5\text{b}^*)\quad \psi = -\frac{1}{2}(dx_1 + dx_2)^3,$$

$$(5\text{c}^*)\quad \psi = 0$$

und

$$(7\text{a}^*)\quad J = -\frac{1}{2}K^2, \qquad (7\text{b, c}^*)\quad J = 0.$$

Dabei bedeuten die Zeiger a, b, c bei den Nummern der Formeln, daß die betreffende Gleichung beziehungsweise für die Entwicklung (9a), (9b) oder (9c) gilt.

4. Erklärung der Tangenten von Darboux und Segre, der Affinnormalen und der Affininvariante J mittels der oskulierenden Flächen zweiter Ordnung. — Wir führen nunmehr die ∞^3 unsere Fläche im betrachteten Punkte P oskulierenden Flächen zweiter Ordnung ein, d. h. diejenigen, deren Schnittkurve mit der Fläche dort einen (mindestens)

[11]) A. G. IV, S. 124 ff.

[12]) Hier ist a. a. O.[11]) der Fall (c) mit $\varepsilon = 1$, der bei den elliptisch gekrümmten Flächen zweiter Ordnung (ohne singulären Punkt) an jeder Stelle besteht, nicht ausdrücklich angeführt.

dreifachen Punkt hat. Die Gleichung einer beliebigen unter ihnen lautet, für jede der Entwicklungen (9):

$$2x_3 = x_1^2 + \varepsilon x_2^2 - 2c_1 x_1 x_3 - 2c_2 x_2 x_3 + c_3 x_3^2, \tag{10}$$

wo c_1, c_2, c_3 willkürliche Konstanten bedeuten Der Mittelpunkt der Fläche (10) hat, wofern er eigentlich ist $(c_3 \neq c_1^2 + c_2^2 \cdot \varepsilon)$, die Koordinaten:

$$m_1 = \frac{c_1}{c_3 - c_1^2 - c_2^2\,\varepsilon}, \qquad m_2 = \frac{c_2\,\varepsilon}{c_3 - c_1^2 - c_2^2\,\varepsilon}, \qquad m_3 = \frac{1}{c_3 - c_1^2 - c_2^2\,\varepsilon}, \tag{11}$$

ihr absolut genommenes quadriertes Halbachsenprodukt[13]) den Wert:

$$a^2 b^2 c^2 = \frac{1}{(c_3 - c_1^2 - c_2^2\,\varepsilon)^4} = m_3^4. \tag{12}$$

(11) besagt u. a., daß die Gerade, welche den Mittelpunkt einer in P oskulierenden Fläche zweiter Ordnung mit P verbindet, nur von den Verhältnissen $c_1 : c_2\varepsilon : 1$, nicht aber von der Konstanten c_3 abhängt. —

Bereits G. Darboux[10]) hat die oskulierenden Flächen zweiter Ordnung zur Definition der „tangentes d'osculation quadrique" herangezogen. Wir geben hier für die Tangenten von Darboux eine andere, anscheinend noch nirgends ausdrücklich ausgesprochene[13a]), projektiv-invariante Erklärung, an die sich unmittelbar eine neue Erklärung der Affinnormalen anschließt.

Dabei beschränken wir uns zunächst auf den Fall, daß *in der Umgebung des Punktes P die kanonische Entwicklung* (9a) *oder* (9b) *gilt.* Sei $\mathfrak{C}$ die Schnittkurve der gegebenen Fläche mit einer in P oskulierenden Fläche zweiter Ordnung. *Das Tangententripel der Kurve $\mathfrak{C}$ in ihrem dreifachen Punkte P liegt dann und nur dann zu den Asymptoten dieses Punktes apolar, wenn es mit dem Tangententripel von Darboux identisch ist. Die zugehörigen ∞^1 oskulierenden Flächen zweiter Ordnung haben ihre Mittelpunkte auf der Affinnormalen der Fläche im Punkte P.*

---

13) Wir nennen quadriertes Halbachsenprodukt einer reellen F_2 mit eigentlichem Mittelpunkt die rationale inhaltstreu-affine absolute Invariante $\mathfrak{J} = -\frac{|a_{11}\,a_{22}\,a_{33}\,a_{44}|^3}{|a_{11}\,a_{22}\,a_{33}|^4}$ wenn die a_{ik} die Koeffizienten der Gleichung der F_2 bedeuten. Im Texte ist die Gleichung der F_2, die hier immer singularitätenfrei ist und reelle Punkte besitzt, auf die Form:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{\vartheta b^2} + \frac{x_3^2}{\eta c^2} = 1 \qquad (\vartheta^2 = \eta^2 = 1)$$

gebracht gedacht. Dann ist, wie man leicht überlegt, $\mathfrak{J} = \varepsilon a^2 b^2 c^2$

