RIDUZIONE DI UN FASCIO DI CURVE PIANE DI GENERE UNO, CORRISPONDENTE A SÈ STESSO IN UNA TRASFORMAZIONE BIRAZIONALE INVOLUTORIA DEL PIANO.

Memoria di **Pia Nalli** (Palermo).

Adunanza del 14 agosto 1910.

1. Si abbia in un piano una involuzione (I) di punti, di secondo grado, che trasformi in sè stesso un fascio (F) di curve piane di genere uno.

L'involuzione (I): o *trasformerà ogni curva C di (F) in sè stessa,* ovvero *trasformerà ogni curva C di (F) in un'altra curva C' di (F).*

Nella prima ipotesi le coppie di punti coniugati determineranno su C un'involuzione che, come è noto, potrà essere di due specie: *razionale* od *ellittica.*

Tratterò nel § I il caso dell'involuzione razionale; e nel § II, insieme a quello dell'involuzione ellittica, il caso in cui ogni curva di C è trasformata in una curva C' diversa da C.

I.

Caso dell'involuzione razionale.

2. Si abbia in un piano π una involuzione (I) che trasformi in sè stessa ogni curva (C) di un fascio (F) di genere uno, determinando su C un'involuzione razionale.

Per la *razionalità* delle involuzioni piane di qualsiasi grado, è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra i gruppi di punti coniugati in (I) ed i punti di un *piano doppio razionale* π'.

Il fascio (F) del *piano semplice* sarà rappresentato sul piano doppio da un fascio di genere zero che possiamo supporre ridotto ad un fascio (Φ) di rette con centro O.

La *curva di diramazione* del piano doppio, C_{2n}, avrà in O la multiplicità $2n-4$ o, in particolare, $2n-3$.

Supponiamo dapprima che la C_{2n} abbia in O un punto $(2n-4)$-plo e non contenga nessuna curva di ordine r con un punto $(r-1)$-plo in O, perchè in questo caso, con una trasformazione di Jonquières che lasci fisso il fascio (Φ), potremmo ridurre la curva di diramazione ad una curva di ordine $2n'$ con un punto $(2n'-3)$-plo in O.

La curva C_{2n} sarà costituita da una curva C_m di ordine $m \leqq 2n$ con un punto $(m-4)$-plo in O e da $2n-m$ rette distinte passanti per O.

Se la curva C_m avesse un punto quadruplo, o un punto triplo e un punto doppio (o triplo) non tutti e due infinitamente vicini ad O, potremmo, con una trasformazione quadratica, ridurre C_m ad una $C_{m'}$, di ordine $m' < m$, avente in O la multiplicità $m'-4$, trasformando il fascio (Φ) in sè stesso. La curva di diramazione del piano doppio sarebbe costituita da $C_{m'}$ e da eventuali rette passanti per O.

Supponiamo ora che la C_m abbia solo punti doppî ed almeno un punto triplo tutti infinitamente vicini al punto O. Se C_m avesse due punti tripli P, Q infinitamente vicini ad O nella stessa direzione, con una trasformazione di JONQUIÈRES di terz'ordine, avente come punto fondamentale doppio il punto O, e come punti fondamentali semplici i punti P, Q e due punti generici di C_m, potremmo trasformare C_m in un'altra curva C'_m dello stesso ordine m avente lo stesso numero di punti doppî e tripli di C_m, ma C'_m, invece dei punti tripli P e Q infinitamente vicini ad O nella stessa direzione, avrebbe, infinitamente vicini ad O, due punti tripli in direzioni distinte. Possiamo quindi supporre che i punti tripli di C_m, che cadono nell'intorno di prim'ordine del punto O, si trovino tutti in direzioni distinte, e se supponiamo che C_m abbia l'ordine minimo tra tutte quelle che si ottengono da essa con una trasformazione di JONQUIÈRES che lasci fisso (Φ), essa non avrà punti tripli oltre a quelli che cadono nell'intorno di prim'ordine del punto O.

Supponiamo ora che la C_{2n} abbia in O un punto $(2n-3)$-plo. Essa sarà costituita da una curva C_m di ordine $m \leqq 2n$ avente in O la multiplicità $m-3$ e da $2n-m$ rette passanti per O.

Se $m > 3$ e la C_m ha un punto triplo, A, con una trasformazione quadratica avente come punti fondamentali il punto O, il punto A ed un punto di C_m, che prenderemo infinitamente vicino ad O se A è a distanza finita da questo punto, trasformeremo la C_m in una $C_{m'}$ di ordine $m' < m$ avente in O un punto $(m'-3)$-plo: la curva di diramazione del piano doppio sarà costituita da $C_{m'}$ e da eventuali rette passanti per O.

Risulta da questa discussione che la C_{2n} si può supporre ridotta ad una delle seguenti curve:

1° C_{2n} di ordine $2n$ con un punto $(2n-4)$-plo in O, senza altri punti multipli o con punti doppî o tripli isolati.

2° C_{2n} di ordine $2n$ con un punto $(2n-4)$-plo in O ed un punto quadruplo A, spezzata in una C_{2n-1} di ordine $2n-1$ con un punto $(2n-5)$-plo in O ed un punto triplo in A, e nella retta OA. Il punto A è a distanza finita da O e la C_{2n-1} non ha punti multipli oltre ai punti O ed A.

3° C_{2n} di ordine $2n$ con un punto $(2n-4)$-plo in O ed h coppie di punti tripli infinitamente vicini su altrettante rette che si staccano da C_{2n}. La curva può avere punti doppî o tripli isolati.

4° C_{2n} di ordine $2n$ con un punto $(2n-4)$-plo in O, h (>0) punti quadrupli nell'intorno di prim'ordine di O, su altrettante rette che si staccano da C_{2n} e k ($\geqq 0$) coppie di punti tripli infinitamente vicine ad O, su altrettante rette che si staccano da C_{2n}, quindi

(1) $$4h + 3k \leqq 2n - 4.$$

La curva può avere punti tripli nell'intorno di prim'ordine di O in direzioni distinte, e punti doppî infinitamente vicini ad O.

5° C_{2n} di ordine $2n$ con un punto $(2n-3)$-plo in O ed h ($\geqq 0$) punti tripli infinitamente vicini ad O, su altrettante rette che si staccano da C_{2n}, quindi

(2) $$3h \leqq 2n - 3.$$

La curva può avere punti doppî o punti tripli isolati (questi a distanza finita da O).

