ÜBER DIE ZETAFUNKTION.

Von **Harald Bohr** (Kopenhagen) und **Edmund Landau** (Göttingen).

Adunanza del 13 agosto 1911.

Bohr und Landau haben zuerst in einer gemeinsam verfassten Arbeit [1]) bewiesen:

Für kein $\delta > 0$ liegt $|\zeta(s)|$ im Streifen $1 - \delta < \sigma < 1 + \delta$ oberhalb einer positiven Schranke.

Darauf bewies Bohr [2]) den weitergehenden Satz:

Wenn $\delta > 0$, $k > 0$ und $\tau > 0$ beliebig gegeben sind, so besitzt im Gebiet

$$1 - \delta < \sigma < 1 + \delta, \quad t > \tau$$

die Ungleichung

$$|\zeta(s)| < \frac{1}{(\log\log t)^k}$$

eine Lösung.

Darauf bewies Landau [3]) noch mehr, nämlich:

Wenn $\delta > 0$ gegeben ist, so giebt es ein positives $K = K(\delta)$ derart, dass für $\tau > 0$ im Gebiet

$$1 - \delta < \sigma < 1 + \delta, \quad t > \tau$$

die Ungleichung

$$|\zeta(s)| < \frac{1}{(\log t)^K}$$

eine Lösung besitzt [4]).

In unserer vorliegenden Abhandlung [5]) wird es uns gelingen, auch dies Ergebnis zu überholen. Das Ziel dieser Arbeit ist, zu beweisen:

---

[1]) *Über das Verhalten von $\zeta(s)$ und $\zeta_\kappa(s)$ in der Nähe der Geraden $\sigma = 1$* [Nachrichten von der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1910, S. 303-330].

[2]) *En Sætning om ζ-Funktionen* [Nyt Tidsskrift for Matematik, Afdeling B, Band XXI (1910), S. 60-66].

[3]) *Ein Satz über die ζ-Funktion* [Nyt Tidsskrift for Matematik, Afdeling B, Band XXII (1911), S. 1-7].

[4]) Übrigens hat $K = \frac{\delta}{200}$ diese Eigenschaft.

[5]) Der Leser braucht keine der zitierten Abhandlungen zu kennen.

Wenn $\delta > 0$, $k > 0$ und $\tau > 0$ beliebig gegeben sind, so hat im Gebiet

$$1 - \delta < \sigma < 1 + \delta, \quad t > \tau$$

die Ungleichung

$$|\zeta(s)| < \frac{1}{e^{(\log\log t)^k}}$$

eine Lösung.

Darin liegt speziell enthalten:

Wenn $\delta > 0$ gegeben ist, hat jedes $K > 0$ die Eigenschaft, dass für $\tau > 0$ im Gebiet

$$1 - \delta < \sigma < 1 + \delta, \quad t > \tau$$

die Ungleichung

$$|\zeta(s)| < \frac{1}{(\log t)^K}$$

eine Lösung besitzt.

§ 1.

Ein Hilfssatz.

HILFSSATZ: *Es sei $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ eine Folge von Zahlen $\geqq 0$, und es werde*

$$\sum_{n=1}^{x} a_n = H(x)$$

gesetzt. Es sei ν ganz, $\geqq 0$ und so beschaffen, dass

$$H(x) = O(x \log^\nu x),$$

d. h.

$$\limsup_{x=\infty} \frac{H(x)}{x \log^\nu x} < \infty$$

ist; eo ipso ist dann

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

für $\sigma > 1$ konvergent. Es sei ferner

$$\liminf_{x=\infty} \frac{H(x)}{x \log^\nu x} > 0.$$

Dann existiert eine positive Zahl q derart, dass bei jedem festen reellen τ die Ungleichung

$$|f(s)| > q(\log\log t)^{\nu+1}$$

im Gebiete $\sigma > 1$, $t \geqq \tau$ eine Lösung besitzt.

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf erstens $a_1 > 0$ angenommen werden, zweitens τ ganz und $\geqq 2$.

Wegen $a_1 > 0$ giebt es mit Rücksicht auf die gemachten Voraussetzungen zwei positive ganze Zahlen γ und Γ derart, dass für alle $x \geqq 1$

$$H(x) > \frac{1}{\gamma}(x+1)\log^\nu(x+1)$$

und für alle $x \geqq 2$

$$H(x) < \Gamma x \log^\nu x$$

ist.