13a) Implicite ist diese Erklärung im wesentlichen schon in einer Note des Herrn C. Segre enthalten (Complementi alla teoria delle tangenti coniugate di una superficie. Rend. Acc. Lincei (5) **17**[II] (1908), S 405—412, insbes. S. 410f.).

Zu diesen Flächen zweiter Ordnung gehört u. a. auch die sogenannte Liesche F_2 des Punktes P. Die vorstehende Erklärung der Affinnormalen verallgemeinert daher eine vom Verfasser an anderer Stelle[10]) ausgesprochene.

Der Beweis für die aufgestellten Behauptungen läßt sich leicht führen. Die drei Tangenten der Schnittkurve $\mathfrak{C}$ der Fläche (9a) bzw. (9b) mit der oskulierenden Fläche zweiter Ordnung (10) im Punkte P genügen den Gleichungen:

$$(13\text{a})\qquad x_3 = 0, \qquad \frac{K}{6}(x_1^3 - 3\varepsilon x_1 x_2^2) + \frac{1}{2}(c_1 x_1 + c_2 x_2)(x_1^2 + \varepsilon x_2^2) = 0,$$

bzw.

$$(13\text{b})\qquad x_3 = 0, \qquad \frac{1}{6}(x_1 + x_2)^3 + \frac{1}{2}(c_1 x_1 + c_2 x_2)(x_1^2 - x_2^2) = 0.$$

(13a) sowie (13b) — und ebenso die Glieder 3. Ordnung weiter unten in (15) — hängen nur von c_1 und c_2 ab. Die in P (gerade) oskulierenden Flächen zweiter Ordnung, deren Schnittkurven mit der gegebenen Fläche dort ein und dasselbe Tangententripel besitzen, bilden daher ein Büschel. Ihre Mittelpunkte erfüllen eine (nicht in der Tangentenebene von P liegende) Gerade durch P.

Die Konstanten c_1, c_2 bestimmen wir jetzt so, daß diese Tangenten (13a, b) apolar zu den Asymptoten

$$(14)\qquad x_3 = 0, \qquad x_1^2 + \varepsilon x_2^2 = 0$$

des Punktes P liegen. Es ergibt sich $c_1 = c_2 = 0$. Aus (13a, b), (5a, b*) und (11) folgen nunmehr unmittelbar die beiden Behauptungen.

Die vorstehende Rechnung ist wesentlich dieselbe, welche Herr G. Pick[14]) bei der Ableitung der Entwicklung (9a) durchgeführt hat. Unsere Erklärungen sind also im Grunde nichts anderes, als eine geometrische Deutung jener Rechnung. An der Auffindung dieser Deutung ist Herr P. Funk mitbeteiligt.

Wenn im Punkte P die Entwicklung (5c) *gilt*, so sind, wie schon bemerkt, die Tangenten von Darboux unbestimmt. *Unter den die gegebene Fläche im Punkte P oskulierenden Flächen zweiter Ordnung existieren dann ∞^1 hyperoskulierende. Der Ort ihrer Mittelpunkte ist die Affinnormale der Fläche in P.*

In der Tat lautet die Gleichung des Zylinders, der die Schnittkurve der Flächen (9c) und (10) parallel zur x_3-Achse projiziert, nach Potenzen von x_1 und x_2 geordnet, folgendermaßen:

$$(15)\qquad 0 = \frac{1}{2}(c_1 x_1 + c_2 x_2)(x_1^2 + \varepsilon x_2^2) + \left\{[4] - \frac{c_3}{8}(x_1^2 + \varepsilon x_2^2)^2\right\} + \dots .$$

[14]) A. G. IV., S. 126.