Ciò posto, indichiamo con p_g, p_a, P_1 rispettivamente il *genere geometrico*, il *genere aritmetico* ed il *bigenere* del nostro piano doppio. Per la razionalità del medesimo sarà

$$p_g = p_a = P_1 = 0.$$

D'altra parte, note le singolarità della C_{2n}, si possono facilmente calcolare i numeri p_g, p_a, P_1. Si ha:

nel 1° caso

$$p_a = n - 2,$$

quindi $n = 2$;

nel 2° caso

$$p_a = n - 3,$$

quindi $n = 3$;

nel 3° caso

$$p_a = n - 2 - h, \qquad P_1 = 2n - 5 - h,$$

quindi $n = 3$, $h = 1$;

nel 4° caso

$$p_a = n - 2 - h - k,$$

ma essendo $h > 0$ per la (1) non potrebbe essere $p_a = 0$;

nel 5° caso

$$p_a = n - 2 - h$$

e per (2)

$$n \leqq 3.$$

Da tutto ciò facilmente si conclude:

Se in un piano si ha una involuzione che trasforma in sè stessa ogni curva C di un fascio (F) di genere uno, determinando su C un'involuzione razionale, si può stabilire una corrispondenza tra i gruppi di punti coniugati in (I) ed i punti di un piano doppio razionale avente come curva di diramazione una delle seguenti:

a) Sestica con due punti tripli infinitamente vicini in un punto O.

b) Sestica con un punto quadruplo ed un punto doppio O.

c) Quartica (spezzata o no in curve di ordine inferiore al quarto).

Il fascio (F) sarà rappresentato sul piano doppio da un fascio (Φ) di genere zero che si può supporre ridotto:

in a): al fascio delle rette passanti per O, o ad un fascio di coniche passanti pei due punti tripli della sestica e tangenti in un punto a questa curva;

in b): al fascio delle rette passanti per O;

in c): ad un fascio di rette, o ad un fascio di coniche tangenti in due punti alla quartica.

Involuzione il cui piano doppio corrispondente ha come curva di diramazione una sestica con due punti tripli infinitamente vicini.

3. Al sistema (Σ) ∞^3 delle coniche del piano doppio passanti pei due punti tripli della curva di diramazione corrisponde, nel piano semplice, un sistema (S) di sestiche con otto punti doppî $B_1, B_2, \ldots, B_8$. Al fascio delle rette passanti per il punto O, in cui cadono i punti tripli della sestica, corrisponde il fascio (F) delle cubiche passanti pei punti $B_1, B_2, \ldots, B_8$. L'altro punto base B_9 di (F) corrisponde al punto O ed è punto unito nell'involuzione. Tra i punti base di (F) non ve ne sono due infinitamente vicini, nè tre sopra una retta.

Sopra ogni cubica C di (F) due punti coniugati nell'involuzione sono allineati col punto P in cui C è ulteriormente incontrata dalla sua tangente nel punto B_9.

Ad un fascio di coniche del piano doppio passanti pei due punti tripli della sestica di diramazione e tangenti in un punto H a questa curva, corrisponde, nel piano semplice, un fascio (F_1) di sestiche di genere uno appartenente al sistema (S). Il fascio (F_1) ha nove punti base doppî che sono i punti $B_1, B_2, \ldots, B_8$ ed il punto H' della curva unita dell'involuzione, corrispondente ad H.

Il fascio di cubiche (F) ed un fascio di sestiche (F_1) sono i tipi a cui può ridursi un fascio di curve ellittiche rappresentato sul piano doppio da un fascio razionale, e si può anzi facilmente vedere che, oltre al fascio (F) ed agli infiniti fasci (F_1), non vi sono altri fasci di genere uno, rappresentati sul piano doppio da fasci razionali.

Involuzione il cui piano doppio corrispondente ha come curva di diramazione una quartica di genere tre.

4. Alla rete delle rette del piano doppio corrisponde nel piano semplice una rete di curve ellittiche che si può supporre ridotta ad una rete $[R]$ di cubiche passanti per sette punti $B_1, B_2, \ldots, B_7$ tra i quali non ve ne sono due infinitamente vicini, nè tre sopra una retta, nè sei sopra una conica.

Tutte le curve della rete passanti per un punto H costituiscono un fascio (F), e passano tutte per il punto H' coniugato di H nell'involuzione.

Sopra ogni cubica di (F) due punti coniugati sono allineati col punto P in cui la retta HH' incontra ulteriormente la cubica.

Ad un fascio (Φ_1) di coniche del piano doppio tangenti in due punti H e K alla curva di diramazione, corrisponde, nel piano semplice, un fascio (F_1) di sestiche con nove punti doppî, che sono i punti base di $[R]$ ed i punti H' e K' della curva unita corrispondenti ad H e K. Oltre ai fasci della rete $[R]$ ed ai fasci (F_1), non si hanno altri fasci di curve ellittiche rappresentati da fasci razionali nel piano doppio.

Involuzione il cui piano doppio corrispondente ha come curva di diramazione una quartica di genere due.

5. Alla rete delle rette del piano doppio corrisponde, nel piano semplice, una rete di genere uno che possiamo supporre ridotta ad una rete di cubiche $[R]$ con sette punti base.

Al fascio delle rette passanti per il punto doppio della quartica di diramazione corrisponde un fascio di rette con centro O'.

L'involuzione del piano semplice è una trasformazione di Jonquières di quart'ordine.

Ad un fascio di coniche (Φ_1) del piano doppio, tangenti in due punti alla quartica di diramazione, corrisponde, nel piano semplice, un fascio (F_1) di sestiche con nove punti base doppî, di cui sette sono i punti fondamentali della trasformazione, e gli altri due punti della curva unita dell'involuzione.

Un fascio di $[R]$ ed un fascio (F_1) sono i tipi a cui può ridursi qualunque fascio (F) di genere uno rappresentato sul piano doppio da un fascio razionale.