Es sei ε eine positive Grösse, über die wir noch verfügen werden. Wir betrachten die Funktion $f(s)$ auf der Geraden $\sigma = 1 + \varepsilon$.

Es sei N eine ganze Zahl $\geqq 2$, über die wir gleichfalls noch verfügen werden. Bekanntlich [6]) giebt es ein $t' = t'(N)$ derart, dass

$$\tau \leqq t' \leqq 6^N \tau$$

und für $1 \leqq n \leqq N$

$$\cos(t' \log n) > \frac{1}{2}$$

ist. Alsdann ist

$$\begin{aligned}
|f(1+\varepsilon+t'i)| &\geqq \Re f(1+\varepsilon+t'i) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos(t'\log n)}{n^{1+\varepsilon}} \\
&> \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n^{1+\varepsilon}} - \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{1+\varepsilon}} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \frac{H(n)-H(n-1)}{n^{1+\varepsilon}} - \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{H(n)-H(n-1)}{n^{1+\varepsilon}} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N-1} H(n)\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}} - \frac{1}{(n+1)^{1+\varepsilon}}\right) + \frac{H(N)}{2N^{1+\varepsilon}} - \sum_{n=N}^{\infty} H(n)\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}} - \frac{1}{(n+1)^{1+\varepsilon}}\right) + \frac{H(N)}{N^{1+\varepsilon}} \\
&> \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N-1} \frac{(n+1)\log^\nu(n+1)}{\gamma}(1+\varepsilon)\int_n^{n+1}\frac{du}{u^{2+\varepsilon}} - \sum_{n=N}^{\infty} \Gamma n \log^\nu n (1+\varepsilon)\int_n^{n+1}\frac{du}{u^{2+\varepsilon}} \\
&> \frac{1+\varepsilon}{2\gamma}\sum_{n=1}^{N-1}\int_n^{n+1}\frac{u\log^\nu u\,du}{u^{2+\varepsilon}} - \Gamma(1+\varepsilon)\sum_{n=N}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{u\log^\nu u\,du}{u^{2+\varepsilon}} \\
&= (1+\varepsilon)\left(\frac{1}{2\gamma}\int_1^N \frac{\log^\nu u\,du}{u^{1+\varepsilon}} - \Gamma\int_N^\infty \frac{\log^\nu u\,du}{u^{1+\varepsilon}}\right).
\end{aligned}$$

Wegen

$$\int \frac{\log^\nu u\,du}{u^{1+\varepsilon}} = -\frac{1}{u^\varepsilon}\left(\frac{\log^\nu u}{\varepsilon} + \frac{\nu\log^{\nu-1}u}{\varepsilon^2} + \frac{\nu(\nu-1)\log^{\nu-2}u}{\varepsilon^3} + \cdots + \frac{\nu!}{\varepsilon^{\nu+1}}\right) + c$$

ist daher

$$\begin{aligned}
|f(1+\varepsilon+t'i)| &> (1+\varepsilon)\left(\frac{1}{2\gamma}\frac{\nu!}{\varepsilon^{\nu+1}} - \frac{1}{2\gamma N^\varepsilon}\left(\frac{\log^\nu N}{\varepsilon} + \cdots + \frac{\nu!}{\varepsilon^{\nu+1}}\right) - \frac{\Gamma}{N^\varepsilon}\left(\frac{\log^\nu N}{\varepsilon} + \cdots + \frac{\nu!}{\varepsilon^{\nu+1}}\right)\right) \\
&= \frac{1+\varepsilon}{2\gamma\varepsilon^{\nu+1}}\left(\nu! - \frac{1}{N^\varepsilon}\left(c_\nu(\varepsilon\log N)^\nu + \cdots + c_1\varepsilon\log N + c_0\right)\right),
\end{aligned}$$

wo $c_0, \ldots, c_\nu$ von ε und N unabhängig sind.

---

[6]) Denn nach KRONECKER lassen sich die N Ungleichungen

$$|t'\log n - 2\pi x_n| < \frac{\pi}{3} = 2\pi.\frac{1}{6} \qquad (n = 1, \ldots, N)$$

in ganzzahligen x_n $(n = 1, \ldots, N)$ nebst einem (sogar ganzen und durch τ teilbaren) t' des Intervalls $\tau \leqq t' \leqq 6^N\tau$ erfüllen.