[4] bedeutet darin die Glieder vierter Ordnung in der Entwicklung (9c). Die Schnittkurve C hat also im Anfangspunkt P einen dreifachen Punkt, solange wenigstens eine der beiden Konstanten c_1 und c_2 von Null verschieden ist; im Falle $c_1 = c_2 = 0$ aber einen vierfachen Punkt. Die zugehörigen „hyperoskulierenden" Flächen zweiter Ordnung (und nur diese) haben nach (11) ihren Mittelpunkt auf der Affinnormalen der Fläche im Punkte P. —

Auch die Affininvariante J gestattet eine geometrische Erklärung mittels der oskulierenden Flächen zweiter Ordnung:

Ist die kubische Fundamentalform ψ an der betrachteten Stelle P nicht identisch Null, so gibt es drei — getrennte oder in eines zusammenfallende — Büschel von Flächen zweiter Ordnung, welche die gegebene Fläche in P oskulieren, und deren Schnittkurve mit der Fläche dort eine dreifache Tangente hat (die dann notwendig eine Tangente von Darboux ist) [10]*). Die Mittelpunkte der F_2 des k-ten Büschels erfüllen eine Gerade g_k $(k = 1, 2, 3)$. Bringt man die drei Geraden g_1, g_2, g_3 zum Schnitte mit der Einheitsebene, und sind $y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)}$ die Schnittpunkte, so ist J^2 gleich $\frac{4\varepsilon}{3}$ mal dem quadrierten Inhalt des Tetraeders $(P, y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)})$.*

Auch diese Behauptung ist leicht zu beweisen.

Die drei Tangenten (13a) fallen dann und nur dann alle zusammen, wenn die drei Bedingungen erfüllt sind:

$$(16) \qquad \begin{cases} (K + 3c_1)(K - c_1)\varepsilon - c_2^2 = 0, \\ (K - c_1)^2 \cdot \varepsilon - 3c_2^2 = 0, \\ \qquad c_2(K + 2c_1) = 0, \end{cases}$$

von denen jede eine Folge der beiden andern ist. Das gibt die drei Wertepaare:

$$(17) \qquad c_1 = K, \quad c_2 = 0; \quad c_1 = -\frac{1}{2}K, \quad c_2 = \frac{1}{2}K\sqrt{3\varepsilon}; \\ c_1 = -\frac{1}{2}K, \quad c_2 = -\frac{1}{2}K\sqrt{3\varepsilon}$$

für die in (10) auftretenden Konstanten c_1, c_2. Vermöge (11) erhält man hieraus als Koordinaten der Punkte $y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)}$:

$$(18) \quad K, \;\; 0, \;\; 1; \quad -\frac{1}{2}K, \;\; \frac{1}{2}K\varepsilon\sqrt{3\varepsilon}, \;\; 1; \quad -\frac{1}{2}K, \;\; -\frac{1}{2}K\varepsilon\sqrt{3\varepsilon},$$

und als Inhalt T des Tetraeders $(P, y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)})$:

$$(19) \qquad T = \frac{1}{4}K^2\varepsilon\sqrt{3\varepsilon} = -\frac{1}{2}J\varepsilon\sqrt{3\varepsilon}.$$

In gleicher Weise ergeben die Bedingungen für das Zusammenfallen der drei Tangenten (13b) $c_1 = c_2 = 0$. Dieser Fall ist als Grenzfall des vorigen aufzufassen: Die drei Geraden g_1, g_2, g_3 sind jetzt sämtlich mit der Affinnormalen von P identisch, die Punkte $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, $y^{(3)}$ mit deren Einheitspunkt; J ist Null.

Für den Fall $J = 0$ ($\psi \not\equiv 0$) liegt in dem soeben Gesagten eine Erklärung der Affinnormalen, die mit der weiter oben gegebenen identisch ist. Dagegen kann man im Falle $J \neq 0$ durch die letzte Betrachtung auf neuem Wege zur Affinnormalen der Fläche im Punkte P gelangen:

Zunächst *ist die Affinnormale des Punktes P Ort der Schwerpunkte aller Dreiecke, deren Ebenen zur Tangentenebene der Fläche in P parallel sind, und deren Eckpunkte auf den Geraden g_1, g_2, g_3 liegen.*

Ferner *schneiden sich die drei im Punkte P oskulierenden Flächen zweiter Ordnung, deren Mittelpunkte die Eckpunkte eines solchen Dreieckes sind, noch in einem zweiten Punkte R. Die Gerade PR ist die Affinnormale der gegebenen Fläche in P.*