Si può inoltre vedere facilmente che qualsiasi fascio (F) o appartiene ad una rete di ordine $n+2$ con un punto base n-plo in O', sei punti base semplici nei sei punti fondamentali della trasformazione diversi da O' ed $n-1$ punti base doppî in $n-1$ punti scelti ad arbitrio sulla curva unita dell'involuzione; ovvero è un fascio di ordine $2n+4$ $(n \geq 1)$ con un punto $2n$-plo in O', $n-1$ punti base quadrupli in $n-1$ punti presi ad arbitrio sulla curva unita ed otto punti base doppî, di cui sei sono i punti fondamentali della trasformazione diversi da O', e gli altri due, due punti generici della curva unita.

Involuzione il cui piano doppio corrispondente ha come curva di diramazione una quartica di genere uno o una quartica spezzata in una cubica e una retta.

6. Il secondo piano doppio, con una trasformazione quadratica, si riduce al primo. Un fascio di genero zero, a cui corrisponde nel piano semplice un fascio di curve ellittiche, si può supporre ridotto nel primo piano doppio ad uno dei seguenti:

a) Fascio di rette.

b) Fascio di coniche passanti pei due punti doppî della quartica di diramazione.

c) Fascio di coniche tangenti in due punti alla quartica.

d) Fascio di quartiche con tre punti doppî; due nei due punti doppî della quartica di diramazione, l'altro in un punto di questa curva e tangenti a questa in due punti.

e) Fascio di quartiche con un punto doppio in ognuno dei punti doppi della quartica di diramazione, una cuspide in un punto di questa curva e tangente ad essa in un punto.

L'involuzione corrispondente è la trasformazione di Jonquières di terz'ordine.

Al sistema (Σ) delle coniche del piano doppio, passanti pei due punti doppî della quartica di diramazione, corrisponde nel piano semplice un sistema (S) ∞^3 di cubiche passanti pei cinque punti fondamentali della trasformazione; due punti coniugati nell'involuzione sono allineati con uno dei punti base O' di (S).

Ad un fascio *c*) corrisponde un fascio di sestiche con nove punti base doppî, di cui cinque sono i punti fondamentali della trasformazione, due sono due punti generici della curva unita dell'involuzione e gli altri due costituiscono una coppia di punti coniugati (AA').

Ad un fascio *d*) corrisponde un fascio analogo al precedente, con la sola differenza che i due punti (AA') sono infinitamente vicini.

Ad un fascio *e*) corrisponde un fascio di sestiche con nove punti doppî, di cui cinque sono i punti fondamentali della trasformazione, uno è un punto qualunque della curva unita ed altri tre sono infinitamente vicini in un altro punto di questa curva, essendo due di essi allineati con O'.

Si ha poi che se (S_1) è un sistema di genere uno, di dimensione maggiore di uno, rappresentato sul piano doppio da un sistema (Σ_1) di genere zero, due curve di (S_1) s'incontreranno in un numero pari di punti mobili, e quindi, trattandosi di un sistema di genere uno, in otto, sei, quattro o due punti [1]).

Due curve di (Σ_1) s'incontreranno perciò in quattro, tre, due, uno punti mobili. Tenendo poi conto che ogni curva di (Σ_1) deve incontrare al più in quattro punti mobili la curva di diramazione del piano doppio, per noti teoremi sulla riduzione dei sistemi lineari di genere zero [2]), facilmente si conclude che (Σ_1) si può ridurre ad un sistema di coniche passanti per due punti, riducendo nello stesso tempo la curva di diramazione ad una quartica con due punti doppî nei due punti base di (Σ_1), e quindi si conclude che, qualunque sistema (S_1) del piano semplice è compreso in un sistema ∞^3 che si può ridurre ad un sistema del tipo (S).

Involuzione il cui piano doppio corrispondente ha come curva di diramazione una quartica razionale o spezzata in curve razionali.

7. I piani doppî che hanno come curva di diramazione una quartica razionale o spezzata in curve razionali, con una o due trasformazioni quadratiche, si riducono al piano doppio che ha come curva di diramazione una conica propria o una coppia di rette.

Ridotta la curva di diramazione ad una conica, un fascio di genere zero del piano doppio, corrispondente ad un fascio di curve ellittiche del piano semplice, si può considerare ridotto ad uno dei seguenti:

a) Fascio di coniche.

b) Fascio di cubiche, con una cuspide in un punto della conica di diramazione e tre punti base semplici fuori della conica.

---

[1]) GUCCIA, *Sulla riduzione dei sistemi lineari di curve ellittiche e sopra un teorema generale delle curve algebriche di genere p* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. I (1887), pp. 169-189].

[2]) GUCCIA, *Generalizzazione di un teorema di* NÖTHER [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. I (1887), pp. 139-156].

c) Fascio di quartiche, con tre punti doppî, tangenti in due punti alla conica. Dei tre punti doppî uno o due potrebbero cadere sulla conica.

d) Fascio di quartiche, con una cuspide in un punto della conica di diramazione, due punti doppî, uno dei quali o tutti e due potrebbero cadere su questa curva, e tangenti a questa in un punto.

e) Fascio di quartiche, con due cuspidi sulla conica e un punto doppio fuori di questa curva.

f) Fascio di quartiche, con una cuspide in un punto della conica di diramazione, un punto doppio in un punto di questa curva. A questo punto doppio è infinitamente vicina una cuspide.

Ridotta la curva di diramazione ad una coppia di rette (r, s), un fascio razionale del piano doppio, corrispondente ad un fascio di curve ellittiche del piano semplice, si può supporre ridotto ad uno dei seguenti:

a') Fascio di coniche.

b') Fascio di cubiche, con una cuspide in un punto di r e tre punti base semplici infinitamente vicini in un punto di r.

c') Fascio di quartiche, con una cuspide e un punto doppio su r, un punto doppio su s e tangenti ad s.

d') Fascio di quartiche, con due punti doppî su r, una cuspide su s e tangenti ad s.

e') Fascio di quartiche, con una cuspide e un punto doppio su r. Al punto doppio è infinitamente vicina una cuspide.

