Ueber Relationen zwischen Classenanzahlen binärer quadratischer Formen von negativer Determinante.

Von

Adolf Hurwitz in Königsberg i. Pr.

Die beiden Abhandlungen, welche ich hier veröffentliche, stehen in engstem Zusammenhange mit den unter gleichem Titel erschienenen Arbeiten des Herrn Gierster.*) Für die in diesen Arbeiten niedergelegten Untersuchungen war einerseits der Gedankengang massgebend, welchen Herr Kronecker**) zur Herleitung seiner Classenzahlrelationen auf die Modulargleichungen der elliptischen Functionen zuerst anwandte; andererseits basiren jene Untersuchungen auf der von Herrn Klein***) entwickelten Theorie der Modulfunctionen. Indem nämlich gemäss dieser Theorie die Modulargleichungen der elliptischen Functionen nur Glieder einer unendlichen Reihe ähnlicher Gleichungen sind, erhebt sich die Frage, ob nicht auch aus jeder dieser Gleichungen in ähnlicher Weise wie aus den Modulargleichungen der elliptischen Functionen Classenzahlrelationen gewonnen werden können — und es ist diese von Herrn Klein angeregte Frage, welche Herr Gierster in den genannten Arbeiten mit Erfolg in Angriff genommen hat.

Was jene Gleichungen angeht, so entspringen dieselben aus der Transformation derjenigen algebraischen Moduln, welche nach Herrn Klein als Congruenzmoduln zu bezeichnen sind und denen als solchen eine bestimmte „Stufe" q und (wie jedem algebraischen Modul) ein bestimmtes Geschlecht p zugehört.†) Für den Fall nun, dass das Geschlecht $p > 0$ ist, stellte sich bei dem Versuche die betreffenden Classenzahlrelationen aufzustellen eine Schwierigkeit ein, welche in dem bisherigen Mangel einer ausreichenden analytischen Darstellung

*) Diese Annalen, Bd. XXI, pag. 1 und Bd. XXII, pag. 190. Die Abhandlungen sollen im Folgenden mit I. und II. citirt werden.

**) Crelle's Journal, Bd. 57.

***) Sitzungsberichte der Münchner Akademie, 6. Dec. 1879 oder diese Annalen Bd. XVII, pag. 63 ff.

†) Vgl. Klein, l. c.

der zugehörigen Transformationsgleichungen ihren Grund hat.*) Dieses ist der Punkt, an welchem meine Untersuchungen einsetzen. Freilich ist mir die vollständige Durchführung der zum Ziele führenden Betrachtungen nur in einigen wenigen Fällen**) gelungen; doch hoffe ich, da der im allgemeinen Falle einzuschlagende Weg klar vorgezeichnet ist, auch diesen in Bälde erledigen zu können.

Dem vorliegenden in der zweiten Abhandlung enthaltenen Theile meiner Untersuchungen habe ich eine erneute Herleitung der Classenzahlrelation erster Stufe in der ersten Abhandlung voraufgeschickt. Es erschien mir dieses für das Verständniss der zweiten Abhandlung wünschenswerth, da der allgemeine Gedankengang bei dem einfachsten Falle, welchen die Classenzahlrelation erster Stufe darbietet, am klarsten hervortritt. Dabei glaube ich die Herleitung dieser Relation in nicht unwesentlichen Punkten vereinfacht zu haben.

Die zweite Abhandlung zerfällt in zwei Abschnitte, von welchen der erste die allgemeinen Hülfsmittel für die Aufstellung der Classenzahlrelationen entwickelt, wobei nur in dem letzten Theile des Abschnittes die Stufe als eine Primzahl vorausgesetzt wird. Diesen letzten Theil hätte ich wesentlich abkürzen können, wenn ich die „linke Seite σ der Classenzahlrelation“, wie sie Herr Gierster abgeleitet hat (I. pag. 29 ff.), als bekannt hätte voraussetzen wollen. Hierdurch würde aber, da die Zahl σ bei mir eine neue Bedeutung erhält, die Klarheit erheblich gelitten haben; überdies glaube ich auch hier die betreffenden Entwicklungen zum Theil in wesentlich vereinfachter Form zu geben.

Der zweite Abschnitt enthält die vollständige Durchführung des Falles der 7ten Stufe. Was die hier erhaltenen Endresultate anlangt, so sind dieselben, bis auf eine einzige Formel, von Herrn Gierster auf anderem Wege bewiesen worden. Aber auch diese letzte Formel hat schon Herr Gierster als vermuthungsweise bestehend aufgestellt (II. pag. 203).

Die Grundlagen der im Folgenden anzustellenden Untersuchungen können wohl grösstentheils als bekannt vorausgesetzt werden. Nur der Wunsch nach Vollständigkeit veranlasst mich, dieselben in den ersten Paragraphen der ersten Abhandlung kurz zusammenzustellen.***)

---

*) Siehe Gierster: „Ueber Relationen zwischen Classenzahlen etc.“ Sitzungsberichte der Münchener Akademie, 7. Febr. 1880, pag. 3 oder Mathematische Annalen, t. 17, p. 35.

**) Dazu gehört namentlich auch der in meiner Note „Zur Theorie der Modulargleichungen“ Göttinger Nachrichten, 21. Nov. 1883, behandelte Fall. Derselbe liefert einen neuen Beweis für diejenigen Classenzahl-Relationen, welche Herr Kronecker in den Monatsberichten der Berliner Akademie vom 19. April 1875 aus anderen Betrachtungen hergeleitet hat.

***) Siehe Dedekind: „Schreiben an Herrn Borchardt über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen.“ Crelle's Journal, Bd. 83, pag. 265 ff., Klein:

I. Abhandlung.

Die Classenzahlrelation der ersten Stufe.

§ 1.

Die Aequivalenz der Grössen.

Man bezeichnet zwei Grössen ω_1 und ω als äquivalent, wenn die Gleichung

$$\omega_1 = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta} = S(\omega)$$

durch vier ganze Zahlen α, β, γ, δ, welche der Bedingung

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

genügen, befriedigt werden kann. Man sagt dann auch, dass ω_1 aus ω durch die Substitution oder Transformation

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

hervorgehe. Aus dieser Festsetzung ergiebt sich leicht, dass die mit i multiplicirten Theile zweier äquivalenten Grössen dasselbe Vorzeichen besitzen. In Rücksicht hierauf beschränke man die Betrachtung auf Grössen ω mit positiv-imaginärem Bestandtheile. Man construire nun in der (positiven) Halbebene, deren Punkte die Werthe der complexen Grösse $\omega = x + iy$ $(y > 0)$ geometrisch darstellen, die Geraden

$$x = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad x = -\frac{1}{2}$$

und den Kreis

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Diese Linien begrenzen ein krummliniges Dreieck mit den Ecken

$$\omega = i\infty, \quad \omega = \varrho, \quad \omega = 1 + \varrho \quad \left(\varrho = e^{\frac{2i\pi}{3}}\right),$$

welches als Fundamentaldreieck bezeichnet werde. Von der Begrenzung

---

„Ueber die Transformation der elliptischen Functionen und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades." Diese Annalen, Bd. XIV, pag. 111 ff. Eine ausführliche Darstellung findet man in meiner Abhandlung: „Grundlagen einer independenten Theorie der elliptischen Modulfunctionen etc." Diese Annalen Bd. XVIII. pag. 528.

dieses Dreiecks soll nur die auf Seiten der negativen X-Axe liegende Hälfte zu dem Dreieck gerechnet werden. Dann hat man folgendes Theorem:

„*Es giebt zu jeder willkürlich gewählten Grösse* ω *eine und nur* **e i n e** *äquivalente Grösse, welche geometrisch durch einen Punkt des Fundamentaldreiecks dargestellt wird.*“

Indem man die Bezeichnung der Aequivalenz zweier Grössen auf die diese Grössen darstellenden Punkte überträgt, kann man auch sagen, dass die Punkte des Fundamentaldreiecks ein vollständiges System inäquivalenter Punkte bilden. Dieser Charakter wird dem Punktsysteme nicht verloren gehen, falls jeder Punkt durch irgend einen äquivalenten ersetzt wird. Ersetzt man insbesondere jeden Punkt ω des Fundamentaldreiecks durch den Punkt $S(\omega) = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$, so entsteht ein neues vollständiges System inäquivalenter Punkte, welches aus allen Punkten eines neuen Dreiecks gebildet wird. Letzteres wird von Kreis- oder Geradenstücken, welche auf der X-Axe senkrecht stehen, begrenzt und möge seiner Entstehung entsprechend als

„Dreieck $S(\omega)$“

bezeichnet werden. Die Dreiecke $S(\omega)$ überdecken in ihrer Gesammtheit die positive Halbebene einfach und lückenlos, indem sich um jeden zu ϱ äquivalenten Punkt 6 Dreiecke lagern, während sich in jedem zu $i\infty$ äquivalenten, also in jedem einen rationalen Werth darstellenden Punkte, unendlich viele Dreiecke aneinander legen.

Aus den bisher gemachten Angaben ergiebt sich noch leicht die vollständige Auflösung der Gleichung $\omega = S(\omega)$, wo ω eine Stelle im *Innern* der positiven Halbebene bezeichnet. Wird ω zunächst auf das Fundamentaldreieck eingeschränkt, so lässt diese Gleichung nur folgende Auflösungen zu:

$$\omega = i;\quad S = S_1 \ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\omega = \varrho;\quad S = S_2 \ = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\omega = \varrho;\quad S = S_2^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt, dass die allgemeinen Auflösungen der Gleichung diese sind:

$$\omega = U(i);\quad S = US_1\, U^{-1},$$
$$\omega = U(\varrho);\quad S = US_2\, U^{-1},$$
$$\omega = U(\varrho);\quad S = US_2^2\, U^{-1}.$$

Hierbei bedeutet U irgend eine Substitution, und es ist durchgehends von der selbstverständlichen Lösung $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, also $\omega = \omega$, abgesehen.

§ 2.

Quadratische Formen.

Es sei

$$Pu^2 + Quv + Rv^2$$

eine positive quadratische Form, so dass $-P$ und $-R$ sowie die Determinante der Form

$$D = -\Delta = Q^2 - 4PR$$

negative ganzzahlige Werthe besitzen.

Diejenige Wurzel der Gleichung

$$Pu^2 + Quv + Rv^2 = 0,$$

welche einen positiv-imaginären Bestandtheil hat, werde als die *erste* Wurzel der Form bezeichnet. Dann lässt sich die nothwendige und hinreichende Bedingung der Aequivalenz zweier positiven Formen derselben Determinante dahin aussprechen, dass die ersten Wurzeln der Formen äquivalente Grössen im Sinne des § 1 sein müssen.

Nennt man ferner eine positive Form reducirt, falls ihre erste Wurzel dem Fundamentaldreieck angehört, so ergiebt sich aus § 1 sofort der Satz: „Jede Form ist einer und nur *einer* reducirten Form äquivalent."

Man bemerke, dass die Formen, deren erste Wurzel $\omega = i$, bez. $\omega = \varrho$ ist, lauten: $(P, 0, P)$ bez. (P, P, P), wo P eine beliebige positive Zahl bedeutet.

§ 3.

Modulfunctionen.

Die Function $F(\omega)$ heisst eine Modulfunction (im engeren Sinne), wenn sie eindeutig von dem Argumente ω abhängt und die in der Gleichung

$$F(\omega) = F(S(\omega))$$

ausgesprochene Eigenschaft besitzt.

Die Betrachtung des über die Begrenzung des Fundamentaldreiecks zu erstreckenden Integrals

$$\frac{1}{2\pi i}\int d \log F(\omega)$$

ergiebt in bekannter Weise die Relation

$$N = U,$$

wo die Zahlen N und U angeben, wie oft $F(\omega)$ im Ganzen von der ersten Ordnung unendlich klein bez. unendlich gross wird, falls ω das Fundamentaldreieck beschreibt. Dabei sind an den Stellen

$$\omega = i\infty,\ \varrho,\ i$$

bezüglich die Grössen

$$q^2,\quad (\omega - \varrho)^3,\ (\omega - i)^2,\quad (q = e^{i\pi\omega})$$

an jeder andern Stelle $\omega = \omega_0$ des Fundamentaldreiecks die Grösse $\omega - \omega_0$ als unendlich klein von der ersten Ordnung anzusehen.

Die einfachste hierhergehörige Function wird durch die Gleichung

$$J(\omega)\,^{*)} = \frac{\left(\frac{1}{12} + 20\sum_{k=1}^{\infty} k^3 \frac{q^{2k}}{1-q^{2k}}\right)^3}{q^2 \prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{2k})^{24}} = q^{-2}\left(\frac{1}{12^3} + \cdots\right)$$

definirt. Dieselbe wird offenbar nur für $\omega = i\infty$ und zwar von der ersten Ordnung unendlich gross, nimmt also, wenn ω auf das Fundamentaldreieck eingeschränkt wird, jeden möglichen Werth ein Mal und nur *ein* Mal an, so dass die Gleichung

$$J(\omega) = J(\omega_1)$$

dann und *nur* dann stattfindet, wenn ω und ω_1 äquivalente Grössen sind. Von Wichtigkeit wird später noch folgender evidente Satz: Besitzt die Function $f(\omega)$ die Eigenschaft, dass für eine im Endlichen liegende Stelle ω_0 des Fundamentaldreiecks $f(\omega_0) = \omega_0$ ist, so wird die Differenz

$$J(\omega) - J(f(\omega))$$

an der Stelle $\omega = \omega_0$ von der ersten Ordnung unendlich klein, falls

$$[f'(\omega_0)]^\nu - 1\ .$$

endlich und von Null verschieden ist.