Wir setzen nunmehr

$$\varepsilon = \frac{1}{4\gamma\tau},$$

bestimmen eine positive ganze Zahl $P \geqq 2$ so, dass

$$\frac{1}{P}(c_\nu \log^\nu P + \cdots + c_1 \log P + c_0) < \frac{\nu!}{2}$$

ist, und setzen

$$N = P^{4\gamma\tau}$$
$$= P^{\frac{1}{\varepsilon}}.$$

Dann erhalten wir

$$\left|f\left(1 + \frac{1}{4\gamma\tau} + t' i\right)\right| > \frac{1 + \frac{1}{4\gamma\tau}}{2\gamma}(4\gamma\tau)^{\nu+1}\frac{\nu!}{2}$$
$$> \frac{1}{2\gamma}(4\gamma\tau)^{\nu+1}\frac{1}{2}$$
$$= (4\gamma)^\nu \tau^{\nu+1}$$
$$\geqq \tau^{\nu+1}.$$

Hierbei ist

$$t' \leqq 6^{(P^{4\gamma\tau})}\tau$$
$$< 6^{(P^{5\gamma\tau})},$$

also

$$\log t' < P^{5\gamma\tau}\log 6,$$
$$\log\log t' < 5\gamma\tau \log P + \log\log 6$$
$$< Q\tau,$$

wo Q nicht von t' und τ abhängt. Daher ist

$$\left|f\left(1 + \frac{1}{4\gamma\tau} + t' i\right)\right| > \left(\frac{\log\log t'}{Q}\right)^{\nu+1}$$
$$= q(\log\log t')^{\nu+1}.$$

Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

§ 2.

Anwendung des Hilfssatzes auf die Zetafunktion.

Für $\sigma > 1$ ist

$$(-1)^{\nu+1}\frac{d^{\nu+1}\log\zeta(s)}{d s^{\nu+1}} = (-1)^{\nu+1}\frac{d^{\nu+1}}{d s^{\nu+1}}\sum_{p,m}\frac{1}{m p^{ms}}$$

(1)
$$= \sum_{p,m}\frac{m^\nu \log^{\nu+1} p}{p^{ms}}$$
$$= \sum_{p}\frac{\log^{\nu+1} p}{p^s} + D(s),$$

wo $D(s)$ eine für $\sigma > \frac{1}{2}$ absolut konvergente DIRICHLETsche Reihe ist. Die Voraussetzungen des Hilfssatzes sind offenbar bei der DIRICHLETschen Reihe (1) erfüllt. Dies folgt nämlich bereits aus den TSCHEBYSCHEFschen Relationen

$$0 < \liminf_{x=\infty} \frac{\vartheta(x)}{x},$$

$$\limsup_{x=\infty} \frac{\vartheta(x)}{x} < \infty,$$

wo

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$$

ist. In der That ergiebt sich einerseits

$$\sum_{p \leq x} \log^{\nu+1} p \leq \log^\nu x \sum_{p \leq x} \log p$$
$$= O(x \log^\nu x),$$

andererseits

$$\sum_{p \leq x} \log^{\nu+1} p \geq \sum_{\sqrt{x} < p \leq x} \log^\nu p \log p$$
$$\geq \log^\nu (\sqrt{x}) \sum_{\sqrt{x} < p \leq x} \log p$$
$$= \frac{1}{2^\nu} \log^\nu x \left(\vartheta(x) - \vartheta(\sqrt{x})\right)$$
$$= \frac{1}{2^\nu} \log^\nu x \, \vartheta(x) + O(\sqrt{x} \log^\nu x),$$

$$\liminf_{x=\infty} \frac{\sum\limits_{p \leq x} \log^{\nu+1} p}{x \log^\nu x} > 0,$$

und die Reihe $D(s)$ ist für $s = 1$ konvergent, so dass

$$\frac{\sum\limits_{p^m \leq x} m^\nu \log^{\nu+1} p}{x \log^\nu x} = \frac{\sum\limits_{p \leq x} \log^{\nu+1} p}{x \log^\nu x} + o(1)$$

ist.