Le involuzioni corrispondenti ai piani doppî considerati si riducono all'omologia armonica. I fasci di curve ellittiche, trasformate in sè stesse da questa involuzione, si possono perciò ridurre ad uno dei seguenti:

a) Fascio di quartiche, con due punti doppî in due punti, a distanza finita, coniugati nell'involuzione.

b) Fascio di quartiche, con due punti doppî infinitamente vicini nel centro di omologia ed otto punti base semplici costituenti quattro coppie di punti coniugati distinti.

c) Fascio di sestiche, con nove punti doppî, uno sull'asse di omologia, gli altri otto costituenti quattro coppie di punti coniugati. In particolare una o due di queste coppie potrebbero essere costituite da due punti infinitamente vicini.

d) Fascio di sestiche, con nove punti doppî di cui tre infinitamente vicini in un punto dell'asse di omologia. Gli altri sei costituiscono tre coppie di punti coniugati, una o due delle quali potrebbero essere costituite da punti infinitamente vicini.

e) Fascio di sestiche con nove punti doppî, cinque infinitamente vicini in un punto dell'asse di omologia, gli altri quattro costituenti due coppie di punti coniugati.

f) Fascio di sestiche, con nove punti doppî, tra i quali sette sono infinitamente vicini in un punto dell'asse di omologia e gli altri due costituiscono una coppia di punti coniugati.

a') Fascio di quartiche, con due punti doppî infinitamente vicini in un punto dell'asse di omologia.

b') Fascio di cubiche i cui nove punti base sono infinitamente vicini nel centro di omologia.

c') Fascio di sestiche, con nove punti doppî: due infinitamente vicini in un punto dell'asse di omologia, tre infinitamente vicini in un'altro punto dello stesso asse e gli altri quattro infinitamente vicini in un terzo punto dell'asse.

d') Fascio di sestiche, con nove punti doppî: due infinitamente vicini in un punto dell'asse di omologia, altri due infinitamente vicini in un altro punto dell'asse e gli altri cinque infinitamente vicini in un terzo punto dell'asse.

e') Fascio di sestiche, con nove punti doppî: due infinitamente vicini nel centro di omologia, sette infinitamente vicini in un punto dell'asse di omologia.

Un fascio di quartiche *a*), *a'*) o *b*) si può ridurre ad un fascio di cubiche riducendo l'involuzione alla trasformazione di JONQUIÈRES di second'ordine, che ha come curva unita una conica o una coppia di rette.

Se poi si considera nel piano semplice un sistema (S_1) di genere uno (non riducibile ad un fascio di HALPHEN di sest'ordine) che sia rappresentato sul piano doppio da un sistema (Σ_1) di genere zero, è facile vedere, come per l'involuzione piana precedente, che il sistema (Σ_1) si può ridurre ad un sistema di coniche, riducendo la curva di diramazione del piano doppio ad una conica o ad una coppia di rette; ovvero si può ridurre ad un sistema di quartiche, con un punto triplo P a tangenti fisse, di cui due coincidenti in una retta r riducendo nello stesso tempo la curva di diramazione ad una conica passante per P e per il punto infinitamente vicino a P sulla tangente fissa di (Σ_1), diversa da r.

E quindi si conclude che il sistema (S_1) fa parte di un sistema (S) ∞^5 che si può, riducendo l'involuzione piana ad omologia armonica, trasformare in un sistema di quartiche con due punti doppî in due punti coniugati nell'omologia, che, in particolare, possono essere infinitamente vicini; o in un sistema di quartiche con due punti doppî infinitamente vicini nel centro di omologia.

Involuzione il cui piano doppio corrispondente ha come curva di diramazione una sestica con un punto quadruplo e un punto doppio.

8. Al fascio delle rette passanti per il punto quadruplo della sestica di diramazione corrisponde, nel piano semplice, un fascio di genere zero, che possiamo supporre ridotto ad un fascio di rette di centro O'. Al fascio delle rette passanti per il punto doppio della sestica corrisponde un fascio di curve ellittiche, che possiamo supporre ridotto ad un fascio (F) di cubiche passanti per O'. Tra i punti base di (F) diversi da O' non ve ne sono due infinitamente vicini, nè due allineati con O'.

L'involuzione è la trasformazione di JONQUIÈRES di quint'ordine.

Qualunque altro fascio di curve ellittiche, rappresentato sul piano doppio da un fascio razionale, è dell'ordine $n+2$ $(n \geqq 1)$, ha un punto base n-plo in O', otto punti base semplici negli otto punti fondamentali della trasformazione diversi da O', ed $n-1$ punti doppî in $n-1$ punti scelti ad arbitrio sulla curva unita dell'involuzione.

II.

Caso dell'involuzione ellittica. — Caso in cui ogni curva del fascio è trasformata in un'altra curva del fascio.

9. Incominciamo col richiamare alcuni risultati relativi ai piani doppî.

La curva di diramazione di un piano doppio si può supporre ridotta ad una C_{2m} di ordine $2m$ con punti multipli di ordine pari e distinti.

Relativamente a C_{2m} si potranno considerare le curve C_{2m-3}, d'ordine $2m-3$, *aggiunte d'indice uno,* le C_{2m-6}, d'ordine $2m-6$, *aggiunte delle aggiunte* (*aggiunte d'indice due* alla C_{2m}), le *aggiunte d'indice tre,* e così via.

Queste curve aggiunte hanno carattere invariantivo rispetto ad una trasformazione birazionale del piano che muti la C_{2m} in una curva di ordine pari dotata di punti multipli di ordine pari. Esse hanno anche carattere invariantivo rispetto ad una trasformazione birazionale del piano che muti la C_{2m} in una C_{2n} dotata di punti multipli dispari, purchè si faccia una opportuna convenzione relativamente ai punti multipli di ordine dispari della curva, attribuendo loro una multiplicità *virtuale* che può differire di una unità da quella *effettiva.*

È facile determinare questa multiplicità virtuale nei casi più semplici.

Ogni punto multiplo di ordine $2r+1$ della C_{2n} avrà per convenzione la multiplicità virtuale $2r$, tranne quando al punto stesso sia infinitamente vicino un altro punto $(2r+1)$-plo, nel qual caso la multiplicità virtuale del primo punto e quella del suo infinitamente vicino sarà, come l'effettiva, $2r+1$.

Quest'affermazione vale soltanto se si tratta di un punto multiplo nel senso proprio della parola.