Dabei ist

$$\nu = 2 \ \text{ bez. } \ \nu = 3$$

für

$$\omega_0 = i \ \text{ bez. } \ \omega_0 = \varrho;$$

in allen übrigen Fällen ist $\nu = 1$.

§ 4.

Transformation n^{ter} Ordnung.

Besteht zwischen den Grössen ω_1 und ω die Beziehung

$$\omega_1 = \frac{a\omega + b}{c\omega + d},$$

wo a, b, c, d ganze Zahlen bedeuten, welche der Bedingung

$$ad - bc = n$$

*) $J(\omega)$ ist die absolute Invariante des elliptischen Integrals 1. Gattung und identisch mit der „Valenz" des Herrn Dedekind.

genügen, so sagt man ω_1 gehe aus ω durch die Substitution oder Transformation n^{ter} Ordnung $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ hervor. Aequivalente Grössen können hiernach auch als solche bezeichnet werden, welche auseinander durch Transformation erster Ordnung hervorgehen.

Wie bisher soll unter einer Substitution oder Transformation schlechthin stets eine solche der ersten Ordnung verstanden werden. Bedeutet nun $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ irgend eine *bestimmte* Transformation der n^{ten} Ordnung, so lassen sich die Substitution S und die nicht-negativen ganzen Zahlen A, D, B stets und nur in einer Weise so bestimmen, dass die Gleichung

$$\frac{a\omega + b}{c\omega + d} = S\left(\frac{A\omega + B}{D}\right) \text{*)}$$

unabhängig von ω stattfindet und dass die Bedingungen

$$A \cdot D = n, \quad B < D$$

erfüllt sind.

Denkt man sich also alle möglichen Grössen $\frac{A\omega + B}{D}$ aufgeschrieben (deren Anzahl gleich $\Phi(n)$, der Summe der Divisoren von n, ist) und zu jeder einzelnen alle ihr äquivalenten Grössen $S\left(\frac{A\omega + B}{D}\right)$ gebildet, so wird man jeden Ausdruck $\frac{a\omega + b}{c\omega + d}$ und jeden nur *ein* Mal erhalten. Man kann hiernach die Ausdrücke $\frac{a\omega + b}{c\omega + d}$ in $\Phi(n)$ Reihen vertheilen, der Art dass jede Reihe nur äquivalente Grössen enthält, dass dagegen je zwei Ausdrücke aus verschiedenen Reihen nur für particuläre Werthe von ω äquivalent sein können.

Es möge $R_i(\omega)$ einen bestimmten Ausdruck der i^{ten} Reihe bedeuten; so sollen die $\Phi(n)$ Ausdrücke

$$R_1(\omega),\ R_2(\omega), \ldots$$

als ein Repräsentantensystem der Transformation n^{ter} Ordnung bezeichnet werden. Insbesondere werden die $\Phi(n)$ Grössen $\frac{A\omega + B}{D}$ ein solches System bilden.

Eine vorzugsweise zur Verwendung gelangende, leicht zu beweisende Eigenschaft eines Repräsentantensystems ist diese:

„*Gleichzeitig mit*

$$R_1(\omega),\ R_2(\omega), \ldots$$

bilden auch die Ausdrücke

$$R_1(S(\omega)),\ R_2(S(\omega)), \ldots$$

ein Repräsentantensystem der Transformation n^{ter} Ordnung, wenn $S(\omega)$ irgend eine Substitution erster Ordnung bezeichnet.“

*) Vgl. Dedekind, l. c. pag. 287.

§ 5.

Die Classenzahlrelation erster Stufe.

Aus dem letzten Satz folgt, dass die Function

$$F(\omega) = \Pi' \left[J(\omega) - J(R_i(\omega))\right] = \Pi' \left[J(\omega) - J\left(\frac{A\omega + B}{D}\right)\right]$$

die in der Gleichung

$$F(S(\omega)) = F(\omega)$$

ausgesprochene Eigenschaft besitzt. Dabei ist das Product über irgend ein Repräsentantensystem $R_i(\omega)$ auszudehnen, jedoch im Falle, wo n ein Quadrat ist, der durch $A = D = \sqrt{n}$, $B = 0$ charakterisirte Repräsentant auszulassen, was durch das an das Productzeichen gesetzte Komma angedeutet ist.

Es werde nun der Satz von § 3, dass $F(\omega)$ im Fundamentaldreieck ebenso oft Null wie unendlich wird, angewendet.

$F(\omega)$ wird unendlich nur für $\omega = i\infty$ und zwar wird hier der Factor

$$J(\omega) - J\left(\frac{A\omega + B}{D}\right) = q^{-2}\left(\frac{1}{12^3} + \cdots\right) - q^{-2\cdot\frac{A}{D}}\left(\frac{e^{\frac{2i\pi B}{D}}}{12^3} + \cdots\right)$$

von der Ordnung 1 oder $\frac{A}{D}$ unendlich gross, je nachdem $A \leqq D$ oder $A > D$ ist. Daher ist die Gesammtordnung des Unendlichwerdens von $F(\omega)$:

$$U = \sum_{A \leqq D} D + \sum_{A > D} A - \varepsilon_n = \sum_{A \geqq D} A + \sum_{A > D} D + \sum_{A > D} (A - D) - \varepsilon_n;$$

oder

$$U = \Phi(n) + \Psi(n) - \varepsilon_n,$$

wo

$\Phi(n)$ die Summe der Divisoren von n,

$\Psi(n)$ den Ueberschuss derjenigen Divisoren von n, welche grösser als $\sqrt{n}$ über diejenigen, welche kleiner als $\sqrt{n}$ sind bedeutet, und

wo endlich

$$\varepsilon_n = 1 \text{ oder } 0$$

zu setzen ist, je nachdem n eine Quadratzahl ist oder nicht.

§ 6.

Fortsetzung.

Nun lässt sich die Zahl N der Nullstellen von $F(\omega)$ auf folgende Weise bestimmen. Ein Factor

$$J(\omega) - J(R_i(\omega))$$

wird für eine Stelle ω_0 des Fundamentaldreiecks unendlich klein und zwar (nach § 3, Schluss) von der ersten Ordnung, dann und nur dann, falls

$$\omega_0 = S\,(R_i(\omega_0))$$

ist.

Diese Gleichung für ω_0 lässt sich in die Form

$$(1) \qquad \omega_0 = \frac{a\,\omega_0 + b}{c\,\omega_0 + d}$$

setzen, wo $ad - bc = n$ ist und c positiv vorausgesetzt werden darf. $F(\omega)$ wird also so oft Null wie die Gleichung (1) Lösungen hat. Hierbei ist jedoch noch zweierlei zu bemerken. Erstens sind, wenn n ein Quadrat ist, diejenigen Gleichungen (1), welche aus dem fortgelassenen Factor $J(\omega) - J\left(\frac{\sqrt{n}\,\omega}{\sqrt{n}}\right)$ entspringen, auszuscheiden. Dieselben lauten $\omega_0 = S\left(\frac{\sqrt{n}\,\omega_0}{\sqrt{n}}\right)$, also nach § 1, Schluss:

$$(A) \qquad \begin{cases} \omega_0 = \dfrac{-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\,\omega_0}, & \omega_0 = i; \\[2ex] \omega_0 = \dfrac{-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\,\omega_0 - \sqrt{n}}, & \omega_0 = \varrho; \\[2ex] \omega_0 = \dfrac{-\sqrt{n}\,\omega_0 - \sqrt{n}}{\sqrt{n}\,\omega_0}, & \omega_0 = \varrho. \end{cases}$$

Zweitens sind von den übrigen Lösungen zwei solche, wie

$$\omega_0 = \frac{a\,\omega_0 + b}{c\,\omega_0 + d}, \qquad \omega_0' = \frac{a'\,\omega_0' + b'}{c'\,\omega_0' + d'}$$

als nicht verschieden zu rechnen, wenn $\omega_0 = \omega_0'$ ist und

$$\frac{a\,\omega_0 + b}{c\,\omega_0 + d} = S\left(\frac{a'\,\omega_0 + b'}{c'\,\omega_0 + d'}\right)$$

durch eine Substitution S befriedigt werden kann. Denn zwei solche Lösungen gehören zu derselben Nullstelle desselben Factors von $F(\omega)$. In diesem Falle ist aber $\omega_0 = S(\omega_0)$. Nach § 1, Schluss, sind daher diejenigen Lösungen der Gleichung (1), in welchen $\omega_0 = i$ ist, paarweise, diejenigen in welchen $\omega_0 = \varrho$ ist, zu je dreien als nicht verschieden zu rechnen.

Bezeichnet daher Z die Zahl der Lösungen der Gleichung (1), wenn jede Lösung, in welcher $\omega_0 = i$, bez. $\omega_0 = \varrho$ ist $\frac{1}{2}$ bez. $\frac{1}{3}$ Mal gezählt wird, so ist die Zahl N der Nullstellen von $F(\omega)$ gleich Z wenn n kein Quadrat, dagegen, wenn n ein Quadrat ist, gleich Z vermindert um $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ (wegen der in diesem Falle anzuschliessenden Lösungen (A).)

Wir können also

$$N = Z - \eta_n$$

setzen, wo $\eta_n = \frac{7}{6}$ oder 0 ist, je nachdem n ein Quadrat ist oder nicht.

§ 7.

Schluss.

Man denke sich jetzt alle reducirten positiven quadratischen Formen der negativen Determinanten $-4n + \varkappa^2$ aufgeschrieben, wo $\varkappa$ successive die Werthe $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ also alle ganzzahligen Werthe annehmen soll, welche absolut genommen kleiner als $2\sqrt{n}$ sind.

Setzt man dann, unter (P, Q, R) irgend *eine* dieser Formen verstanden:

$$c = P, \quad b = -R, \quad d = \frac{Q + \varkappa}{2}, \quad a = \frac{Q - \varkappa}{2},$$

so ist leicht einzusehen, dass man in den verschiedenen mit Hülfe dieser Zahlen gebildeten Gleichungen

$$\omega_0 = \frac{a\omega_0 + b}{c\omega_0 + d}$$

jede Lösung der Gleichung (1) des vorigen Paragraphen und jede nur *ein* Mal erhält. Bezeichnet daher $\mathsf{H}(\Delta)$ die Zahl der verschiedenen Classen von positiven Formen der Determinante $-\Delta$, wobei diejenigen Classen, deren reducirte Formen die Gestalt $(P, 0, P)$ bez. (P, P, P) haben, $\frac{1}{2}$ Mal bez. $\frac{1}{3}$ Mal zu zählen sind, so ist

$$Z = \sum_{\varkappa = 0, \pm 1, \ldots} \mathsf{H}(4n - \varkappa^2).$$

Wenn endlich $\mathsf{H}(o) = -\frac{1}{12}$ gesetzt wird, so erhält man

$$N = Z - \eta_n = \sum_{\varkappa = 0, \pm 1, \ldots} \mathsf{H}(4n - \varkappa^2) - \varepsilon_n,$$

wo jetzt $\varkappa$ alle positiven und negativen ganzen Zahlen durchläuft, welche absolut genommen nicht grösser als $2\sqrt{n}$ sind, während ε_n dieselbe Bedeutung wie in § 5 besitzt.

Durch Gleichsetzung der Zahl N der Nullstellen und der Zahl U der Unendlichkeitsstellen von $F(\omega)$ ergiebt sich nun die Classenzahlrelation, deren Ableitung das Ziel dieser Untersuchung war, nämlich

$$\sum_{\varkappa = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots} \mathsf{H}(4n - \varkappa^2) = \Phi(n) + \Psi(n).^{*)}$$

---

*) Siehe Gierster, I, pag. 25.

II. Abhandlung.

Die Classenzahlrelationen höherer, insbesondere der siebenten Stufe.

Abschnitt I.

Ansätze für eine beliebige Stufe q.*)

§ 1.**)

Die Gruppe derjenigen Substitutionen, welche (modulo q) der Identität congruent sind.

Die Gesammtheit derjenigen Substitutionen $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$, welche der Bedingung

$$\alpha : \beta : \gamma : \delta \equiv 1 : 0 : 0 : 1 \ (\mathrm{mod.}\ q)$$

genügen, wo q eine positive ganze Zahl bezeichnet, bildet eine Gruppe, welche als eine ausgezeichnete Untergruppe in der Gesammtheit aller Substitutionen enthalten ist. Substitutionen, welche dieser Gruppe angehören, sollen in der Folge mit dem Buchstaben T bezeichnet werden, so dass

$$T(\omega),\ T'(\omega),\ T_1(\omega), \ldots$$

verschiedene Individuen der Gruppe bedeuten.

Ferner mögen zwei Grössen ω_1 und ω, zwischen denen eine Gleichung der Gestalt

$$\omega_1 = T(\omega)$$

besteht, *relativ* äquivalent genannt werden.