Der Hilfssatz ergiebt bei fest gegebenem $\nu \geq 0$: Es existiert ein $q = q(\nu) > 0$ derart, dass bei jedem τ die Ungleichung

$$|\log^{(\nu+1)} \zeta(s)| > q (\log \log t)^{\nu+1} \tag{2}$$

im Gebiet $\sigma > 1$, $t \geq \tau$ eine Lösung besitzt.

Wir wählen demgemäss eine abzählbare Folge

$$\sigma_1 + t_1 i, \ldots, \sigma_n + t_n i, \ldots$$

von Lösungen der Ungleichung (2) derart, dass

$$\sigma_n > 1$$

und

$$\lim_{n=\infty} t_n = \infty$$

ist. Eo ipso ist dabei

$$\lim_{n=\infty} \sigma_n = 1.$$

§ 3.

Beweis des Hauptsatzes.

SATZ: *Wenn* $\delta > 0$, $k > 0$ *und* $\tau > 0$ *beliebig gegeben sind, so hat im Gebiet*

(3) $$1 - \delta < \sigma < 1 + \delta, \quad t > \tau$$

die Ungleichung

$$|\zeta(s)| < \frac{1}{e^{(\log\log t)^k}}$$

eine Lösung.

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf $\tau \geqq 3$ angenommen werden.

Erster Fall: Wenn im Gebiet (3) die Zetafunktion mindestens eine Wurzel $s' = \sigma' + t'i$ besitzt, ist

$$\begin{aligned} |\zeta(s')| &= 0 \\ &< \frac{1}{e^{(\log\log t')^k}}. \end{aligned}$$

Zweiter Fall: Wenn im Gebiet (3) die Zetafunktion keine Wurzel besitzt, ist jedenfalls $\delta \leqq \frac{1}{2}$.

Wir setzen nun $\nu = [k]$. Es bezeichne $\sigma_n + t_n i$ die am Ende des § 2 gefundene zugehörige Folge. Wir wählen $n_0 = n_0(\delta, k, \tau)$ derart, dass für alle $n \geqq n_0$

$$1 < \sigma_n < 1 + \frac{\delta}{8}$$

und

$$t_n > \tau + \frac{5\delta}{8}$$

ist.

Die Funktion $\log\zeta(s)$ ist im vorliegenden Fall in der Viertelebene $\sigma > 1 - \delta$, $t > \tau$ regulär, also a fortiori für $n \geqq n_0$ im Kreis mit dem Mittelpunkt $\sigma_n + t_n i$ und dem Radius $\frac{\delta}{8}$. Es nehme $|\log\zeta(s)|$ auf der Peripherie dieses Kreises seinen grössten Wert im Punkt $s'_n = \sigma'_n + t'_n i$ an; dann ist nach einer CAUCHYschen Ungleichung

$$|\log^{(\nu+1)}\zeta(\sigma_n + t_n i)| \leqq \frac{(\nu+1)!\,|\log\zeta(s'_n)|}{\left(\frac{\delta}{8}\right)^{\nu+1}},$$

also mit Rücksicht darauf, dass (2) im Punkte $s = s_n$ erfüllt ist,

$$\begin{aligned} |\log\zeta(s'_n)| &\geqq \frac{\delta^{\nu+1}}{8^{\nu+1}(\nu+1)!}|\log^{(\nu+1)}\zeta(\sigma_n + t_n i)| \\ &> \frac{\delta^{\nu+1} q}{8^{\nu+1}(\nu+1)!}(\log\log t_n)^{\nu+1} \\ &= q_1(\log\log t_n)^{\nu+1}, \end{aligned}$$

wo q_1, sowie in der Folge $q_2, \ldots$, nur von δ und k abhängige positive Grössen sind. Also ist für $n \geqq n_0$

$$|\log \zeta(s'_n)| > q_1 \left(\log\log\left(t'_n - \frac{\delta}{8}\right)\right)^{\nu+1}$$

$$(4) \qquad > q_2 (\log\log t'_n)^{\nu+1}.$$

Die Punkte $s'_n = \sigma'_n + t'_n i$, wo $n \geqq n_0$ ist, erfüllen ausser (4) nach dem obigen die Bedingungen

$$1 - \frac{\delta}{8} < \sigma'_n < 1 + \frac{\delta}{4},$$

$$t'_n > \tau + \frac{\delta}{2}.$$

Nach Herrn CARATHÉODORY erfüllt bekanntlich eine für $|s - s_0| \leqq r$ reguläre Funktion auf dem Kreise $|s - s_0| = \rho$, wo $0 < \rho < r$ ist, die Ungleichung

$$|F(s)| \leqq |F(s_0)| \frac{2r}{r-\rho} + 2A\frac{\rho}{r-\rho},$$

wo A das Maximum von $\Re F(s)$ auf dem Kreise $|s - s_0| = r$ bezeichnet.