Se il punto O' di cui si discorre è esso stesso nell'intorno di prim'ordine di un altro punto O, la multiplicità virtuale sarà $2r$ o $2r+2$, secondochè O ha una multiplicità di ordine pari o dispari. *Affinchè un piano doppio sia razionale è necessario che manchino le curve aggiunte di indice* $2, 3, \ldots, \left[\frac{2n}{3}\right]$ [3]), dove $2n$ indica l'ordine della curva di diramazione.

10. Ciò posto, si abbia in un piano π una involuzione (I) che trasformi in sè stessa ogni curva C di un fascio (F) di genere uno, determinando su C un'involuzione ellittica, o trasformi ogni curva C di (F) in una curva C' di (F).

Mettiamo in corrispondenza i gruppi di punti coniugati nell'involuzione (I) coi punti di un piano π': avremo in π' un piano doppio razionale in cui il fascio (F) avrà come corrispondente un fascio (Φ) di genere uno, che possiamo supporre ridotto ad un fascio di Halphen di ordine $3m$ con nove punti base m-pli B_i $(i=1, 2, \ldots, 9)$.

---

3) Castelnuovo-Enriques, *Sulle condizioni di razionalità dei piani doppî* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XIV (1900), pp. 290-302].

Sopra ogni curva di (Φ) non si hanno punti di diramazione, quindi la curva di diramazione Γ del piano doppio deve essere costituita da curve appartenenti a (Φ).

Ora una curva irreduttibile appartenente a (Φ), come si può vedere facilmente, può essere:

α) Una curva di ordine $3h$ con nove punti h-pli nei punti B_i, senza altri punti multipli o con un solo punto doppio.

β) Una curva di ordine $3h$ con un punto $(h+1)$-plo in uno dei punti B_i, un punto $(h-1)$-plo in un altro ed un punto h-plo in ognuno dei rimanenti sette.

γ) Una curva dell'ordine $3h+1$ con tre punti $(h+1)$-pli in tre dei punti B_i e sei punti h-pli nei rimanenti sei.

δ) Una curva dell'ordine $3h+2$ con sei punti $(h+1)$-pli in sei dei punti B_i e tre punti h-pli nei rimanenti tre.

11. Consideriamo una curva Σ, eventualmente riduttibile, facente parte di Γ e di ordine $3q$. È facile vedere, che, se P è un punto del piano diverso dai punti base B_i di (Φ), Σ non potrà avere in P un punto r-plo $(r>q)$ e infinitamente vicino a questo un punto Q s-plo $(s>q)$, a meno che non sia $q=1$, e ciò perchè non possono far parte di Σ s curve β), γ), δ) passanti per P e Q.

12. Sia Σ una curva facente parte della curva di diramazione e di ordine qualunque; sia k la sua multiplicità in uno dei punti base di (Φ), ad esempio B_1. Σ non potrà avere in un punto P, diverso dai punti base di (Φ), un punto di multiplicità $s>k+2$.

Infatti, se ci fosse questo punto P di multiplicità $s>k+2$, vi dovrebbe essere qualche curva β), γ), δ) non passante per B_1 e passante per P. Ora se N è il numero delle curve β), γ), δ) che passano per P e non passano per B_1, sarà

$$s-k \leqq N.$$

Ma una curva β), γ), δ) passante per P e non per B_1 non può essere altro che una cubica, una conica o una retta.

Ma se c'è una cubica che passa per P e non per B_1, non vi può essere nessun'altra curva che soddisfa a questa condizione, quindi $N=1$; se c'è una conica non vi può essere altro che una retta, quindi $N\leqq 2$; e, se c'è una retta e non c'è una conica, non vi può essere altro che una seconda retta e quindi $N\leqq 2$; in ogni caso

$$s \leqq k+2.$$

Se la curva Σ è di ordine $3q$ con nove punti q-pli nei punti B_i eccetto il caso di $q=1$, Σ non può avere un punto $(q+2)$-plo P. Infatti, se ciò fosse, per quanto s'è detto, vi sarebbe una retta facente parte di Σ, passante per P, su cui si troverebbero tre punti q-pli di Σ. Se fosse $q>1$, questa retta si staccherebbe almeno due volte dalla curva di diramazione.

13. Premesso ciò, indichiamo con $2n$ l'ordine della curva di diramazione Γ, con r_i la sua multiplicità in B_i, essendo

$$\sum r_i = 6n \qquad (i=1, 2, \ldots, 9). \tag{3}$$

Osserviamo che se r_i è dispari, al punto B_i è infinitamente vicino un punto B_k, essendo

r_k dispari; perchè se così non fosse, sopra ogni curva di (Φ) si avrebbero in B_i m punti di diramazione.

Supponiamo

$$r_1 \leqq r_2 \leqq \cdots \leqq r_9.$$

Possiamo supporre inoltre

$$r_1 + r_2 + r_3 \leqq 2n + 3$$

e nel caso in cui $r_1 + r_2 + r_3 = 2n + 3$ possiamo supporre che r_1, r_2, r_3 siano tutti e tre dispari.

Per la (3) si ha poi

$$r_1 + r_2 + r_3 \geqq 2n.$$

Facciamo sul numero n le tre ipotesi:

$$a)\ 2n = 3p; \qquad b)\ 2n = 3p + 1; \qquad c)\ 2n = 3p + 2.$$

a) Sia $r_1 + r_2 + r_3 = 3p + 3$.

Tenendo conto della (3) e del fatto che r_1, r_2, r_3 sono dispari, si ha:

$$r_1 = r_2 = r_3 = p + 1.$$

La multiplicità di Γ in uno qualunque dei punti B_i non supera $p+1$, ma d'altra parte (n[i] 11, 12) Γ non può avere fuori dei punti B_i un punto $(p + 2)$-plo o due punti $(p + 1)$-pli infinitamente vicini, nè può avere, per quanto si è detto in principio di questo numero, un punto $(p + 1)$-plo, diverso dai punti B_i, infinitamente vicino ad uno dei punti B_i. La mancanza delle curve aggiunte di ordine zero, e di indice p alla Γ posta come conseguenza che due dei punti B_i, in cui Γ ha la multiplicità $p + 1$, sono infinitamente vicini e quindi, con una trasformazione quadratica, si può abbassare l'ordine della curva di diramazione passando dal fascio (Φ) ad un altro fascio di Halphen dello stesso ordine $3m$.

Sia $r_1 + r_2 + r_3 = 3p + 2$.