Ein vollständiges System relativ inäquivalenter Grössen erhält man auf folgendem Wege. Es seien

$$S(\omega) = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}, \quad S_1(\omega) = \frac{\alpha_1\omega + \beta_1}{\gamma_1\omega + \delta_1}$$

zwei beliebige Substitutionen; so ist die nothwendige und hinreichende Bedingung, dass $S(\omega)$ und $S_1(\omega)$ für alle Werthe von ω relativ äquivalent sind, durch die Congruenzen

$$\alpha : \beta : \gamma : \delta \equiv \alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 : \delta_1 \ (\mathrm{mod.}\ q)$$

ausgedrückt. Es sollen dann $S(\omega)$ und $S_1(\omega)$ (mod. q) congruente

---

*) Die Zahl q wird, wie schon in der Einleitung erwähnt ist, im letzten Theile des Abschnittes als Primzahl vorausgesetzt.

**) Vgl. wegen dieses und des folgenden Paragraphen: Klein: „Ueber die Transformation der elliptischen Functionen und die Auflösung der Gleichung fünften Grades.“ Diese Annalen, Bd. XIV, pag. 151 und 152.

Substitutionen heissen. Man denke sich nun ein vollständiges System (mod. q) incongruenter Substitutionen

$$S_1(\omega),\ S_2(\omega),\ \ldots,\ S_\lambda(\omega)$$

aufgestellt, so werden die „Dreiecke" $S_1(\omega)$, $S_2(\omega)$, ..., $S_\lambda(\omega)$ ein vollständiges System relativ inäquivalenter Grössen bilden. Diese Dreiecke kann man auf mannigfaltige Art so wählen, dass sie in der positiven Halbebene ein einfach zusammenhängendes Gebiet bilden, welches als „Fundamentalpolygon" der Gruppe bezeichnet wird. Da von der Begrenzung jedes Dreiecks $S(\omega)$ nur die eine Hälfte zu dem Dreieck gehörig gerechnet wird, so wird auch von der Begrenzung des Fundamentalpolygons nur die Hälfte zu demselben gehören. Jedes Begrenzungsstück dieser Hälfte geht durch eine Transformation $T(\omega)$ in ein bestimmtes Stück der anderen Hälfte über.

§ 2.

Die Riemann'sche Fläche der q^{ten} Stufe.

Denkt man sich das Fundamentalpolygon aus der positiven Halbebene herausgenommen und die zusammengehörigen Ränder desselben vereinigt, so entsteht eine geschlossene Fläche, welche in Anlehnung an die von Herrn Klein eingeführte Terminologie als die „Riemann'sche Fläche der q^{ten} Stufe" bezeichnet werden soll. Ist $q = 1$ (in welchem Falle die Gruppe $T(\omega)$ mit der Gesammtheit aller Substitutionen identisch ist), so ist das Geschlecht der Fläche gleich Null. Für $q > 1$ bestimmt man das Geschlecht p am leichtesten mit Hülfe des Euler'schen Satzes. Gemäss ihrer Entstehung trägt nämlich die Fläche eine Eintheilung in λ Dreiecke, deren Ecken in $\frac{\lambda}{q}$ Punkten zu je q, in $\frac{\lambda}{3}$ Punkten zu je 6 zusammenfallen. Man findet dem entsprechend

$$p = \lambda \cdot \frac{q-6}{12q} + 1.$$

Die Grösse ω als Function des Ortes auf dieser Fläche betrachtet*) ist eine unendlich vieldeutige Function. Ist ω_0 ein Werth, welchen ω an einer bestimmten Stelle besitzt, so hat man in den zu ω_0 relativ äquivalenten Grössen alle Werthe, welche ω an dieser Stelle annimmt. Umgekehrt gehört zu einem gegebenen Werth von ω eine ganz bestimmte Stelle der Fläche. Betrachtet man ferner alle zu ein und demselben Werthe (im gewöhnlichen Sinne) äquivalente Grössen, so vertheilen sich dieselben im Allgemeinen in λ Gruppen unter einander

*) Es ist ω, beiläufig bemerkt, eine η-Function im Sinne der Klein'schen Abhandlung: „Neue Beiträge zur Riemann'schen Functionentheorie." Diese Annalen, Bd. XXI, p. 141 ff.

relativ äquivalenter Grössen, so dass ihnen λ Stellen der Fläche entsprechen. Eine Ausnahme bilden die zu

$$\omega = i, \ \varrho, \ i\infty$$

äquivalenten Grössen, zu denen bezüglich nur $\frac{\lambda}{2}$, $\frac{\lambda}{3}$, $\frac{\lambda}{q}$ Stellen gehören.

Eine besondere Beachtung verdienen die letzteren zu rationalen Werthen von ω gehörenden, also den auf der Axe der reellen Zahlen liegenden Ecken des Fundamentalpolygons entsprechenden Stellen. Zu zwei rationalen Werthen gehört dann und nur dann dieselbe Stelle, falls die Werthe (mod. q) congruent sind. Jene $\frac{\lambda}{q}$ Stellen lassen sich also z. B., wenn q eine Primzahl ist, durch die rationalen Werthe $\pm\frac{\mu}{\varrho}$ angeben, wo μ und ϱ die Werthe

$$0, 1, 2, \dots \frac{q-1}{2}$$

annehmen und nur die Combination $\mu = 0$, $\varrho = 0$ ausgeschlossen ist.

Besitzt ω einen wenig von der rationalen Zahl $-\frac{\delta}{\gamma}$ verschiedenen Werth, so geht bei einer Umkreisung der Stelle $-\frac{\delta}{\gamma}$ die Grösse

$$\frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta} \quad \text{in} \quad \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta} + q$$

über, wo α, β irgend zwei ganze, der Bedingung $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ unterworfene Zahlen bedeuten. Daraus folgt, dass auf unserer Fläche an der Stelle $-\frac{\delta}{\gamma}$ die Grösse

$$e^{\frac{2i\pi}{q}\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}}$$

von der ersten Ordnung unendlich klein wird. An jeder nicht zu jenen $\frac{\lambda}{q}$ Stellen gehörigen Stelle ω_0, wird offenbar

$$\omega - \omega_0$$

von der ersten Ordnung unendlich klein.

Da jeder geschlossene auf der Fläche gezeichnete Weg, bei dessen Durchlaufung sich ω ungeändert reproducirt, auf einen Punkt zusammengezogen werden kann, so folgt der wichtige Satz:

„*Jede auf der Fläche existirende unverzweigte Function ist eine eindeutige Function von ω.*"

Schliesslich bemerke ich, dass die Betrachtung der Riemann'schen Fläche q^{ter} Stufe nur einen Durchgangspunkt bildet. Sie dient namentlich dazu, die Existenz gewisser Functionen von ω festzustellen (vgl. den folgenden Paragraphen). Allen weiteren Untersuchungen wird dann nicht jene Fläche, sondern die ω-Halbebene oder das in ihr liegende Fundamentalpolygon zu Grunde gelegt.

§ 3.

Ueberall endliche Integrale und ϑ-Functionen der q^{ten} Stufe.

Aus dem letzten Satze ergiebt sich, dass nicht nur die zu der geschilderten Fläche gehörenden algebraischen Functionen, sondern auch die auf ihr existirenden überall endlichen Integrale und ϑ-Functionen, welche „von der q^{ten} Stufe" genannt werden sollen, eindeutige Functionen von ω sind.

Diese Bemerkung kann sich selbstverständlich nur auf den Fall beziehen, dass das Geschlecht p der Fläche grösser als Null ist. Es mögen deshalb im Folgenden die Werthe

$$q = 2,\ 3,\ 4,\ 5,$$

für welche $p = 0$ wird, ausgeschlossen werden.

Bedeuten nun

$$J_1(\omega),\ J_2(\omega),\ \ldots,\ J_p(\omega)$$

p linear unabhängige Integrale der q^{ten} Stufe, so ist

$$J_r(T(\omega)) = J_r(\omega) + P_r \quad (r = 1, 2 \ldots p),$$

wobei die Grössen $P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_p$ ein Periodensystem der Integrale bilden. Es ist aber wichtig, dass auch das Umgekehrte gilt:

„*Jede eindeutige, überall endliche Function von ω, welche sich bis auf eine additive Constante reproducirt, falls ω durch $T(\omega)$ ersetzt wird, ist ein Integral der q^{ten} Stufe.*"

Hieraus folgt unter Anderem, dass, unter $S(\omega)$ eine beliebige Substitution verstanden, stets

$$J_r(S(\omega)) = c_1^{(r)} J_1(\omega) + c_2^{(r)} J_2(\omega) + \cdots + c_p^{(r)} J_p(\omega) + c^{(r)}$$

ist, wo

$$c_1^{(r)},\ c_2^{(r)},\ \ldots,\ c_p^{(r)},\ c^{(r)}$$

von ω unabhängige Grössen bezeichnen.

In bekannter Weise lassen sich alle diese Relationen aus denjenigen beiden, welche den Substitutionen

$$S(\omega) = \omega + 1 \quad \text{und} \quad S(\omega) = -\frac{1}{\omega}$$

zugehören, ableiten.

Es mögen nun die überallendlichen Integrale q^{ter} Stufe

$$j_1(\omega),\ j_2(\omega),\ \ldots,\ j_p(\omega)$$

ein System von Normalintegralen bilden und es werde die zugehörige Function

$$\vartheta(u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_p)$$

zur Abkürzung mit

$$\vartheta[u_r]$$

bezeichnet. Versteht man dann unter

$$e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_p$$

p willkürliche Constante, so besitzt die Function

$$\vartheta[j_r(\omega)-e_r]$$

die in der Gleichung

$$\vartheta[j_r(T(\omega))-e_r]=e^{\sum\limits_{r=1}^{p}2t_r(j_r(\omega)-e_r)+C_t}\cdot\vartheta[j_r(\omega)-e_r]$$

ausgesprochene Eigenschaft, wobei die ganzen Zahlen $t_1, t_2, \ldots, t_p$ und die Constante C_t nur von der Substitution $T(\omega)$ abhängen.

Es können nun ferner nach Annahme von $2p-2$ Werthen

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2p-2}$$

die Constanten $e_1, e_2, \ldots, e_p$ so bestimmt werden, dass

$$\vartheta[j_r(\omega)-j_r(\Omega)-e_r]=\vartheta[j_r(\Omega)-j_r(\omega)+e_r]$$

als Function von ω bez. Ω betrachtet nur dann und zwar von der ersten Ordnung unendlich klein wird, wenn ω bez. Ω relativ äquivalent ist zu

$$\Omega,\ \omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_{p-1}$$

bez.

$$\omega,\ \omega_p,\ \omega_{p+1},\ \ldots,\ \omega_{2p-2}.$$

Dabei ist die Wahl der Grössen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2p-2}$ nicht vollständig willkürlich; doch kommen die Bedingungen, welchen diese Grössen unterworfen sind, für das Folgende nicht in Betracht.

Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich ohne Mühe der nachstehende Satz:

„*Ist $f(\omega)$ eine Function von ω und findet die Gleichung*

$$\omega=f(\omega)$$

für eine im Innern der positiven Halbebene liegende Stelle $\omega=\omega_0$ statt, so wird die Function

$$\vartheta[j_r(\omega)-j_r(f(\omega))-e_r]$$

an dieser Stelle von der ersten Ordnung unendlich klein, wenn $f'(\omega_0)-1$ endlich und von Null verschieden ist. Findet dagegen die Gleichung $\omega=f(\omega)$ für einen rationalen Werth, etwa für $\omega=-\frac{\delta}{\gamma}$ statt, so wird dieselbe Function an der Stelle $\omega=-\frac{\delta}{\gamma}$ von derselben Ordnung wie

$$e^{\frac{2i\pi}{q}\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}}-e^{\frac{2i\pi}{q}\frac{\alpha f(\omega)+\beta}{\gamma f(\omega)+\delta}}$$

unendlich klein. Hier bezeichnen α und β irgend zwei der Gleichung

$$\alpha\delta-\beta\gamma=1$$

genügende ganze Zahlen.“

Schliesslich möge hier noch folgender Satz, welcher später von Wichtigkeit wird, eine Stelle finden:

„*Besitzt die Function $F(\omega)$ die Eigenschaft sich bis auf einen von ω unabhängigen Factor zu reproduciren, wenn ω durch $T(\omega)$ ersetzt* *wird, so wird $F(\omega)$ im Fundamentalpolygon gerade so oft Null wie unendlich gross.“*

Der Beweis ergiebt sich in bekannter Weise aus der Betrachtung des um die Begrenzung des Fundamentalpolygons zu erstreckenden Integrales

$$\frac{1}{2\pi i}\int d \log F(\omega).*)$$

§ 4.

Transformation n^{ter} Ordnung q^{ter} Stufe.

Es mögen a, b, c, d irgend vier ganze Zahlen bedeuten, welche nur der Einschränkung unterworfen sind, dass

$$ad - bc = n$$

ein positive zu q theilerfremde Zahl sein soll.