Je zwei solche oskulierende Flächen zweiter Ordnung haben — außer den Asymptoten des Punktes P — einen Kegelschnitt durch P gemeinsam. Die Ebenen der drei so erhaltenen Kegelschnitte (die sämtlich durch die Affinnormale von P laufen) durchdringen die Ebene irgendeines der oben erwähnten Dreiecke in dessen Schwerlinien, und die Tangentenebene der Fläche in P in den drei Tangenten, die zu den Tangenten von Darboux konjugiert sind[15]). *Diese „Tangenten von Segre" sind demnach die Projektionen der Geraden g_k ($k = 1, 2, 3$) parallel zur Affinnormalen des Punktes P in seine Tangentenebene.*

In den betrachteten drei Büscheln von oskulierenden Flächen zweiter Ordnung sind auch drei Paraboloide enthalten, die alle zu demselben Werte $c_3 = K^2 = -2J$ der in (10) auftretenden Konstanten c_3 gehören. Ihr zweiter gemeinsamer Punkt $(0, 0, -\frac{1}{J})$ liegt gleichfalls auf der Affinnormalen des Punktes P. Seine dritte Koordinate kann man als Abstandsverhältnis oder als Affinentfernung vom orientierten Flächenelement zweiter

---

[15]) Diese Tangenten sind zuerst von Herrn C. Segre, a. a. O.[13a]) betrachtet worden. Vgl. auch G. M. Green, On certain projective generalizations of metric theorems, and the curves of Darboux and Segre. Proc. National Acad. of sciences **4** (1918), S. 346—349; Memoir on the general theory of surfaces and rectilinear congruences. Trans. Amer. Math. Soc. **20** (1919), S. 79—153, insbesondere S. 140ff. — Eine andere affin-invariante Erklärung dieser Tangenten bei W. Blaschke, Über affine Geometrie. XXII: Bestimmung der Flächen mit zentrischen ebenen Schnitten. Ber. Ges. Lpz. (math.-phys.) **70** (1918), S. 336—338

Ordnung in P [Nr. 5] deuten, und hat damit eine Erklärung von $-\frac{1}{J}$ bzw. J[16]).

5. Affinentfernung eines Punktes vom orientierten Flächenelement zweiter Ordnung. — Herr G. Pick[1]) hat als erster für einen beliebigen Punkt Q des Raumes eine vom Flächenelement zweiter Ordnung in P abhängende kovariante Koordinate eingeführt, die Herr W. Blaschke[2a]) geometrisch gedeutet und die *Affinentfernung des Punktes Q vom Element zweiter Ordnung der Fläche* an der Stelle P genannt hat. Wie bezeichnen sie mit (P, Q). Wenn x der Vektor des Punktes P, y der des Punktes Q ist, so hat man, in allgemeinen Parametern u, v:

$$(P, Q) = \frac{(y - x \quad x_u \quad x_v)}{\sqrt{\varepsilon(eg - f^2)}}. \tag{20}$$

Unter unseren Festsetzungen über die Wurzelgröße [Nr. 1] stellt (20) die Affinentfernung des Punktes Q vom *orientierten* Flächenelement zweiter Ordnung in P dar.

Geometrisch läßt sich nun die Affinentfernung (P, Q) auch folgendermaßen erklären:

Die Affinentfernung eines Punktes Q vom orientierten Flächenelement zweiter Ordnung in P ist gleich der vierten Wurzel aus dem absoluten Werte des quadrierten Halbachsenproduktes der Fläche zweiter Ordnung, die den Punkt Q zum Mittelpunkte hat, und die gegebene Fläche in P oskuliert. Diese Wurzel ist positiv oder negativ zu ziehen, je nachdem der Punkt Q auf derselben Seite der Tangentenebene in P liegt, wie der Einheitspunkt der Affinnormalen, oder auf der entgegengesetzten.