Sarà

$$r_1 = p + 2, \qquad r_i = p \qquad (i = 2, 3, \ldots, 7),$$

ovvero

$$r_1 = r_2 = p + 1, \qquad r_i = p \qquad (i = 3, 4, \ldots, 7).$$

Nel primo caso si può abbassare l'ordine di Γ; nel secondo caso la mancanza delle curve aggiunte a Γ d'indice p, porta come conseguenza che i punti B_1, B_2 sono infinitamente vicini e quindi, con una trasformazione quadratica, si può, anche in questo caso, abbassare l'ordine di Γ.

La mancanza di curve aggiunte d'indice p a Γ esclude la possibilità che sia

$$r_1 + r_2 + r_3 \leqq 3p + 1.$$

b) Sia $r_1 + r_2 + r_3 = 3p + 4$, dove r_1, r_2, r_3 sono dispari.

Avremo

$$r_1 = r_2 = p + 2, \qquad r_i = p \ \ (i = 3, 4, \ldots, 8), \qquad r_9 = p - 1,$$

ovvero

$$r_1 = p + 4, \qquad r_i = p \quad (i = 2, 3, \ldots, 8), \qquad r_9 = p - 1.$$

In ambedue i casi al punto B_1 è infinitamente vicino un punto B_k $(k = 2, 3, \ldots, 8)$ e quindi si può abbassare l'ordine di Γ.

Sia $r_1 + r_2 + r_3 = 3p + 3$.

Si avrà

α] $$r_1 = p + 3, \qquad r_i = p \qquad (i = 2, 3, \ldots, 9)$$

ovvero

β] $$r_1 = p + 2, \qquad r_2 = p + 1, \qquad r_i = p \qquad (i = 3, 4, \ldots, 9)$$

o finalmente

γ] $$r_1 = r_2 = r_3 = p + 1, \qquad r_i \leqq p + 1 \qquad (i = 3, 4, \ldots, 9).$$

α] In questo caso Γ ha in B_1 un punto $(p+3)$-plo, negli altri punti B_i ha la multiplicità p; quindi questi otto punti sono a due a due infinitamente vicini.

Se due di questi punti infinitamente vicini non sono allineati con B_1, potremo abbassare l'ordine della curva di diramazione.

Se non è possibile trovare una siffatta coppia di punti p-pli infinitamente vicini, la curva di diramazione sarà costituita da quattro rette (r) passanti per B_1 e da una curva di ordine $3(p - 1)$ avente in B_1 un punto $(p - 1)$-plo e su ogni retta r due punti $(p - 1)$-pli infinitamente vicini.

Questa curva residua (n[i] 11, 12) non può avere nessuna coppia di punti p-pli infinitamente vicini, nè nessun punto $(p + 1)$-plo; e quindi, se fosse $p \geqq 3$, l'insieme delle quattro rette (r) costituirebbe una curva aggiunta d'indice $p - 1 \geqq 2$ a Γ e il piano doppio non sarebbe razionale. Se poi fosse $p = 1$, la curva di diramazione sarebbe l'insieme delle quattro rette (r), ma nemmeno in questo caso il piano doppio sarebbe razionale, perchè rappresenterebbe una rigata irregolare.

β] In questo caso al punto B_1 è infinitamente vicino un punto B_i in cui Γ ha la multiplicità p. Se questi due punti non sono allineati con B_2 si può abbassare l'ordine di Γ. Nel caso contrario si stacca da questa curva una retta r aggiunta d'indice p a Γ. Deve essere quindi $p = 1$; la curva di diramazione è una quartica spezzata in una retta r passante per B_1 e in una cubica C con un punto doppio in B_1. I punti base di (Φ) sono il punto B_1, il punto infinitamente vicino a questo sulla retta r, il punto in cui r incontra ulteriormente C, ed altri sei punti a due a due infinitamente vicini su C. In particolare C può spezzarsi in una conica e una retta, o in tre rette.

γ] Se B_1, B_2, B_3 non sono in linea retta, si può abbassare l'ordine di Γ. Se B_1, B_2, B_3 sono in linea retta ed $r_4 = p + 1$, B_4 non sarà allineato con B_1, B_2 e quindi si può abbassare l'ordine di Γ.

Se $r_4 = r_5 = \cdots = r_9 = p$ e B_1, B_2, B_3 sono in linea retta, questa è aggiunta di indice p alla curva di diramazione e quindi deve essere $p = 1$. La curva di diramazione è costituita da una cubica C e da una retta r. I punti base di (Φ) sono i punti comuni a C ed r e sei punti di C a due a due infinitamente vicini. La cubica C potrebbe avere un punto doppio o spezzarsi.

Si vede facilmente che non può essere

$$r_1 + r_2 + r_3 < 3p + 3.$$

c) In modo analogo a quello tenuto finora si dimostra che in questo caso la curva di diramazione si può considerare ridotta a due rette (r, s) o ad una conica.

Nel primo caso i punti base di (Φ) sono il punto comune ad r ed s, due punti infinitamente vicini su r e due su s, e quattro punti fuori della curva di diramazione.

Nel secondo caso i punti base di (Φ) sono sei punti della conica a due a due infinitamente vicini e tre punti fuori della conica.

14. Risulta da questa discussione che, se in un piano doppio razionale si ha un fascio (Φ) di curve ellittiche, immagine di un fascio di curve ellittiche, la curva di diramazione del piano doppio si può supporre ridotta:

1° ad una conica;

2° ad una coppia di rette;

3° ad una quartica con due punti doppî.

Ridotta la curva di diramazione ad una conica Γ, il fascio (Φ) si può supporre ridotto ad uno dei seguenti:

a) Fascio di ordine $4m$ con due punti base $2m$-pli fuori di Γ ed otto punti base m-pli su Γ a due a due infinitamente vicini.

b) Fascio di ordine $4m$ con un punto base $2m$-plo fuori di Γ, un punto base $2m$-plo in un punto di Γ a cui sono infinitamente vicini due punti m-pli nella stessa direzione, e sei punti m-pli, a due a due infinitamente vicini, su Γ.

c) Fascio di ordine $4m$ con due punti $2m$-pli in due punti di Γ, ad ognuno dei quali sono infinitamente vicini due punti m-pli nella stessa direzione, e quattro punti m-pli, a due a due infinitamente vicini, su Γ.

d) Fascio di ordine $3m$ con nove punti m-pli, tra cui sei su Γ a due a due infinitamente vicini.