Man kann dann stets ein Repräsentantensystem der Transformation n^{ter} Ordnung**)

$$R_1(\omega),\ R_2(\omega),\ \ldots$$

aufstellen, welches den Bedingungen

$$R_1(\omega) \equiv R_2(\omega) \equiv \cdots \equiv \frac{a\omega + b}{c\omega + d} \ (\text{mod. } q),$$

genügt.***) Dabei ist, wie in der Folge stets, unter der Congruenz

$$\frac{a'\omega + b'}{c'\omega + d'} \equiv \frac{a\omega + b}{c\omega + d},$$

oder auch

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (\text{mod. } q),$$

das Bestehen der Congruenzen

$$a' : b' : c' : d' \equiv a : b : c : d \ (\text{mod. } q)$$

verstanden. — Ein solches Repräsentantensystem soll „zum Schema

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (\text{mod. } q)$$

gehörend“ genannt werden. Offenbar erhält man aus *einem* derartigen Systeme alle übrigen, indem man $R_i(\omega)$ durch $T_i(R_i(\omega))$ ersetzt. Hiernach werden namentlich auch die Grössen

$$R_1(T(\omega)),\ R_2(T(\omega)),\ \ldots$$

in irgend einer Reihenfolge den Grössen

---

*) Vgl. wegen der letzten beiden Sätze § 3 der ersten Abhandlung.

**) Siehe § 4 der ersten Abhandlung.

***) Klein, Sitzungsberichte der Münchener Akademie, 6. Dec. 1879, p. 8.

$$R_1(\omega),\ R_2(\omega), \ldots$$

relativ äquivalent sein.

Betrachtet man nun die Function

$$\Phi(\omega) = \Pi' \vartheta \left[j_r(\omega) - j_r(R_i(\omega)) - c_r \right],$$

wobei im Falle, dass n ein Quadrat und

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \sqrt{n} & 0 \\ 0 & \sqrt{n} \end{pmatrix} \pmod{q}$$

ist, der zu ω relativ äquivalente Repräsentant auszulassen ist, so reproducirt sich $\Phi(\omega)$ bis auf einen Exponentialfactor, sei es dass ω durch $T(\omega)$ oder das Repräsentantensystem $R_1(\omega)$, $R_2(\omega), \ldots$ durch irgend ein anderes zu demselben Schema $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (mod. q) gehörendes ersetzt werde. Von dieser Eigenschaft der Function $\Phi(\omega)$ wird bei der Abzählung ihrer Nullstellen beständiger Gebrauch gemacht.

§ 5.

Zahl der Nullstellen von $\Phi(\omega)$.

Es soll untersucht werden, wie oft $\Phi(\omega)$ verschwindet, wenn ω das Fundamentalpolygon beschreibt. Dabei soll jedoch von denjenigen Nullstellen, welche von der Wahl der Grössen ω_1, $\omega_2, \ldots, \omega_{2p-2}$ abhängen, abgesehen werden. Ausserdem seien die (auf der Axe der reellen Zahlen liegenden) Ecken des Fundamentalpolygons vorläufig ausgeschlossen.

Für eine Nullstelle $\omega = \omega_0$ von $\Phi(\omega)$ wird ω nothwendig einem Repräsentanten $R_i(\omega)$ relativ äquivalent, so dass derselben eine Gleichung der Form

$$(1) \qquad \omega_0 = \frac{a'\omega_0 + b'}{c'\omega_0 + d'}, \quad \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \pmod{q}$$

entspricht. Umgekehrt kann einer solchen Gleichung eine bestimmte (nach § 3 einfach zu zählende) Nullstelle von $\Phi(\omega)$ zugewiesen werden; nämlich diejenige, welche dem zu $\frac{a'\omega + b'}{c'\omega + d'}$ äquivalenten Repräsentanten entspricht.

Alsdann wird zu zwei verschiedenen Gleichungen

$$\omega_0 = \frac{a'\omega_0 + b'}{c'\omega_0 + d'}, \qquad \omega_0 = \frac{a''\omega_0 + b''}{c''\omega_0 + d''}$$

nur dann dieselbe Nullstelle gehören, wenn (unabhängig von ω) $\frac{a'\omega + b'}{c'\omega + d'}$ und $\frac{a''\omega + b''}{c''\omega + d''}$ relativ äquivalent sind.

Dann würde

$$\omega_0 = T(\omega_0)$$

sein.

Diese Gleichung ist aber unmöglich. Denn es müsste*)

$$T = US_1 U^{-1} \text{ oder } US_2 U^{-1} \text{ oder } US_2^2 U^{-1},$$

also, da $T \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (\text{mod. } q)$ ist, auch

$$S_1 \text{ oder } S_2 \text{ oder } S_2^2 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (\text{mod. } q),$$

sein, was nicht der Fall ist.

Falls n ein Quadrat ist, und

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \sqrt{n} & 0 \\ 0 & \sqrt{n} \end{pmatrix} (\text{mod. } q),$$

wären noch diejenigen Gleichungen (1) auszuschliessen, für welche $\frac{a'\omega + b'}{c'\omega + d'}$ mit ω relativ äquivalent ist. Solche Gleichungen sind aber, da sie auf $\omega_0 = T(\omega_0)$ führen, gar nicht vorhanden. Es folgt daher:

„*Sieht man ab von den für rationale Werthe von ω eventuell stattfindenden und den von $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2p-2}$ abhängigen Nullstellen, so verschwindet $\Phi(\omega)$ im Fundamentalpolygon gerade so oft, als Gleichungen*

(1) $$\omega_0 = \frac{a'\omega_0 + b'}{c'\omega_0 + d'}$$

angesetzt werden können, wo ω_0 eine Stelle des Fundamentalpolygons bezeichnet und a', b', c', d' ganze Zahlen bedeuten, welche den Bedingungen

$$a'd' - b'c' = n, \quad \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (\text{mod. } q)$$

unterworfen sind."

§ 6.

Fortsetzung.

Die Zahl der möglichen Ansätze (1) ist nun durch eine Summe von Classenzahlen ausdrückbar.**)

Man denke sich alle positiven quadratischen Formen der negativen Determinanten $-4n + \varkappa^2$, wo $\varkappa$ alle positiven und negativen Zahlwerthe erhält, die absolut genommen kleiner als $2\sqrt{n}$ sind, diese Formen in Classen vertheilt und aus jeder Classe ein Individuum (P, Q, R) nach Willkür ausgewählt. Dann kann man zu jeder Form (P, Q, R) ein vollständiges System (mod. q) incongruenter Substitutionen (S) bestimmen, so dass die Ansätze

$$\omega_0 = S\left(\frac{\frac{-Q+\varkappa}{2} S^{-1}(\omega_0) - R}{P \cdot S^{-1}(\omega_0) + \frac{Q+\varkappa}{2}}\right)$$

*) § 1 der ersten Abhandlung.

**) Vgl. Gierster: I, pag. 29 ff.

nur Stellen ω_0 des Fundamentalpolygons definiren. In allen so entstehenden Ansätzen hat man dann alle Gleichungen (1) vor sich, welche der Bedingung genügen, dass ω_0 im Fundamentalpolygon liegt.

Dabei ist jedoch jede Gleichung, in welcher ω_0 äquivalent zu i bez. ϱ ist, doppelt bez. dreifach aufgenommen, indem die aus einer Form der Classen (P, O, P) bez. (P, P, P) entspringenden Ansätze zu je zweien bez. zu je dreien identisch sind. Es soll deshalb festgesetzt werden, dass jede solche Formenclasse $\frac{1}{2}$ bez. $\frac{1}{3}$ Mal zu zählen ist. Mit dieser Festsetzung können wir sagen: Zu jeder Formenclasse (P, Q, R) gehören so viele Gleichungen (1), als (mod. q) incongruente Substitutionen S existiren, welche den Bedingungen

$$S\begin{pmatrix} \frac{-Q+\varkappa}{2}, & -R \\ P, & \frac{Q+\varkappa}{2} \end{pmatrix} S^{-1} \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ (mod. } q)$$

Genüge leisten.

Es werde zur Abkürzung

$$\text{(A)} \qquad a_1 = \frac{-Q+\varkappa}{2}, \quad b_1 = -R, \quad c_1 = P, \quad d_1 = \frac{Q+\varkappa}{2}$$

gesetzt; ferner sei

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

und es werde von jetzt an die Voraussetzung eingeführt, dass q eine Primzahl sei. Die Bedingungen für S lauten ausführlich geschrieben:

$$\text{(B)} \qquad \left.\begin{aligned} \alpha a_1 + \beta c_1 &\equiv \varepsilon(\alpha a + \gamma b) \\ \gamma a_1 + \delta c_1 &\equiv \varepsilon(\alpha c + \gamma d) \\ \alpha b_1 + \beta d_1 &\equiv \varepsilon(\beta a + \delta b) \\ \gamma b_1 + \delta d_1 &\equiv \varepsilon(\beta c + \delta d) \\ \alpha\delta - \beta\gamma &\equiv 1 \end{aligned}\right\} \text{ (mod. } q),$$

wo $\varepsilon = +1$ oder $= -1$ ist. Wenn nun

$$c_1 \text{ nicht } \equiv 0 \text{ (mod. } q)$$

ist, so ergeben sich die Werthe von β und δ aus den ersten beiden Congruenzen (B), falls α und γ bekannt sind.

Trägt man diese Werthe in die letzten beiden Congruenzen ein so reduciren sich dieselben auf

$$\left.\begin{aligned} [a_1 + d_1 - \varepsilon(a + d)]\,(a\alpha + b\gamma) &\equiv 0 \\ [a_1 + d_1 - \varepsilon(a + d)]\,(c\alpha + d\gamma) &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \text{ (mod. } q),$$

für deren Bestehen die folgende

$$a_1 + d_1 \equiv \varepsilon(a+d) \text{ (mod. } q)$$

nothwendig und hinreichend ist. Substituirt man die Werthe von β und δ ebenso in die Congruenz

$$\alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1 \pmod{q},$$

so geht dieselbe über in

$$c\alpha^2 + (d-a)\,\alpha\gamma - b\gamma^2 \equiv \varepsilon c_1 \pmod{q}.$$

Wenn also c_1 nicht $\equiv 0 \pmod{q}$, sind die Bedingungen (B) durch die folgenden ersetzbar:

$$(\mathrm{B}')\qquad \left.\begin{aligned} a_1 + d_1 &\equiv \varepsilon(a+d)\\ c\alpha^2 + (d-a)\,\alpha\gamma - b\gamma^2 &\equiv \varepsilon c_1\\ \beta c_1 &\equiv \varepsilon(\alpha a + \gamma b) - \alpha a_1\\ \delta c_1 &\equiv \varepsilon(\alpha c + \gamma d) - \gamma a_1 \end{aligned}\right\} \pmod{q}.$$

Je nach der Beschaffenheit des Schemas $\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ sind nun verschiedene Fälle zu unterscheiden. Es sei

$$-\Delta = (a-d)^2 + 4bc = (a+d)^2 - 4n,$$

so betrachten wir nach der Reihe die folgenden drei Fälle:

I) Δ nicht $\equiv 0 \pmod{q}$,

II) $\Delta \equiv 0 \pmod{q}$,

1) b oder c nicht $\equiv 0 \pmod{q}$,

2) $b \equiv c \equiv 0$, also $a \equiv d \equiv \pm\sqrt{n} \pmod{q}$.

Aus den Bedingungen (B) ist leicht ersichtlich, dass Formen (P, Q, R) vom Theiler q nur im Falle II, 2 zulässige Ansätze liefern können. Desshalb darf in den übrigen Fällen $P = c_1$ als durch q nicht theilbar vorausgesetzt werden; denn in jeder Formenclasse, welche q nicht als Theiler besitzt, giebt es Individuen, deren erster Coefficient nicht durch q theilbar ist. In den Fällen I und II, 1 kommen daher, wie die Bedingungen B' zeigen, nur diejenigen Formenclassen (P, Q, R) in Betracht, für welche

$$\varkappa \equiv \varepsilon(a+d) \pmod{q}$$

ist, und jede liefert so viele zulässige Ansätze als die Congruenz

$$(\mathrm{C})\qquad c\alpha^2 + (d-a)\,\alpha\gamma - b\gamma^2 \equiv \varepsilon P \pmod{q}$$

Lösungen besitzt. Die Zahl dieser Lösungen ist aber im Falle I, wie sich ohne Mühe nachweisen lässt, stets gleich $\frac{1}{2}\left[q - \left(\frac{-\Delta}{q}\right)\right]$. Daher ergiebt sich für die Zahl der betrachteten Nullstellen von $\Phi(\omega)$:

$$\frac{1}{2}\left[q - \left(\frac{-\Delta}{q}\right)\right] \cdot \sum \mathrm{H}(4n - \varkappa^2),$$

wobei die Summation zu erstrecken ist über alle Werthe von $\varkappa$, welche absolut genommen kleiner als $2\sqrt{n}$ sind und der Bedingung

$$\varkappa \equiv \pm (a + d) \pmod{q}$$

genügen. Hier sind auch im Falle $a + d \equiv 0 \pmod{q}$ die doppelten Vorzeichen beizubehalten, so dass dann jeder Werth $\varkappa \equiv 0 \pmod{q}$ zweimal zu nehmen ist.

Im Falle II, 1 lässt sich die Congruenz (C) folgendermassen schreiben:

$$\left.\begin{aligned} \left(b\gamma - \frac{d-a}{2}\alpha\right)^2 &\equiv \varepsilon b P \\ \text{oder } \left(c\alpha + \frac{d-a}{2}\gamma\right)^2 &\equiv \varepsilon c P \end{aligned}\right\} \pmod{q},$$

je nachdem b oder c nicht durch q theilbar ist.