Diesen Satz wenden wir nun für alle $n \geqq n_0$ auf

$$F(s) = -\log\zeta(s),$$

$$s_0 = 1 + \frac{\delta}{4} + t'_n i,$$

$$r = \frac{\delta}{2},$$

$$\rho = 1 + \frac{\delta}{4} - \sigma'_n$$

an. Die Voraussetzungen sind erfüllt, da für $n \geqq n_0$ einerseits der Kreis $|s - s_0| \leqq r$ dem Gebiet $\sigma > 1 - \delta$, $t > \tau$ angehört und andererseits $0 < \rho < r$ ist. Der Satz ergiebt also speziell, da der Punkt s'_n auf dem Kreise $|s - s_0| = \rho$ liegt,

$$|-\log\zeta(s'_n)| \leqq |-\log\zeta(s_0)| \frac{\delta}{-1 + \frac{\delta}{4} + \sigma'_n} + 2A\frac{1 + \frac{\delta}{4} - \sigma'_n}{-1 + \frac{\delta}{4} + \sigma'_n}$$

$$\leqq \log\zeta\left(1 + \frac{\delta}{4}\right)\frac{\delta}{-1 + \frac{\delta}{4} + 1 - \frac{\delta}{8}} + 2A\frac{1 + \frac{\delta}{4} - \sigma'_n}{-1 + \frac{\delta}{4} + \sigma'_n},$$

$$2A\frac{1 + \frac{\delta}{4} - \sigma'_n}{-1 + \frac{\delta}{4} + \sigma'_n} \geqq |-\log\zeta(s'_n)| - 8\log\zeta\left(1 + \frac{\delta}{4}\right)$$

$$> q_2(\log\log t'_n)^{\nu+1} - 8\log\zeta\left(1 + \frac{\delta}{4}\right).$$

Für alle hinreichend grossen n, d. h. für $n \geqq n_1 = n_1(\delta, k, \tau)$, ist daher

$$2A \frac{1 + \frac{\delta}{4} - \sigma'_n}{-1 + \frac{\delta}{4} + \sigma'_n} > q_3 (\log\log t'_n)^{\nu+1},$$

$$q_3 (\log\log t'_n)^{\nu+1} < 2A \frac{1 + \frac{\delta}{4} - 1 + \frac{\delta}{8}}{-1 + \frac{\delta}{4} + 1 - \frac{\delta}{8}}$$

$$= 6A,$$

$$A > q_4 (\log\log t'_n)^{\nu+1}.$$

A werde von $\Re F(s)$ auf dem Kreise $|s - s_0| = r$ im Punkte $\sigma''_n + t''_n i$ angenommen. Dann ist

$$1 - \delta < \sigma''_n < 1 + \delta,$$

$$t''_n > \tau$$

und

$$\Re\left(-\log\zeta(s''_n)\right) > q_4 (\log\log t'_n)^{\nu+1}$$

$$> q_4 \left(\log\log\left(t''_n - \frac{\delta}{2}\right)\right)^{\nu+1}$$

$$> q_5 (\log\log t''_n)^{\nu+1};$$

wegen $\nu + 1 > k$ ist also für alle hinreichend grossen n, d. h. für $n \geqq n_2 = n_2(\delta, k, \tau)$,

$$\Re\left(-\log\zeta(s''_n)\right) > (\log\log t''_n)^k.$$

Es giebt also ein $s = \sigma + ti$ im Gebiete $1 - \delta < \sigma < 1 + \delta$, $t > \tau$, so dass

$$\log \frac{1}{|\zeta(s)|} = \Re\left(-\log\zeta(s)\right)$$

$$> (\log\log t)^k,$$

$$|\zeta(s)| < \frac{1}{e^{(\log\log t)^k}}$$

ist.

Göttingen, den 22. Juli 1911.

HARALD BOHR.
EDMUND LANDAU.