Ridotta la curva di diramazione ad una coppia di rette (r, s), il fascio (Φ) si può considerare ridotto ad uno dei seguenti:

a') Fascio di ordine $4m$ con un punto $2m$-plo in un punto di r ed uno in un punto di s. Ad ognuno di questi due punti sono infinitamente vicini, nella stessa direzione, due punti m-pli. Il fascio ha inoltre due punti m-pli infinitamente vicini su r e due su s.

b') Fascio di ordine $4m$ con due punti $2m$-pli in due punti di r. Ad ognuno di questi punti sono infinitamente vicini, nella stessa direzione, due punti m-pli.

Ridotta la curva di diramazione ad una quartica Γ con due punti doppî, il fascio (Φ) si può supporre ridotto ad un fascio di ordine $4m$ con un punto $2m$-plo in ognuno dei punti doppî di Γ ed otto punti m-pli su Γ, a due a due infinitamente vicini.

15. Costruendo ora le involuzioni piane relative ai piani doppî del n° precedente si giunge al seguente risultato:

Se si ha in un piano una involuzione (I) che trasforma in sè stessa ogni curva C di un fascio (F) di genere uno, determinando su C un'involuzione ellittica; o trasforma *ogni curva di (F) in un'altra curva del fascio, questo si può ridurre:*

1° *Ad un fascio di ordine $3m$ con nove punti m-pli di cui tre situati sopra una retta r. L'involuzione (I) è un'omologia armonica che ha per asse r. Gli altri sei punti base del fascio costituiscono tre coppie di punti coniugati. In particolare, due di questi punti base potrebbero essere infinitamente vicini ad uno dei punti base del fascio situati su r, e questo potrebbe accadere per uno, due o tutti e tre i punti base del fascio situati su r; ovvero due potrebbero essere infinitamente vicini ad uno dei punti base situati su r e quattro infinitamente vicini ad un'altro.* È poi chiaro che:

Per m pari, ogni curva del fascio è trasformata in sè stessa dall'omologia; per m dispari, ogni curva del fascio è trasformata in un'altra curva del fascio.

Ed infatti, secondochè m è pari o dispari, il fascio contiene una curva dalla quale si stacca l'asse di omologia un numero pari o dispari di volte.

2° *Ad un fascio di ordine $4m$ con due punti $2m$-pli su una retta r ed otto punti base m-pli fuori della retta.*

L'involuzione (I) è un'omologia armonica che ha per asse r. Ogni curva del fascio è trasformata in sè stessa dall'omologia.

3° *Ad un fascio di ordine $3m$ con nove punti m-pli situati sopra una cubica C. Questi nove punti sono: un punto O, i quattro punti di contatto delle tangenti condotte da O a C, ed altri quattro punti della cubica, tre dei quali si possono scegliere ad arbitrio. L'involuzione (I) è la trasformazione di* JONQUIÈRES *di terz'ordine che ha come curva unita C ed in cui due punti coniugati sono allineati con O.*

È chiaro che: *quando m è dispari, ogni curva del fascio corrisponde ad un'altra curva del fascio; invece quando m è pari, ogni curva del fascio corrisponde a sè stessa nell'involuzione.*

Infatti, siano P_1, P_2, P_3, P_4 i punti di contatto delle tangenti condotte da O a C. Rappresentiamo le coordinate x, y dei punti di C con funzioni ellittiche di un parametro u:

$$x = p u, \qquad y = p' u.$$

Sia v il valore del parametro in O; H_1, H_2, H_3 tre punti di C corrispondenti ai valori u_1, u_2, u_3 del parametro.

Se H è un punto base di un fascio (F) di HALPHEN di ordine $3m$ trasformato in sè stesso dall'involuzione, il quale abbia come punti base, oltre al punto H, il punto O, i punti P_i, i punti H_1, H_2, H_3; si deve avere, indicando con u il valore del parametro in H:

$$m(-v + u_1 + u_2 + u_3 + u) \equiv 0. \tag{4}$$

Inversamente, se u soddisfa a questa congruenza ed *appartiene al numero m* [cioè non soddisfa a nessun'altra congruenza analoga alla (4), in cui m è sostituito da un numero minore] il punto H, corrispondente al valore u del parametro, ed i punti H_1, H_2, H_3, O, P_1, P_2, P_3, P_4 sono punti base m-pli di un fascio (F) di curve irreduttibili di ordine $3m$.

Ne viene che, se indichiamo con p, q, r, ..., i divisori primi di m, il numero dei fasci (F) è $\psi(m)$, dove:

$$\psi(m) = m^2\left(1 - \frac{1}{p^2}\right)\left(1 - \frac{1}{q^2}\right)\left(1 - \frac{1}{r^2}\right) \dots .$$

D'altra parte, si consideri il piano doppio che ha come curva di diramazione una quartica con due punti doppi, corrispondente alla trasformazione invulutoria di JONQUIÈRES di terz'ordine.

Siano H'_1, H'_2, H'_3 i punti della curva di diramazione corrispondenti ai punti H_1, H_2, H_3 del piano semplice.

Si può facilmente determinare il numero dei fasci (Φ) di curve irreduttibili di ordine $4n$ che hanno un punto base $2n$-plo in ognuno dei punti doppî della quartica di diramazione, due punti n-pli infinitamente vicini in ognuno dei punti H'_i $(i = 1, 2, 3)$ e due punti n-pli infinitamente vicini sulla quartica, in un punto H'.

Il problema, con una trasformazione quadratica, si riduce a determinare il numero dei fasci (Φ_1) di ordine $3n$ con nove punti n-pli, tre dei quali sono i punti comuni ad una cubica C' e ad una retta, quattro sono a due a due infinitamente vicini su C' in due punti A, B dati, gli altri due sono infinitamente vicini su C' in un punto U da determinarsi.

Rappresentando le coordinate di C' con funzioni ellittiche di un parametro u, indicando con u_1 e u_2 i valori del parametro rispettivamente in A e B si deve avere

$$2n(u_1 + u_2 + u) \equiv 0.$$

Inversamente, se u soddisfa a questa congruenza ed appartiene al numero $2n$ quando n è pari, o appartiene al numero $2n$ o al numero n quando n è dispari, il punto U, corrispondente al valore considerato di u, determina un fascio (Φ_1).