Lösungen (α, γ) existiren offenbar nur dann, wenn das Legendresche Zeichen

$$\left(\frac{\varepsilon b P}{q}\right) \left(\text{oder } \left(\frac{\varepsilon c P}{q}\right)\right) = +1$$

ist und zwar giebt es dann q Lösungen. Falls

$$q \equiv 3 \pmod{4},$$

kann das Vorzeichen ε immer und nur auf eine Weise bestimmt werden, dass $\left(\frac{\varepsilon b P}{q}\right) \left(\text{oder } \left(\frac{\varepsilon c P}{q}\right)\right) = +1$ ist.

Daher ist die Zahl der Nullstellen in diesem Falle

$$\frac{1}{2} q \cdot \sum \left[\mathsf{H}(4n - \varkappa^2) - \mathsf{H}\left(\frac{4n - \varkappa^2}{q^2}\right)\right],$$

wo die Summe zu erstrecken ist, über alle Werthe von $\varkappa$, welche absolut genommen kleiner als $2\sqrt{n}$ sind und der Bedingung

$$\varkappa \equiv \pm 2\sqrt{n} \pmod{q}$$

genügen. Dabei rührt das subtractive Glied unter dem Summenzeichen davon her, dass die Formen vom Theiler q auszuschliessen sind; da jede Form doppelt so oft aufgenommen ist, als für sie Lösungen der Congruenz für (α, γ) vorhanden sind, so musste noch der Factor $\frac{1}{2}$ vor das Summenzeichen gesetzt werden.

Endlich ist, wie in der Folge stets,

$$\mathsf{H}(m) = 0,$$

wenn m keine ganze Zahl ist.

Falls nun zweitens

$$q \equiv 1 \pmod{4}$$

ist, erfordert die Bedingung $\left(\frac{\varepsilon b P}{q}\right) \left(\text{oder } \left(\frac{\varepsilon c P}{q}\right)\right) = +1$, dass

$$\left(\frac{P}{q}\right) = \left(\frac{b}{q}\right) \left(\text{oder } \left(\frac{c}{q}\right)\right)$$

ist Für die Zahl der Nullstellen ergiebt sich also

$$q \cdot \sum \mathsf{H}_{+1}(4n - \varkappa^2)$$

oder

$$q \cdot \sum \mathsf{H}_{-1}(4n - \varkappa^2),$$

je nachdem $\left(\frac{b}{q}\right)$ $\left(\text{oder } \left(\frac{c}{q}\right)\right) = +1$ oder -1 ist. Dabei bedeutet $\mathsf{H}_\varepsilon(m)$ die Zahl der Classen der Determinante $-m$, welche den Charakter $\left(\frac{P}{q}\right) = \varepsilon$ besitzen, und die Summation ist über dieselben Werthe von $\varkappa$ zu erstrecken, wie in der vorigen Summe.

Was endlich den Fall II, 2 angeht, so folgt aus den Bedingungen (B), dass

$$P \equiv Q \equiv R \equiv 0, \quad \varkappa \equiv \varepsilon 2\sqrt{n} \;(\text{mod. } q)$$

sein muss. Dann sind die Congruenzen (B) für jede Substitution $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ erfüllt, so dass die letztere jede der

$$\lambda = \frac{q(q^2-1)}{2}$$

incongruenten Substitutionen sein kann. Die Zahl der Nullstellen ist also in diesem Falle

$$\frac{q(q^2-1)}{2} \sum \mathsf{H}\left(\frac{4n - \varkappa^2}{q^2}\right),$$

wo die Summation über dieselben Werthe von $\varkappa$ zu nehmen ist, wie im Falle II, 1.

§ 7.

Zahl der Nullstellen von $\Phi(\omega)$, welche in die Ecken des Fundamentalpolygons fallen*).

Um die Ordnung des Verschwindens von $\Phi(\omega)$ für einen rationalen Werth $\omega = -\frac{\delta}{\gamma}$ zu bestimmen, nehme man die Repräsentanten $R_i(\omega)$ von der Form

$$S\left(\frac{A\,\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta} + B}{D}\right) = \frac{a_i\omega + b_i}{c_i\omega + d_i}$$

an, wo α, β irgend zwei, der Bedingung $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ genügende ganze Zahlen bedeuten, A, D, B dieselben Werthe durchlaufen, wie in § 4 der ersten Abhandlung und die Substitutionen S der Congruenz $\frac{a_i\omega + b_i}{c_i\omega + d_i} \equiv \frac{a\omega + b}{c\omega + d}$ (mod. q) entsprechend zu wählen sind.

*) Vgl. Gierster I, pag. 45.

$\Phi(\omega)$ verschwindet nun für $\omega = -\frac{\delta}{\gamma}$ nur dann, wenn ein Repräsentant $R_i\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right)$ zu $-\frac{\delta}{\gamma}$ relativ äquivalent wird. Und zwar verschwindet (nach pag. 171) der betreffende Factor

$$\vartheta\left[j_r(\omega) - j_r(R_i(\omega)) - c_r\right]$$

von $\Phi(\omega)$ von der Ordnung 1 oder $\frac{A}{D}$, je nachdem

$$A \geqq D \quad \text{oder} \quad A < D$$

ist. Setzt man nun $\omega = -\frac{\delta}{\gamma}$ in $R_i(\omega)$ ein, so lautet der entstehende Bruch in reducirter Form:

$$\frac{\dfrac{a_\iota \delta - b_\iota \gamma}{A}}{\dfrac{c_\iota \delta - d_\iota \gamma}{A}}.$$

Die nothwendige und hinreichende Bedingung für die relative Aequivalenz dieses Bruches mit $-\frac{\delta}{\gamma}$ drückt sich durch die Congruenzen:

$$\text{(1)} \qquad \left.\begin{aligned} a\delta - b\gamma &\equiv A\varepsilon\delta \\ c\delta - d\gamma &\equiv -A\varepsilon\gamma \end{aligned}\right\} \text{(mod. } q)$$

aus, wo ε entweder $= +1$ oder $= -1$ zu nehmen ist.

Die vorstehenden Congruenzen sind nur dann mit einander verträglich, wenn die Determinante

$$(a - \varepsilon A)(d - \varepsilon A) - bc \equiv -\varepsilon A(a + d) + A^2 + AD \equiv 0 \text{ (mod. } q),$$

also

$$A + D \equiv \varepsilon(a + d) \text{ (mod. } q)$$

ist. Da ausserdem

$$A \cdot D \equiv n \text{ (mod. } q),$$

so muss sein

$$\varepsilon A \equiv \frac{a + d \pm \sqrt{-\Delta}}{2} \text{ (mod. } q),$$

wobei $-\Delta$, wie früher, den Werth

$$-\Delta = (a - d)^2 + 4bc = (a + d)^2 - 4n$$

besitzt. Es sind nun wieder die einzelnen Fälle, welche das Schema $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ darbieten kann, zu unterscheiden.

I. Fall. Δ ist nicht $\equiv 0$ (mod. q).

Besitzt dann das Legendre'sche Zeichen $\left(\frac{-\Delta}{q}\right)$ den Werth -1, so wird die Congruenz, welche A erfüllen muss, widersinnig. $\Phi(\omega)$ verschwindet also in keiner Ecke des Fundamentalpolygons. Ist aber

$\left(\frac{-\Delta}{q}\right) = +1$, so gehen die Congruenzen (1), falls A einen Theiler von n bezeichnet, für welchen

$$\varepsilon A \equiv \frac{a+d \pm \sqrt{-\Delta}}{2} \pmod{q}$$

ist, über in

$$\left.\begin{array}{l}(a-d \pm \sqrt{-\Delta})\delta - 2b \cdot \gamma \equiv 0 \\ 2c \cdot \delta + (a-d \mp \sqrt{-\Delta})\gamma \equiv 0\end{array}\right\} \pmod{q}.$$

Dieselben besitzen $\frac{q-1}{2}$ incongruente Lösungen $\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right)$ für die oberen, wie für die unteren Vorzeichen, welche Lösungen ebenso viele Ecken des Fundamentalpolygons ergeben, in denen $\Phi(\omega)$ verschwindet. Für jede dieser Ecken entsprechen aber einem zulässigen Theiler A von n D oder A Nullstellen, je nachdem $A \geq D$ oder $A < D$ ist.

$\Phi(\omega)$ besitzt also für den jetzt betrachteten Fall im Ganzen

$$(q-1)\, U_{\frac{1}{2}(a+d)+\frac{1}{2}\sqrt{-\Delta}} + (q-1)\, U_{\frac{1}{2}(a+d)-\frac{1}{2}\sqrt{-\Delta}}$$

Nullstellen in den Ecken des Fundamentalpolygons, wenn mit U_k die Summe derjenigen Divisoren von n bezeichnet wird, welche kleiner als $\sqrt{n}$ und $\equiv \pm k \pmod{q}$ sind, wobei, wenn n ein reines Quadrat und $\sqrt{n} \equiv \pm k \pmod{q}$ ist, noch $\frac{1}{2}\sqrt{n}$ zu jener Summe hinzuzunehmen ist.

II. Fall. $\Delta \equiv 0$, also $a + d \equiv \pm 2\sqrt{n} \pmod{q}$.

1) b oder c ist nicht $\equiv 0 \pmod{q}$.

Dann muss $A \equiv \varepsilon\sqrt{n} \pmod{q}$ sein, und für jeden solchen Theiler von n besitzen die Congruenzen (1) $\frac{q-1}{2}$ incongruente Lösungen $-\frac{\delta}{\gamma}$. Die Zahl der betrachteten Nullstellen von $\Phi(\omega)$ ist also jetzt:

$$(q-1) \cdot U_{\sqrt{n}}.$$

Ist 2) $b \equiv c \equiv 0$, also $a \equiv d \equiv \pm\sqrt{n} \pmod{q}$, so muss wieder $A \equiv \varepsilon\sqrt{n} \pmod{q}$ sein. Ist diese Bedingung erfüllt, so bestehen die Congruenzen (1) für jeden Werth von $-\frac{\delta}{\gamma}$, so dass $\Phi(\omega)$ in allen $\frac{\lambda}{q} = \frac{q^2-1}{2}$ Ecken des Fundamentalpolygons verschwindet. Es sind also im Ganzen

$$(q^2-1)\left(U_{\sqrt{n}} - \varepsilon\right)$$

Nullstellen der betrachteten Art vorhanden, wo $\varepsilon = \frac{1}{2}$ oder 0 zu setzen ist, je nachdem n Quadrat ist oder nicht. Dieses Correctionsglied ε rührt davon her, dass, falls n ein Quadrat ist, ein Repräsentant bei der Bildung von $\Phi(\omega)$ auszuschliessen ist (vgl. § 4).

§ 8.

Zusammenstellung.

Indem ich hier die Resultate der letzten Paragraphen in einer leichten (nur formalen) Modification zusammenstelle, schicke ich zunächst über die Bezeichnungen Folgendes voraus. Die Gesammtordnung des Verschwindens der Function

$$\Phi(\omega) = \prod_i{}' \vartheta\left[j_r(\omega) - j_r(R_i(\omega)) - c_r\right],$$

während ω das Fundamentalpolygon durchläuft, soll mit

$$\sigma$$

bezeichnet werden, wobei von denjenigen Nullstellen abgesehen wird, welche von der Wahl der Werthe $\omega_1, \omega_2 \dots \omega_{2p-2}$ abhängen. Ferner möge das auf den Summationsbuchstaben $\varkappa$ bezügliche Zeichen

$$\sum_k{}'$$

andeuten, dass über alle positiven und negativen Zahlen $\varkappa$ summirt werden soll, welche absolut genommen, *nicht grösser* als $2\sqrt{n}$ und $\equiv \pm k \pmod{q}$ sind. Dabei sind auch für $k \equiv 0 \pmod{q}$ beide Vorzeichen beizubehalten, so dass in diesem Falle jeder Werth $\varkappa \equiv 0 (\mathrm{mod.}\, q)$ zwei Mal zu nehmen ist.

$$\mathsf{H}(m)$$

bezeichnet die Zahl der Classen positiver quadratischer Formen der Determinante $-m$,

$$\mathsf{H}_{+1}(m) \quad \text{bez.} \quad \mathsf{H}_{-1}(m)$$

die Zahl derjenigen Classen, durch welche nur quadratische Reste bezüglich Nichtreste von q darstellbar sind.

Dabei ist jede Classe, deren reducirte Form die Gestalt $(P, 0, P)$ bez. (P, P, P) besitzt, $1/2$ bez. $1/3$ Mal zu zählen; ferner ist

$$\mathsf{H}(0) = -\frac{1}{12}, \quad \mathsf{H}_{+1}(0) = \mathsf{H}_{-1}(0) = 0$$

und, falls m keine ganze Zahl ist,

$$\mathsf{H}(m) = 0$$

zu setzen. Endlich ist unter

$$U_k$$

die Summe derjenigen Divisoren von n zu verstehen, welche kleiner als $\sqrt{n}$ und $\equiv \pm k \pmod{q}$ sind, wobei zu dieser Summe noch $\frac{1}{2}\sqrt{n}$ hinzuzufügen ist, falls n ein Quadrat und $\frac{1}{2}\sqrt{n} \equiv \pm k (\mathrm{mod.}\, q)$ ist*).

*) Die Bezeichnung „U_k“ ist der Gierster'schen Abhandlung I entnommen. Die Zahl σ stimmt genau überein mit der von Herrn Gierster als „linke Seite der Classenzahlrelation“ bezeichneten Zahl.