Zum Beweise benutzen wir wieder die kanonischen Entwicklungen (9) der Fläche in der Umgebung des Punktes P. Dieser Punkt ist dann also Anfangspunkt des Koordinatensystems; ferner ist für u, v bezüglich x_1, x_2 zu setzen. Das quadrierte Affinbogenelement im Punkte P hat jetzt den Wert (1*). Man erhält daher aus (20) für die Affinentfernung (P, Q):

$$(P, Q) = y_3. \tag{20*}$$

Nach (12) ist das absolut genommene quadrierte Halbachsenprodukt $a^2 b^2 c^2$ der oskulierenden Fläche zweiter Ordnung mit dem Mittelpunkte in Q gleich y_3^4. Man kann also festsetzen, daß:

---

[16]) Wir bemerken schließlich noch Folgendes: Die in P oskulierende Fläche zweiter Ordnung, welche die uneigentlichen Punkte der drei Geraden g_k $(k = 1, 2, 3)$ enthält, hat den Mittelpunkt $\left(0, 0, \frac{1}{2J}\right)$. Ihr absolut genommenes quadriertes Halbaxenprodukt ist daher $\frac{1}{16 J^4}$.

$$(12^*) \qquad \sqrt[3]{a^2 b^2 c^2} - \sqrt{abc} = y_3$$

sein soll. Da der Einheitspunkt der Affinnormalen nach (20) und (4) die Affinentfernung Eins vom Elemente zweiter Ordnung der Fläche an der Stelle P hat, ist damit die Richtigkeit der obigen Behauptung nachgewiesen.

6. Der Einheitspunkt der Tangente einer Flächenkurve. — Wir machen schließlich von den oskulierenden Flächen zweiter Ordnung noch eine Anwendung auf die Flächenkurven.

Betrachten wir irgendeine Kurve auf der Fläche, die durch P und einen Nachbarpunkt P' geht[17]). Dann gibt, wie schon Herr W. Blaschke[18]) gezeigt hat, (20) für die Affinentfernung (P, P') bis auf infinitesimale Größen von mindestens dritter Ordnung den Wert:

$$(22) \qquad (P, P') = \frac{1}{2}(e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2) = \frac{1}{2}\,d\sigma^2.$$

Wenn also der Punkt P' auf derselben (auf der entgegengesetzten) Seite der Tangentenebene in P liegt, wie der Einheitspunkt der Affinnormalen, so ist $d\sigma^2$ positiv (negativ), und man kann daher die Kurve in der Umgebung von P in reeller Weise orientieren, indem man sich für einen der beiden reellen Werte von $\frac{dx}{d\sigma}$ $(i\frac{dx}{d\sigma};\; i^2 = -1)$ entscheidet. Um Weitläufigkeiten zu vermeiden, wollen wir annehmen, *daß die betrachtete Kurve in der Umgebung des Punktes P jenem Bereich der Fläche angehört, in dem $d\sigma^2 > 0$ ist.* Es ist nicht schwer einzusehen, wie die Betrachtung in dem hiermit ausgeschlossenen Fall $(\varepsilon = -1,\; d\sigma^2 < 0)$ zu modifizieren ist[19]).

Die (auf die angegebene Weise affin-orientierte) Kurve sei auf den Affinbogen σ als unabhängige Veränderliche bezogen. Dann nennen wir den Punkt E auf der Kurventangente, dessen Vektor $x + \frac{dx}{d\sigma}$ ist (wo $\frac{dx}{d\sigma}$ den Wert im Punkte P bedeutet), den *Einheitspunkt der (orientierten) Kurventangente.*

Für diesen Punkt läßt sich eine einfache Konstruktion angeben. Dazu betrachten wir die Fläche zweiter Ordnung, welche die gegebene Fläche im Punkte P oskuliert und den Einheitspunkt der Affinnormalen von P zum Mittelpunkte hat. Sie ist durch (10) mit $c_1 = c_2 = 0,\; c_3 = 1$ ge-

[17]) Die Kurve sei reell, besitze überall eine Tangente, deren Richtung sich von Punkt zu Punkt stetig ändert, und habe in P einen regulären Punkt, dessen Tangente von den Asymptoten der Fläche in P verschieden ist. Insbesondere darf sie auch eine Gerade sein.

[18]) A. G. V., S. 180.

[19]) Vgl. auch weiter unten im Texte.

geben[20]). Die Schnittkurve dieser F_2 mit der Einheitsebene projizieren wir parallel zur Affinnormalen des Punktes P in seine Tangentenebene. Die projizierte Kurve hat die Gleichungen

$$(23) \qquad z_1^2 + \varepsilon z_2^2 = 1, \qquad z_3 = 0,$$

ist also ein Kegelschnitt vom Mittelpunkte P, dessen Asymptoten die Asymptoten der Fläche in P sind. Wegen (1^*) liegt dann der Punkt E auf dieser Projektion, ist also ihr Schnittpunkt mit dem positiven Tangentenspeer.