Ne viene che, se n è pari, il numero dei fasci (Φ) è $3\psi(n)$ e se n è dispari, è $4\psi(n)$.

Ad un fascio (Φ) corrisponde nel piano semplice un fascio (F) di ordine $6n$ o un fascio (F) di ordine $3n$, secondochè ogni curva di (F) è trasformata in sè stessa dall'involuzione del piano semplice o è trasformata in un'altra curva del fascio.

Se n è dispari, i $4\psi(n)$ fasci (Φ) del piano doppio hanno come corrispondenti i $3\psi(n)$ fasci (F) di ordine $6n$ ed i $\psi(n)$ fasci (F) di ordine $3n$.

Se n è il doppio di un numero dispari, siccome si è visto che i fasci di ordine $3n$ sono rappresentati sul piano doppio da fasci di ordine $2n$, ne viene che ai $3\psi(n)$ fasci (Φ) corrispondono i $3\psi(n)$ fasci (F) di ordine $6n$.

Da ciò facilmente si conclude quello che si è asserito, che, cioè, ogni curva di ordine $6n$ con nove punti $2n$-pli su C, cinque dei quali coincidono coi punti fondamentali della trasformazione involutoria, corrisponde a sè stessa nell'involuzione.

16. Supponiamo che un'involuzione piana di secondo grado trasformi in sè stessa ogni curva di un sistema (S) di genere uno, di dimensione maggiore di uno, determinando sulla curva un'involuzione ellittica.

L'involuzione piana sarà necessariamente l'omologia armonica: due curve di (S)

s'incontreranno in un numero pari di punti mobili e quindi, trattandosi di un sistema di genere uno, in otto, sei o quattro punti mobili.

Nel piano doppio corrispondente all'omologia, il sistema (Σ) corrispondente ad (S) sarà di genere uno e di grado 4, 3 o 2, e si potrà perciò ridurre ad un sistema di cubiche passanti per cinque, sei o sette punti e, per quanto s'è visto nel caso in cui (S) è un fascio, il sistema (Σ) si potrà ridurre ad un sistema di cubiche passanti per O e tangenti a due rette (r, s) passanti per O, che costituiscono la curva di diramazione del piano doppio.

Quindi si conclude:

Se una involuzione piana di secondo grado trasforma in sè stessa ogni curva di un sistema (S) di genere uno, di dimensione maggiore di uno, determinando sopra ogni curva del sistema una involuzione ellittica, il sistema (S) è compreso in un sistema ∞^4 (S_1) ogni curva del quale è trasformata in sè stessa dall'involuzione, e che si può ridurre, trasformando l'involuzione piana in omologia armonica, ad un sistema ∞^4 di quartiche con due punti doppi in due punti dell'asse di omologia.

17. Termineremo col trattare a parte il caso in cui un'involuzione piana (I) trasforma in sè stessa ogni curva di un fascio (F) di cubiche, determinando su ogni cubica del fascio un'involuzione ellittica.

Sia P uno dei punti base di (F). Si consideri nel piano l'involuzione (I_1) che trasforma in sè stessa ogni cubica C di (F), determinando su C l'involuzione razionale in cui due punti coniugati sono allineati col punto in cui C è ulteriormente incontrata dalla sua tangente in P.

Questa involuzione (I_1) ammette una curva unita (Σ) e trasforma in sè stessa ogni curva del sistema (S) di sest'ordine, avente otto punti base doppî negli otto punti base di (F) diversi da P.

Se esiste l'involuzione (I), rappresentando le coordinate x, y di un punto di C con funzioni ellittiche di un parametro u:

$$x = p\,u, \qquad y = p'\,u,$$

due punti di C coniugati nell'involuzione hanno i parametri u ed u' legati dalla relazione:

$$u' = u + \omega,$$

essendo ω uno dei semiperiodi di $p\,u$.

Se indichiamo con β il valore del parametro in P, due punti di C coniugati nell'involuzione (I_1) hanno i parametri u_1, u'_1 legati dalla relazione:

$$u_1 + u'_1 = 2\,\beta.$$

Ne viene che il luogo dei punti corrispondenti a P nell'involuzione (I) fa parte di (Σ), cioè: di Σ fa parte una curva razionale R che, in particolare, potrebbe ridursi ad un punto.

Quindi se si stabilisce una corrispondenza tra i punti di un piano doppio ed i gruppi di punti coniugati in (I_1), in modo che ad (S) corrisponda un sistema ∞^3 di coniche tangenti in un punto P', al fascio (F) il fascio delle rette passanti per P', la sestica di diramazione di questo piano doppio, avente due punti tripli infinitamente vicini in P', si deve spezzare in una curva razionale, che si può supporre ridotta ad una conica passante per P', ed in una quartica con due punti doppî sulla conica, infinitamente vicini in P'. La quartica potrebbe avere un terzo punto doppio o spezzarsi, ma in questo caso si può supporre che si spezzi in due coniche. Richiamando ora i risultati dei (n^i 6, 7) si conclude che:

Il fascio (F) *si può ridurre ad uno dei seguenti:*

1° *Fascio di cubiche passanti per un punto* O *e tangenti in due punti* Q, Q' *alle rette* OQ *ed* OQ'. *I punti* Q, Q' *sono punti coniugati nell'involuzione ellittica che l'involuzione* (I) *del piano determina sopra ogni curva* C *di* (F).

L'involuzione si costruisce facilmente, ricordando che, se A *ed* A' *sono due punti coniugati di* C, *le rette* QA *e* $Q'A'$ *si tagliano su* C.

2° *Fascio di cubiche aventi un flesso in un punto* Q (la tangente di flesso variando con la curva) *e tangenti in un punto* Q' *ad una retta passante per* Q. *I punti* Q *e* Q' *sono coniugati: l'involuzione si costruisce come nel caso precedente.*

Si vede poi facilmente che ognuno di questi due fasci si riduce ad un fascio di quartiche, riducendo nello stesso tempo l'involuzione piana (I) all'omologia armonica.

Palermo, maggio 1910.

PIA NALLI.