Der Werth von σ ergiebt sich nun aus folgender Tabelle:

I. Fall.

$$-\Delta = (a-d)^2 + 4bc = (a+d)^2 - 4n \quad \text{nicht} \quad \equiv 0 \pmod{q}.$$

$$1) \quad \left(\frac{-\Delta}{q}\right) = -1.$$

$$\sigma = \frac{q+1}{2} \cdot \sum_{a+d} \mathsf{H}(4n - x^2).$$

$$2) \quad \left(\frac{-\Delta}{q}\right) = +1.$$

$$\sigma = \frac{q-1}{q} \cdot \sum_{a+d} \mathsf{H}(4n - x^2) + (q-1)\, U_{\frac{1}{2}\sqrt{-\Delta}+\frac{1}{2}(a+d)}$$
$$+ (q-1)\, U_{\frac{1}{2}\sqrt{-\Delta}-\frac{1}{2}(a+d)}.$$

II. Fall.

$$-\Delta = (a-d)^2 + 4bc = (a+d)^2 - 4n \equiv 0 \pmod{q}.$$

1) b oder c nicht $\equiv 0 \pmod{q}$.

$$\sigma = \frac{q}{2} \cdot \sum_{2\sqrt{n}} \left[\mathsf{H}(4n - x^2) - \mathsf{H}\left(\frac{4n-x^2}{q^2}\right)\right] + (q-1)\, U_{\sqrt{n}},$$

wenn $q \equiv 3 \pmod{4}$,

$$\sigma = q \cdot \sum_{2\sqrt{n}} \mathsf{H}_{+1}(4n - x^2) + (q-1)\, U_{\sqrt{n}},$$

wenn $q \equiv 1 \pmod{4}$ und $\left(\frac{b}{q}\right)$ oder $\left(\frac{c}{q}\right) = 1$,

$$\sigma = q \cdot \sum_{2\sqrt{n}} \mathsf{H}_{-1}(4n - x^2) + (q-1)\, U_{\sqrt{n}},$$

wenn $q \equiv 1 \pmod{4}$ und $\left(\frac{b}{q}\right)$ oder $\left(\frac{c}{q}\right) = -1$.

2) $b \equiv c \equiv 0 \pmod{q}$.

$$\sigma = \frac{q(q^2-1)}{2} \cdot \sum_{2\sqrt{n}} \mathsf{H}\left(\frac{4n-x^2}{q^2}\right) + (q^2-1)\, U_{\sqrt{n}} + \eta,$$

wo

$$\eta = \frac{(q^2-1)(q-6)}{12} = 2(p-1) \quad \text{oder} \quad \eta = 0$$

zu setzen ist, je nachdem n ein Quadrat ist oder nicht.

§ 9.

Der Fall $n = 1$.

Da bei der vorstehenden Untersuchung über die Zahl n keine andere beschränkende Voraussetzung gemacht worden ist, als dass sie durch q nicht theilbar sei, so darf $n = 1$ gesetzt werden. Für diesen Fall reducirt sich $\Phi(\omega)$ auf einen einzigen Factor

$$\vartheta\left[j_r(\omega) - j_r\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right) - c_r\right],$$

wo $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ eine beliebige Substitution, welche nicht zur Gruppe $T(\omega)$ gehört, bedeutet. Die allgemeinen Formeln für σ geben nun folgendes Resultat:

„Die Zahl der von der Wahl der Werthe $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_{2p-2}$ unabhängigen und im Fundamentalpolygon liegenden Nullstellen der Function

$$\vartheta\left[j_r(\omega) - j_r\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right) - c_r\right]$$

beträgt

$$\begin{array}{lll} \frac{1}{2}(q-1), & \text{wenn } \alpha+\delta \equiv \pm 2 \pmod{q}, & \\ \frac{1}{3}\left(q-\left(\frac{-3}{q}\right)\right), & \text{wenn } \alpha+\delta \equiv \pm 1 \pmod{q}, & \\ \frac{1}{2}\left(q-\left(\frac{-1}{q}\right)\right), & \text{wenn } \alpha+\delta \equiv \quad 0 \pmod{q} & \textit{ist.} \end{array}$$

In allen übrigen Fällen ist diese Zahl gleich Null.“

II. Abschnitt.

Die Classenzahlrelationen der 7^{ten} Stufe.

Die zweite Bestimmungsart der Zahl σ und mit ihr die Herstellung der Classenzahlrelationen der q^{ten} Stufe erfordert ein genaueres Studium der überall endlichen Integrale der q^{ten} Stufe. Abgesehen von einigen nichtprimzahligen Werthen von q habe ich bislang diese Untersuchung der Integrale vollständig nur für den Fall $q = 7$ durchführen können, auf welchen sich die weiteren Entwicklungen beschränken mögen.

§ 1.

Die überallendlichen Integrale der 7^{ten} Stufe.

Die Integrale der 7^{ten} Stufe habe ich auf drei verschiedenen Wegen erhalten. Der Kürze halber will ich hier nur den einen, an bekannte Resultate anknüpfenden angeben.

Herr Klein hat gezeigt, dass die Verhältnisse der drei Grössen*)

---

*) „Ueber gewisse Theilwerthe der Θ-Functionen“. Diese Annalen Bd. XVII, pag. 569 ff. Die Bezeichnung habe ich in Rücksicht auf die späteren Entwicklungen etwas modificirt.

$$z_1(\omega) = \quad i \cdot q^{\frac{16}{7}}\, \vartheta_1(4\omega\pi\,|\,q^7) = \quad \sum (-1)^\nu q^{\frac{(7(2\nu+1)+8)^2}{28}},$$

$$z_2(\omega) = \quad i \cdot q^{\frac{1}{7}}\, \vartheta_1(2\omega\pi\,|\,q^7) = \quad \sum (-1)^\nu q^{\frac{(7(2\nu+1)+1)^2}{28}},$$

$$z_4(\omega) = -i \cdot q^{\frac{1}{7}}\, \vartheta_1(\omega\pi\,|\,q^7) = - \sum (-1)^\nu q^{\frac{(7(2\nu+1)+2)^2}{28}}$$

(wo $q = e^{i\pi\omega}$) dann und nur dann für zwei Argumente ω und ω' dieselben Werthe annehmen, wenn ω und ω' relativ äquivalente Grössen sind, die Aequivalenz bezogen auf die Gruppe $T(\omega)$ (mod. 7).

Zwischen $z_1 : z_2 : z_4$ besteht die eine algebraische Beziehung

$$f(z_1, z_2, z_4) \equiv z_1^3 z_4 + z_4^3 z_2 + z_2^3 z_1 = 0.$$

Die überall endlichen Integrale der 7^{ten} Stufe sind nun offenbar identisch mit den Integralen erster Gattung der Curve 4^{ter} Ordnung $f = 0$*). Es werden daher $p = 3$ linear unabhängige Integrale der 7^{ten} Stufe die folgenden sein:

$$\int \frac{\sum c_1 z_2 d z_4}{c_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + c_2 \frac{\partial f}{\partial z_2} + c_3 \frac{\partial f}{\partial z_4}} \cdot z_r, \qquad (r = 1, 2, 4),$$

wobei c_1, c_2, c_3 Constante bedeuten, von welchen das Integral bekanntlich vollständig unabhängig ist.

Setzt man nun den Factor von z_r gleich

$$d\psi(\omega),$$

so findet man unter Berücksichtigung der Formeln, welche die Veränderungen von z_1, z_2, z_4 angeben, wenn ω durch $\omega + 1$, bez. $-\frac{1}{\omega}$ ersetzt wird, dass

$$\frac{d\psi(\omega+1)}{d(\omega+1)} = \frac{d\psi(\omega)}{d\omega}, \qquad \frac{d\psi\left(-\frac{1}{\omega}\right)}{d\left(-\frac{1}{\omega}\right)} = -i\omega\sqrt{-i\omega}\,\frac{d\psi(\omega)}{d\omega}.$$

Nun ist, wenn in üblicher Weise

$$\vartheta_1'(0\,|\,q) = \vartheta_1'(0, \omega) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} (-1)^\nu (2\nu+1)\, q^{\frac{(2\nu+1)^2}{4}}$$

gesetzt wird:

$$\vartheta_1'(0, \omega+1) = \vartheta_1'(0, \omega),$$

$$\vartheta_1'\left(0, -\frac{1}{\omega}\right) = -i\omega\sqrt{-i\omega}\,\vartheta_1'(0, \omega).$$

*) Die Perioden dieser Integrale hat Herr Poincaré untersucht: Comptes Rendus 1883. Die Resultate des Herrn Poincaré lassen sich im Anschluss an unsere weiteren Betrachtungen leicht beweisen.

Die Function

$$f(\omega) = \frac{1}{\vartheta_1'(0 \mid q)} \cdot \frac{d\psi(\omega)}{d\omega}$$

bleibt daher ungeändert, wenn ω durch $S(\omega)$ ersetzt wird, ist also eine einwerthige Function der absoluten Invariante $J(\omega)$. Nun zeigen aber die Entwicklungen der Grössen $z_1, z_2, z_4, \vartheta_1'(0 \mid q)$ nach Potenzen von q, dass $f(\omega)$ für keine Stelle des Fundamentaldreiecks unendlich gross wird.

Daher ist $f(\omega)$ eine Constante C, also

$$d\psi(\omega) = C \cdot \vartheta_1'(0 \mid q) \cdot d\omega.$$

Setzen wir

$$I_r(\omega) = -\frac{1}{7}\int_{i\infty}^{\omega} z_r \cdot \vartheta_1'(0 \mid q) \cdot \frac{dq}{q}, \quad \text{für } r = 1, 2, 4,$$

so werden $I_1(\omega), I_2(\omega), I_4(\omega)$ *drei linear unabhängige Integrale der* 7ten *Stufe bilden.*

§ 2.

Reihenentwicklungen der Integrale 7ter Stufe.

Werden nun statt $z_1, z_2, z_4, \vartheta_1'(0 \mid q)$ die Reihenentwicklungen dieser Grössen nach Potenzen von q eingetragen, so ergeben sich folgende Gleichungen

$$I_1(\omega) = \sum_{m \equiv 1} \frac{\psi_1(m)}{m} q^{\frac{2m}{7}},$$

$$I_2(\omega) = \sum_{m \equiv 2} \frac{\psi_2(m)}{m} q^{\frac{2m}{7}},$$

$$I_4(\omega) = \sum_{m \equiv 4} \frac{\psi_4(m)}{m} q^{\frac{2m}{7}},$$

wobei das Zeichen

$$\sum_{m \equiv \varkappa}$$

hier, wie in der Folge, andeuten soll, dass die Summation zu erstrecken ist auf alle positiven Zahlen m, welche $\equiv \varkappa (\text{mod. } 7)$ sind.

Die zahlentheoretischen Functionen $\psi_r(m)$ sind definirt durch die Summen

$$\psi_1(m) = -\tfrac{1}{2}\sum (-1)^{\nu+\mu}(2\mu+1);$$
$$8m = 7(2\mu+1)^2 + (7(2\nu+1)+8)^2;$$

$$\psi_2(m) = -\tfrac{1}{2}\sum (-1)^{\nu+\mu}(2\mu+1);$$
$$8m = 7(2\mu+1)^2 + (7(2\nu+1)+4)^2;$$

$$\psi_4(m) = +\tfrac{1}{2}\sum (-1)^{\nu+\mu}(2\mu+1);$$
$$8m = 7(2\mu+2)^2 + (7(2\nu+1)+2)^2,$$

jede Summe erstreckt über alle Lösungen in ganzen positiven oder negativen Zahlen μ, ν der neben der Summe stehenden Gleichung. Die Definition der Functionen $\psi(m)$ lässt sich noch sehr vereinfachen. Es genügt, diese Vereinfachung für $\psi_4(m)$ durchzuführen, da bei $\psi_1(m)$, $\psi_2(m)$ sich Alles analog gestaltet.

Die Gleichung

$$8m = \varrho^2 + 7\tau^2$$

zieht die andere

$$4m = \left(\frac{\varrho + 7\tau}{4}\right)^2 + 7\left(\frac{\varrho - \tau}{4}\right)^2$$

nach sich. Infolge davon kann jeder Lösung der Gleichung

$$8m = (7(2\nu + 1)^2 + 2)^2 + 7(2\mu + 1)^2$$

eine solche Lösung der Gleichung

$$(1) \qquad 4m = \alpha^2 + 7\beta^2$$

zugeordnet werden, in welcher α Rest von 7 und $\alpha + \beta \equiv 2 \pmod{4}$ ist. Und zwar geschieht die Zuordnung durch die Gleichungen

$$\begin{cases} \alpha = 7\left(\frac{\nu + \mu}{2}\right) + 4; & \alpha + \beta = 2(2\mu + 1), \\ \beta = \frac{\mu - 7\nu}{2} \quad - 2; & \alpha - 4 = \frac{7}{2}(\nu + \mu), \end{cases}$$

wenn $\nu + \mu$ eine gerade Zahl, dagegen durch die Gleichungen

$$\begin{cases} \alpha = 7\left(\frac{\nu - \mu - 1}{2}\right) + 4; & \alpha + \beta = -2(2\mu + 1), \\ \beta = -\frac{7\nu + \mu + 1}{2} - 2; & \alpha - 4 = \frac{7}{2}(\nu - \mu - 1), \end{cases}$$

wenn $\nu + \mu$ eine ungerade Zahl ist.