Im hyperbolischen Falle ($\varepsilon = -1$) ist der Einheitspunkt auf der zur Tangente der betrachteten Kurve konjugierten Flächentangente imaginär. Man wird daher statt dieses Einheitspunktes zweckmäßig den Schnittpunkt E' der orientierten konjugierten Tangente mit der zur Hyperbel (23) konjugierten Hyperbel betrachten. Diese läßt sich in analoger Weise wie die Hyperbel (23) mittels der oskulierenden F_2 erhalten, deren Mittelpunkt den Vektor $x - x^*$ hat. —

Durch Festlegung des Einheitspunktes auf jeder Kurventangente ist auf dieser ein affines Längenmaß gegeben: der Punkt, dessen Vektor $x + \lambda_1 \frac{dx}{d\sigma}$ ist, hat vom Punkte mit dem Vektor $x + \lambda_2 \frac{dx}{d\sigma}$ die Affinentfernung $\lambda_1 - \lambda_2$[21]).

7. Schlußbemerkung. Wir haben im vorhergehenden den Vortrag so eingerichtet, daß wir die in Rede stehenden Begriffe der affinen Flächentheorie zuerst rein analytisch einführten, und sodann auf Grund der analytischen Definition mit Hilfe der oskulierenden Flächen zweiter Ordnung geometrische Erklärungen für sie gaben.

Ein Teil jener Begriffe (Tangenten von Darboux und Segre, Affinnormale) kann, wie man unmittelbar einsieht, nach Nr. 4 *ohne weiteres* eingeführt werden. Aber auch die Einführung der übrigen Begriffe (Affinentfernung eines Punktes Q vom Flächenelement zweiter Ordnung in P, Einheitsebene, Einheitspunkt der Affinnormalen, Einheitspunkt der Tangente

[20]) An Stelle der von uns verwendeten oskulierenden Fläche zweiter Ordnung kann man auch, unter leichter Abänderung des Verfahrens, das in P oskulierende Paraboloid benutzen, das die Affinnormale des Punktes P zum Durchmesser hat.

[21]) Schneidet man die im Punkte P oskulierende F_2, deren Mittelpunkt Z auf der Affinnormalen von P in der positiven Affinentfernung a^2 vom orientierten Flächenelement zweiter Ordnung in P liegt, mit einer Parallelebene durch Z zur Einheitsebene, und projiziert die Schnittkurve parallel zur Affinnormalen in die Tangentenebene von P, so hat die Projektion die Gleichungen:

$$(23') \qquad z_1^2 + \varepsilon z_2^2 = a^2, \qquad z_3 = 0.$$

Ihr Schnittpunkt mit dem positiven Tangentenspeer hat daher die Affinentfernung a vom Punkte P.

einer Flächenkurve) kann ohne Bezug auf eine vorausgehende analytische *Definition* geschehen, wenn man folgendermaßen verfährt:

Man erklärt zunächst bei elliptisch gekrümmten Flächen etwa die hohle Seite (bei Eiflächen also das Innere), bei hyperbolisch gekrümmten aber eine beliebige Seite als die *positive* Seite der Fläche. Hierdurch wird das betrachtete Flächenstück orientiert. Sodann führt man die Affinentfernung eines beliebigen Punktes Q vom orientierten Flächenelement zweiter Ordnung in P durch die in Nr. 5 gegebene geometrische Erklärung ein, die nur dahin abzuändern ist, daß man die dort auftretende Wurzel positiv oder negativ zu ziehen hat, je nachdem Q auf der positiven oder negativen Seite der Fläche liegt. Die Ortsebene aller Punkte Q, die vom orientierten Flächenelement zweiter Ordnung in P die Affinentfernung Eins haben, ist jetzt als Einheitsebene zu bezeichnen, ihr Schnittpunkt mit der Affinnormalen von P als Einheitspunkt der Affinnormalen[22]. Mit Hilfe dieser Begriffe *lassen sich endlich nach Nr. 4 und 6 die noch übrigen* erklären.

Prag, den 26. Juni 1920.

[22]) Die so erhaltene Definition der Einheitsebene und des Einheitspunktes der Affinnormalen stimmt nicht notwendig mit der in Nr. 1 gegebenen überein.

(Eingegangen am 8. Juli 1920.)