Nun ist

$$\psi_4(m) = \frac{1}{2}\sum_{\nu+\mu \text{ gerade}} (2\mu + 1) - \frac{1}{2}\sum_{\nu+\mu \text{ ungerade}} (2\mu + 1),$$

also

$$\psi_4(m) = \frac{1}{2}\sum (\alpha + \beta).$$

Ist jetzt m ungerade, so erfüllt jede Lösung der Gleichung (1) die Bedingung $\alpha + \beta \equiv 2 \pmod{4}$. Es treten also die Lösungen α, β und $\alpha, -\beta$ gleichzeitig auf, so dass

$$\psi_4(m) = \frac{1}{2}\sum \alpha$$

wird, die Summe erstreckt über *alle* Lösungen der Gleichung (1), in welchen α Rest von 7 ist.

Wenn aber m gerade ist, so kann zunächst

$$\psi_4(m) = \frac{1}{2}\sum \alpha - \frac{1}{2}\sum_0 (\alpha + \beta)$$

gesetzt werden, wo die erstere Summe zu nehmen ist über alle Lösungen der Gleichung (1), für welche α Rest von 7 ist, die letztere Summe nur über diejenigen dieser Lösungen, welche ausserdem der Bedingung $\alpha + \beta \equiv 0 \pmod{4}$ genügen. Jeder solchen Lösung können wir aber eine Lösung der Gleichung

$$2m = \alpha_1^2 + 7\beta_1^2$$

vermöge der Formeln

$$\alpha_1 = \frac{\alpha - 7\beta}{4}, \qquad \beta_1 = \frac{\alpha + \beta}{4}$$

zuordnen. Es ist also $\sum_0 (\alpha + \beta) = 4\sum \beta_1 = 0$, daher auch für einen geraden Werth von m

$$\psi_4(m) = \frac{1}{2}\sum \alpha.$$

Die analogen Betrachtungen für $\psi_1(m)$ und $\psi_2(m)$ ergeben ein entsprechendes Resultat, so dass man schliesslich folgende Entwicklungen der Integrale erhält:

„*Es ist, für* $r = 1, 2, 4$:

$$I_r(\omega) = \sum_{m \equiv r} \frac{\psi(m)}{m}\, q^{\frac{2m}{7}},$$

wobei die zahlentheoretische Function $\psi(m)$ *definirt ist durch die Gleichung:*

$$\psi(m) = \frac{1}{2}\sum \alpha,$$

die Summe erstreckt über alle diejenigen Lösungen in positiven und negativen ganzen Zahlen α, β *der Gleichung*

$$4m = \alpha^2 + 7\beta^2,$$

in welchen α *quadratischer Rest von* 7 *ist.*“ *)

§ 3.

Verhalten der Integrale bei linearer Transformation von ω.

Aus der ursprünglichen Definition der Integrale ergeben sich folgende Relationen:

(1) $$I_r(\omega + 1) = \gamma^r I_r(\omega); \quad (r = 1, 2, 4),$$

*) Es ist $\psi(m) = -\frac{1}{2}\eta(m)$, wo $\eta(m)$ die von Herrn Gierster, II. pag. 203, eingeführte Function bedeutet.

$$(2)\quad \begin{cases} I_1\left(-\frac{1}{\omega}\right) = A\cdot I_1(\omega) + B\cdot I_2(\omega) + C\cdot I_4(\omega) + p_1, \\ I_2\left(-\frac{1}{\omega}\right) = B\cdot I_1(\omega) + C\cdot I_2(\omega) + A\cdot I_4(\omega) + p_2, \\ I_4\left(-\frac{1}{\omega}\right) = C\cdot I_1(\omega) + A\cdot I_2(\omega) + B\cdot I_4(\omega) + p_4, \end{cases}$$

wobei

$$\gamma = e^{\frac{2i\pi}{7}},\quad A = \frac{\gamma^2-\gamma^5}{\sqrt{-7}},\quad B = \frac{\gamma-\gamma^6}{\sqrt{-7}},\quad C = \frac{\gamma^4-\gamma^3}{\sqrt{-7}}$$

gesetzt ist und p_1, p_2, p_4 numerische Constanten bedeuten, aus denen sich die Perioden der Integrale zusammensetzen.

Die Formeln (1) und (2) reichen bekanntlich aus, um die Veränderung festzustellen, welche die Integrale erleiden, wenn ω durch $S(\omega)$ ersetzt wird, wo $S(\omega)$ irgend eine Substitution bezeichnet. Jedoch gelangt man gewöhnlich bei vorgegebenem $S(\omega)$ rascher zum Ziele durch directe Betrachtungen als durch Zusammensetzung der Substitutionen $\omega+1$ und $-\frac{1}{\omega}$.

Beispiele hierzu, welche im folgenden Paragraphen von Wichtigkeit werden, bieten die Fälle in welchen

$$S(\omega) \equiv 2\omega \pmod{7}$$

oder

$$S(\omega) \equiv 4\omega \pmod{7}$$

ist. Wir bezeichnen mit $U_1(\omega)$ eine Substitution der ersten, mit $U_2(\omega)$ eine solche der zweiten Art. Die Substitutionen $U_1(\omega)$ und $U_2(\omega)$ bilden mit der Identität eine in der Gesammtheit der (mod. 7) betrachteten Substitutionen enthaltene Untergruppe, indem

$$U_1^2(\omega) \equiv U_2(\omega),\quad U_2^2(\omega) \equiv U_1(\omega),\quad U_1\,U_2(\omega) \equiv U_2\,U_1(\omega) \equiv \omega \pmod{7}$$

ist. Nun hat man jedenfalls, für $r = 1, 2, 4$:

$$I_r(U_1(\omega)) = c_1^{(r)}\,I_1(\omega) + c_2^{(r)}\,I_2(\omega) + c_4^{(r)}\,I_4(\omega) + c^{(r)},$$

wo die Coefficienten c noch unbekannte Zahlwerthe besitzen.

Wird ω durch $\omega+1$ ersetzt, so erhält man, da

$$U_1(\omega+1) \equiv U_1(\omega) + 2 \pmod{7}$$

ist:

$$\gamma^{2r}\,I_r(U_1(\omega)) = \gamma c_1^{(r)}\,I_1(\omega) + \gamma^2 c_2^{(r)}\,I_2(\omega) + \gamma^4 c_4^{(r)}\,I_4(\omega),$$

also, da die Integrale linear unabhängig sind:

$$I_r(U_1(\omega)) = c_r \cdot I_{2r}(\omega)\ ^{*)},$$

wobei, wie in der Folge stets geschehen soll, rein additive Constanten, welche eventuell auf den rechten Seiten der Relationen auftreten, kürzehalber fortgelassen sind.

*) Die Indices der Integrale sind stets (mod. 7) zu reduciren.

Wird nun ω durch $U_1(\omega)$ ersetzt, so ergiebt sich

$$I_r\big(U_2(\omega)\big) = c_r \cdot c_{2r}\, I_{4r}(\omega).$$

Setzt man endlich $-\frac{1}{\omega}$ statt ω und berücksichtigt die Congruenz

$$U_2\left(-\frac{1}{\omega}\right) \equiv \frac{-1}{U_1(\omega)} \pmod{7},$$

so folgt (für $r = 1$):

$$A c_1 I_2(\omega) + B c_2 I_4(\omega) + C c_4 \cdot I_1(\omega) = c_1 c_2 \big(C I_1(\omega) + A I_2(\omega) + B I_4(\omega)\big),$$

also

$$c_1 = c_1 c_4, \quad c_2 = c_1 c_4, \quad c_4 = c_1 c_4$$

oder

$$c_1 = c_2 = c_4 = 1.$$

Die gesuchten Relationen lauten also:

$$\left.\begin{array}{l} I_r\big(U_1(\omega)\big) = I_{2r}(\omega) \\ I_r\big(U_2(\omega)\big) = I_{4r}(\omega) \end{array}\right\} \text{ für } r = 1, 2, 4.$$

§ 4.

Transformation n^{ter} Ordnung der Integrale.

Es mögen die $\Phi(n)$ Ausdrücke

$$R_1(\omega),\ R_2(\omega), \ldots$$

ein zu dem Schema

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \pmod{7}$$

gehörendes Repräsentantensystem der Transformation n^{ter} Ordnung bilden. Betrachtet man dann die Function

$$\psi(\omega) = \sum_{i=1}^{i=\Phi(n)} I_r\big(R_i(\omega)\big),$$

so besitzt dieselbe die Eigenschaft, sich bis auf eine additive Constante zu reproduciren, wenn ω durch $T(\omega)$ ersetzt wird; überdiess ist $\psi(\omega)$ eine überall endliche Function von ω, folglich (nach pag. 170) ein Integral erster Gattung.

Daher müssen Gleichungen folgender Gestalt bestehen:

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{i=\Phi(n)} I_r\big(R_i(\omega)\big) = \varkappa_1^{(r)} I_1(\omega) + \varkappa_2^{(r)} I_2(\omega) + \varkappa_4^{r} I_4(\omega),$$
$$(r = 1, 2, 4),$$

wobei wieder von eventuell rechter Hand noch hinzutretenden additiven Constanten abgesehen wird*).

Zu jedem Schema $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (mod. 7) wird ein solches System von Gleichungen (1) gehören; man bemerke aber, dass alle diese Gleichungssysteme aus einem derselben dadurch erhalten werden können, dass man in diesem ω durch $S_1(\omega)$, $S_2(\omega)$ ... ersetzt, wo S_1, S_2 .. passend gewählte Substitutionen bedeuten. Man kann sich desshalb darauf beschränken, die weitere Betrachtung an ein specielles Schema, sagen wir das Schema

$$\begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ (mod. 7)}$$

anzuknüpfen. Es mögen also nun die Repräsentanten $R_i(\omega)$ zu diesem Schema gehören, so dass

$$R_i(\omega) \equiv n\,\omega \text{ (mod. 7)}$$

ist. Wird ω durch $\omega + 1$ ersetzt, so erhält die linke Seite der Gleichung (1) den Factor γ^{rn}, während zu den einzelnen Termen der rechten Seite die Factoren γ, γ^2, γ^4 bezüglich hinzutreten. Ist daher n Nichtrest von 7, so muss

$$\varkappa_1^{(r)} = \varkappa_2^{(r)} = \varkappa_3^{(r)} = 0$$

sein, und die Gleichungen (1) lauten einfach

$$\text{(1a)} \qquad \sum_i I_r(R_i(\omega)) = 0, \quad (r = 1, 2, 4).$$

Ist dagegen n Rest von 7, so ergiebt sich nur das Verschwinden von zwei Grössen $\varkappa$, so dass in diesem Falle

$$\sum_i I_r(R_i(\omega)) = \varkappa_r I_{nr}(\omega), \qquad (r = 1, 2, 4)$$

folgt. Wird in irgend einer dieser Gleichungen statt ω $U_1(\omega)$ gesetzt, wo wie im vorigen Paragraphen die Substitution

$$U_1(\omega) \equiv 2\,\omega \text{ (mod. 7)}$$

ist, so folgt unter Berücksichtigung der Congruenz

$$n\,U_1(\omega) \equiv U_1(n\,\omega) \text{ (mod. 7)}$$

und unter Benutzung der Resultate des vorigen Paragraphen:

$$\sum_i I_{2r}(R_i(\omega)) = \varkappa_r I_{2nr}(\omega).$$

Folglich ist

$$\varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa_4 = \varkappa,$$

*) Die entsprechenden Schlüsse gelten für beliebige Stufe. Die Aufstellung der Classenzahlrelationen beliebiger Stufe bietet, wenn die Constanten $\varkappa$ bekannt sind, keinerlei principielle Schwierigkeit mehr.

so dass es sich nur noch um die Bestimmung einer einzigen Constanten $\varkappa$ handelt. Zwecks dieser Bestimmung mögen die Repräsentanten $R_i(\omega)$ gleich

$$S\left(\frac{A\omega+7B}{D}\right)$$

angenommen werden, wo A, D, B dieselben Werthe wie früher (§ 4 der ersten Abhandlung) durchlaufen, und die Substitution S, gemäss der Congruenz $R_i(\omega) \equiv n\omega \pmod{7}$, der Bedingung

$$S(\omega) \equiv D^2 \cdot \omega \pmod{7}$$

genügen muss. Bei Einführung der Repräsentanten wird

$$\sum_i I_r(R_i(\omega)) = \sum_1 I_r\left(\frac{A\omega+7B}{D}\right) + \sum_2 I_{2r}\left(\frac{A\omega+7B}{D}\right)$$
$$+\sum_3 I_{4r}\left(\frac{A\omega+7B}{D}\right),$$

wobei die Summen rechter Hand zu erstrecken sind auf alle diejenigen Repräsentanten, für welche die Zahl D bezüglich die Bedingung

$$D^2 \equiv 1,\ D^2 \equiv 2,\ D^2 \equiv 4 \pmod{7}$$

erfüllt. Werden jetzt die Reihenentwicklungen der Integrale eingesetzt, so ergiebt sich nach leichter Zwischenrechnung:

$$\sum_i I_r(R_i(\omega)) = \sum_{m\ n\ r} \frac{\chi(m)}{m}\, q^{\frac{2m}{7}},$$

wobei

$$\chi(m) = \sum \delta \cdot \psi\left(\frac{mn}{\delta^2}\right)$$

ist, die Summe erstreckt über alle gemeinsamen Divisoren δ von m und n.

Dieselbe Entwicklung muss aber auch $\varkappa \cdot I_{nr}(\omega)$ liefern; also ist

$$\varkappa \cdot \psi(m) = \chi(m).$$

Für $m = 1$ wird $\psi(m) = 1$, $\chi(m) = \psi(n)$, so dass sich schliesslich

$$\varkappa = \psi(n)$$

ergiebt.*) Man hat also die Relationen:

*) Beiläufig ergiebt sich für die Function ψ das Resultat:

$$\psi(n) \cdot \psi(m) = \sum_\delta \delta\psi\left(\frac{mn}{\delta^2}\right),$$

wo m und n zwei beliebige Zahlen, δ ihre gemeinsamen Divisoren bedeuten. Insbesondere ist

$$\psi(m \cdot n) = \psi(m) \cdot \psi(n),$$

wenn m und n theilerfremde Zahlen sind.

$$\sum_i I_r(R_i(\omega)) = \psi(n) \cdot I_{nr}(\omega),$$

welche auch in der Form:

(1b) $$\sum_i I_r(R_i(\omega)) = \psi(n) \cdot I_r((S(\omega))$$

geschrieben werden können, wo $S(\omega)$ irgend eine der Bedingung

$$S(\omega) \equiv n\omega \pmod{7}$$

genügende Substitution bedeutet.

Geht man jetzt von dem speciellen Repräsentantensystem zu einem beliebigen anderen über, so erhält man aus (1a) und (1b) folgendes Endresultat:

„*Bilden* $R_1(\omega)$, $R_2(\omega)$, . . . *ein zu dem Schema*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \pmod{7}$$

gehörendes Repräsentantensystem der Transformation n^{ter} *Ordnung, so ist*

$$\sum_i I_r(R_i(\omega)) = 0 \qquad (r = 1, 2, 4)$$

oder

$$\sum_i I_r(R_i(\omega)) = \psi(n) I_r(S(\omega)) \qquad (r = 1, 2, 4),$$

je nachdem n *quadratischer Nichtrest oder Rest von* 7 *ist. Im letzteren Falle bedeutet* $S(\omega)$ *irgend eine der Bedingung*

$$S(\omega) \equiv \frac{a\omega + b}{c\omega + d} \pmod{7}$$

genügende Substitution.“

Die erhaltenen Relationen werden übrigens, wie ich wiederhole, eventuell erst dadurch vollständig correct, dass auf der rechten Seite jeder Gleichung noch eine additive von ω unabhängige Grösse hinzugesetzt wird. Aus der Form der Relationen ergiebt sich, dass dieselben bestehen bleiben, wenn an Stelle der Integrale $J_r(\omega)$ *irgend welche andere Integrale* 7^{ter} *Stufe* gesetzt werden.

§ 7.

Die Classenzahlrelationen der 7^{ten} Stufe.

Es möge

$$\Phi(\omega', \omega) = \prod_{i=1}^{i=\Phi(n)} \vartheta[j_r(\omega') - j_r(R_i(\omega)) - c_r]^{*)},$$

$$\Psi(\omega', \omega) = \begin{cases} \vartheta[j_r(\omega') - j_r(S(\omega)) - c_r]^{-\psi(n)}, & \text{wenn } n \text{ Rest von } 7, \\ 1 & \text{, wenn } n \text{ Nichtrest von } 7 \end{cases}$$

*) Die Function geht für $\omega' = \omega$ in die Function $\Phi(\omega)$ des ersten Abschnittes über.

gesetzt und das Product beider Functionen mit

$$\psi(\omega', \omega) = \Phi(\omega', \omega) \,.\, \Psi(\omega', \omega)$$

bezeichnet werden. Dabei haben die benutzten Zeichen für die 7^{te} Stufe dieselbe Bedeutung, wie im ersten Abschnitt dieser Abhandlung für die q^{te} Stufe. Wird ferner, unter ω_0', ω_0 bestimmte Werthe (mit positiv-imaginären Bestandtheilen) verstanden,

$$F(\omega', \omega) = \frac{\psi(\omega', \omega)}{\psi(\omega_0', \omega) \cdot \psi(\omega', \omega_0)}$$

gesetzt, so erhält man unter Benutzung der im vorigen Paragraphen abgeleiteten Relationen, folgende Gleichungen:

$$(1) \qquad F(T(\omega'), \omega) = F(\omega', \omega),$$

$$(2) \qquad F(\omega', T(\omega)) = e^{m_1 j_1(\omega) + m_2 j_2(\omega') + m_3 j_3(\omega')} \,.\, F(\omega', \omega)$$

Hier bezeichnen m_1, m_2, m_3 ganze Zahlen, $T(\omega)$, wie früher, irgend eine der Identität (mod. 7) congruente Substitution.

Es mögen nun die Grössen ω' und ω auf der Riemann'schen Fläche der 7^{ten} Stufe gedeutet werden, so folgt aus der Gleichung (1) dass $F(\omega', \omega)$ als Function der Stelle ω' der Fläche einwerthig und folglich da sie nur für eine endliche Zahl von Stellen Null und unendlich wird, eine zu der Fläche gehörige algebraische Function ist. Dasselbe gilt selbstverständlich für den Quotienten

$$\frac{F(\omega', T(\omega))}{F(\omega', \omega)}.$$

Folglich muss in der Gleichung (2)

$$m_1 = m_2 = m_3 = 0$$

sein und $F(\omega', \omega)$ ist also auch als Function der Stelle ω eine algebraische Function auf der Fläche.*)

Es sei nun erstens

$$S(\omega) \text{ nicht} \equiv \omega \text{ (mod. 7)},$$

also das Schema $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, zu welchem die Repräsentanten $R_i(\omega)$ gehören, von $\begin{pmatrix} \sqrt{n} & 0 \\ 0 & \sqrt{n} \end{pmatrix}$ (mod. 7) verschieden. Dann wird die Function

$$F(\omega, \omega)$$

da sie eine algebraische Function der Fläche 7^{ter} Stufe ist, auf dieser, oder was dasselbe ist, wenn ω das Fundamentalpolygon beschreibt, gerade so oft Null wie unendlich. Es ist folglich:

---

*) Die Gleichung $F(\omega', \omega) = 0$ stellt die Modularcorrespondenz 7^{ter} Stufe des n^{ten} Transformationsgrades vollständig dar. Vgl. meine Arbeit: „Zur Theorie der Modulargleichungen" Göttinger Nachrichten 1883.

(1) $$\sigma - k \cdot \psi(n) = 2 \cdot \Phi(n) - 2\psi(n),$$
wobei $\psi(n) = 0$ zu setzen ist, wenn n Nichtrest (mod. 7) ist, und wobei k die Zahl der Nullstellen der Function

$$\vartheta\left[j_r(\omega) - j_r(S(\omega)) - c_r\right]$$

bedeutet. σ hat dieselbe Bedeutung, wie in § 8 des ersten Abschnittes; nur ist dort q überall $= 7$ zu setzen.

Ist zweitens $S(\omega) \equiv \omega$ (mod. 7), handelt es sich also um das Schema

$$\begin{pmatrix} \sqrt{n} & 0 \\ 0 & \sqrt{n} \end{pmatrix} \text{(mod. 7)},$$

so betrachte man

$$F(\omega', \omega) \cdot \vartheta\left[j_r(\omega') - j_r(\omega) - c_r\right]^{\psi(n)+\varepsilon}$$

für $\omega' = \omega$; dabei ist

$$\varepsilon = -1 \quad \text{oder} \quad \varepsilon = 0,$$

je nachdem n ein Quadrat ist oder nicht. Die entstehende Function von ω möge einen Augenblick mit $F(\omega)$ bezeichnet werden. Da $\vartheta\left[j_r(\omega') - j_r(\omega) - c_r\right]$ sich bis auf einen constanten Factor reproducirt, wenn ω und ω' simultan durch $T(\omega)$ und $T(\omega')$ ersetzt werden, so ist auch

$$F(T(\omega)) = c_t \cdot F(\omega),$$

wo c_t eine Constante bedeutet. Hieraus folgt aber nach pag. 171—172 (§ 3 Schluss), dass $F(\omega)$ ebenso oft Null wie unendlich wird, wenn ω das Fundamentalpolygon beschreibt. Es ist daher in dem jetzt betrachteten Falle:

(2) $$\sigma = 2 \cdot \Phi(n) - 6\psi(n) + \eta,$$
wo

$$\eta = 4 = 2(p-1) \quad \text{oder} \quad \eta = 0$$

zu nehmen ist, je nachdem n ein Quadrat ist oder nicht.

Der Zahlenfactor 6 rührt davon her, dass jede der beiden Functionen $\vartheta\left[j_r(\omega_0) - j_r(\omega) - c_r\right]$ und $\vartheta\left[j_r(\omega) - j_r(\omega_0') - c_r\right]$, welche im Nenner von $F(\omega)$ auftreten, an $p = 3$ Stellen unendlich klein von der ersten Ordnung wird.

§ 6.

Fortsetzung und Schluss.

Es erübrigt noch in die Formeln (1) und (2) des vorigen Paragraphen die Werthe von σ und k aus § 8 und 9 des ersten Abschnittes einzutragen, um die Classenzahlrelationen der 7^{ten} Stufe explicite vor sich zu haben. Ist erstens n Nichtrest von 7, so kommt nur der Fall I des § 8 in Betracht. Man unterscheidet dann weiter mit Herrn Gierster am zweckmässigsten die einzelnen Fälle je nachdem

$$a+d\equiv 0 \quad \pm\sqrt{-n}, \quad \pm 2\sqrt{-n}, \quad \pm 4\sqrt{-n} \pmod{7}$$

ist. Die Formel (1) des vorigen Paragraphen ergiebt, diesen Fällen entsprechend, folgende Relationen:

n quadratischer Nichtrest von 7.

$$\begin{cases} 3\cdot\sum\limits_{0}{}' \mathsf{H}(4n-x^2) = 2\Phi(n) - 12\,U_{\sqrt{-n}}, \\ 2\cdot\sum\limits_{\sqrt{-n}}{}' \mathsf{H}(4n-x^2) = \quad \Phi(n), \\ 3\cdot\sum\limits_{2\sqrt{-n}}{}' \mathsf{H}(4n-x^2) = 3\Psi(n) - \Phi(n) + 6\,U_{\sqrt{-n}}, \\ 2\cdot\sum\limits_{4\sqrt{-n}}{}' \mathsf{H}(4n-x^2) = \quad \Phi(n). \end{cases}$$

Bei der Aufstellung der dritten Formel ist von der Gleichung

$$2\,(U_{\sqrt{-n}} + U_{2\sqrt{-n}} + U_{4\sqrt{-n}}) = \Phi(n) - \Psi(n)$$

Gebrauch gemacht, wo $\Psi(n)$, wie in der ersten Abhandlung, den Ueberschuss derjenigen Divisoren von n, welche grösser als $\sqrt{n}$, über diejenigen, welche kleiner als $\sqrt{n}$ sind bedeutet.

Ist zweitens n Rest von 7, so unterscheide man wieder die Fälle

$$a+d\equiv 0, \quad \pm\sqrt{n}, \quad \pm 2\sqrt{n}, \quad \pm 4\sqrt{n} \pmod{7}.$$

Nach § 9 des ersten Abschnittes ist diesen Fällen entsprechend

$$k = 4,\ 2,\ 3,\ 0$$

zu setzen. Es ergeben sich folgende fünf Relationen, von welchen die erste die ausführlich geschriebene Formel (2) des vorigen Paragraphen ist:

n quadratischer Rest von 7.

$$\begin{cases} 84\cdot\sum\limits_{2\sqrt{n}}{}' \mathsf{H}\left(\frac{4n-x^2}{49}\right) = \Phi(n) - 24\,U_{\sqrt{n}} - 3\psi(n), \\ 7\cdot\sum\limits_{2\sqrt{n}}{}' \left[\mathsf{H}(4n-x^2) - \mathsf{H}\left(\frac{4n-x^2}{49}\right)\right] = 4\Phi(n) - 12\,U_{\sqrt{n}} + 2\psi(n), \\ 2\cdot\sum\limits_{0}{}' \mathsf{H}(4n-x^2) = \Phi(n) + \psi(n), \\ 3\cdot\sum\limits_{\sqrt{n}}{}' \mathsf{H}(4n-x^2) = 3\cdot\Psi(n) - \Phi(n) + 6\,U_{\sqrt{n}}, \\ 2\cdot\sum\limits_{4\sqrt{n}}{}' \mathsf{H}(4n-x^2) = \Phi(n) - \psi(n). \end{cases}$$

Bei Aufstellung der vierten Relation ist die Gleichung

$$2\left(U_{\sqrt{n}} + U_{2\sqrt{n}} + U_{4\sqrt{n}}\right) = \Phi(n) - \Psi(n)$$

zu Hülfe genommen.

Ein Vergleich der obigen mit den Gierster'schen Formeln ergiebt vollständige Uebereinstimmung, wenn man erstens die Gleichung

$$\psi(n) = -\frac{1}{2}\eta(n)$$

beachtet und zweitens in Rücksicht zieht, dass die von mir gebrauchten Summen immer doppelt so gross sind wie die entsprechenden von Herrn Gierster eingeführten.

Königsberg i. Pr., Ende Juli 1884.