SUL PROBLEMA DI *APPELL* DELLA TRASFORMAZIONE DELLE EQUAZIONI DELLA DINAMICA; NOTA DEL DOTT. GIUSEPPE PICCIATI.

Il problema proposto dal sig. Appell alla fine della sua Memoria « *Sur l'homographie en mécanique* » (*American Journal* Tom. XII) di cercare se ad ogni moto di un sistema di grado di libertà $n$, e sotto l'azione di forze non dipendenti che dalla posizione del sistema, si può fare corrispondere un moto analogo di un secondo sistema di ugual grado di libertà, è stato risoluto dal sig. Dautheville per il caso di $n = 2$ nella Memoria « *Sur une transformation de mouvement* » (*Ann. de l'Éc. Norm. Sup.* T. 7, 1890). Egli mostra come si può trasformare il moto di un punto sopra una superficie in un moto sopra un' altra, se le due superfici soddisfano alle condizioni stabilite dal Dini affinchè si corrispondano le loro linee geodetiche, ed infine come si può trasformare in un moto piano il moto di un punto sopra una superficie a curvatura totale costante, essendo in questo caso le trasformazioni quelle del problema del Beltrami che fanno corrispondere alle geodetiche della superficie le rette del piano.

Queste trasformazioni del moto di un punto sopra una superficie in generale però non conservano l' integrale delle forze vive che si ha se sopra una delle superfici le forze ammettono un potenziale; mi propongo ora di vedere se ed in quali casi si può conservare questo integrale.

Consideriamo due superfici S ed $S_1$ e facciamo corrispondere ad un punto della prima uno della seconda. Riferiamole a quei due sistemi ortogonali che sappiamo per un teorema del sig. Tissot corrispondersi sulle due superfici e siano i loro elementi lineari:

$$ds^2 = \mathrm{E}du^2 + \mathrm{G}dv^2 \ , \quad ds_1^2 = \mathrm{E}_1 du^2 + \mathrm{G}_1 dv^2.$$

Il moto di un punto di massa uno sulla superficie S è definito dalle equazioni

$$
(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial u'}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial u} = P \quad , \quad u' = \dfrac{du}{dt} \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial v'}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial v} = Q \quad , \quad v' = \dfrac{dv}{dt} \end{cases}
$$

ove

$$
2T = E u'^2 + G v'^2
$$

e P, Q sono funzioni solo di $u$ e $v$.

Come ha mostrato il Dautheville si può fare corrispondere al moto definito dalle (1) il moto di un punto di massa uno sopra la superficie $S_1$ definito dalle equazioni:

$$
(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt_1}\left(\dfrac{\partial T_1}{\partial u'_1}\right) - \dfrac{\partial T_1}{\partial u} = P_1 \quad , \quad u'_1 = \dfrac{du}{dt_1} \\ \dfrac{d}{dt_1}\left(\dfrac{\partial T_1}{\partial v'_1}\right) - \dfrac{\partial T_1}{\partial v} = Q_1 \quad , \quad v'_1 = \dfrac{dv}{dt_1} \end{cases}
$$

ove

$$
2T_1 = E_1 u'^2_1 + G_1 v'^2_1
$$

essendo pure $P_1$ e $Q_1$ funzioni solo di $u$, $v$ quando sia $t_1$ legato a $t$ dalla relazione

$$
(3) \qquad dt_1 = \lambda(u, v)\, dt
$$

e siano poi soddisfatte le equazioni seguenti:

$$
(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\partial \lambda}{\partial u} = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{E}\dfrac{\partial E}{\partial u} - \dfrac{1}{E_1}\dfrac{\partial E_1}{\partial u}\right) \\ \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\partial \lambda}{\partial v} = - \quad \left(\dfrac{1}{E}\dfrac{\partial E}{\partial v} - \dfrac{1}{E_1}\dfrac{\partial E_1}{\partial v}\right) \\ \dfrac{1}{E}\dfrac{\partial G}{\partial u} = \dfrac{1}{E_1}\dfrac{\partial G_1}{\partial u} \\ \dfrac{1}{G}\dfrac{\partial E}{\partial v} = \dfrac{1}{G_1}\dfrac{\partial E_1}{\partial v} \\ \dfrac{2}{G}\dfrac{\partial G}{\partial u} - \dfrac{1}{E}\dfrac{\partial E}{\partial u} = \dfrac{2}{G_1}\dfrac{\partial G_1}{\partial u} - \dfrac{1}{E_1}\dfrac{\partial E_1}{\partial u} \\ \dfrac{2}{E}\dfrac{\partial E}{\partial v} - \dfrac{1}{G}\dfrac{\partial G}{\partial v} = \dfrac{2}{E_1}\dfrac{\partial E_1}{\partial v} - \dfrac{1}{G_1}\dfrac{\partial G_1}{\partial v} \end{cases}
$$

Di queste le ultime quattro sono le condizioni stabilite dal Dini affinchè si corrispondano sulle due superfici le linee geodetiche e la loro integrazione da [1]) per E, G, $E_1$, $G_1$ le espressioni

$$(5)\quad \begin{cases} E = U_1^2 (U - V) \quad , \quad G = V_1^2 (U - V) \\ E_1 = \left(\frac{1}{V} - \frac{1}{U}\right) \frac{U_1^2}{U} \, , \quad G_1 = \left(\frac{1}{V} - \frac{1}{U}\right) \frac{V_1^2}{V} \end{cases}$$

in cui U, $U_1$ sono funzioni di $u$ e V, $V_1$ di $v$.

Le prime due danno per $\lambda$ il valore

$$(6)\qquad \lambda = \frac{K}{U V}$$

ove K è costante e per $P_1$ e $Q_1$ si hanno poi le espressioni:

$$(7)\qquad P_1 = \frac{E_1 P}{E \lambda^2} \, , \quad Q_1 = \frac{G_1 Q}{G \lambda^2} \, .$$

Quando le forze sopra una delle superfici ammettono un potenziale si ha per il moto l'integrale delle forze vive, a cui corrisponde nel moto trasformato sopra l'altra un integrale di secondo grado. Supponiamo che questo integrale delle forze vive si abbia per il moto sopra la superficie $S_1$; dovendo le $P_1$, $Q_1$ esser derivate di una stessa funzione $\pi_1$ dovranno le P, Q soddisfare alla condizione:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E_1 P}{E \lambda^2}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G_1 Q}{G \lambda^2}\right)$$

che per le (5) e (6) diviene:

$$(8)\qquad \frac{\partial}{\partial v} (V P) = \frac{\partial}{\partial u} (U Q)$$

e quando essa sia soddisfatta all'integrale $E_1 u'^2_1 + G_1 v'^2_1 = 2(\pi_1 + h)$ per il moto su $S_1$ corrisponderà sopra la superficie S l'integrale $\frac{E_1 u'^2 + G_1 v'^2}{\lambda^2} = 2(\pi_1 + h)$. Se poi vogliamo che questo integrale

1) Darboux, *Théorie des surfaces*. III partie, 1° fasc. pag. 50.

delle forze vive sussista per ambedue i moti dovrà aversi anche sopra S un potenziale $\pi$, il quale dovrà quindi per la (8) soddisfare l'equazione

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(V\frac{\partial \pi}{\partial u}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(U\frac{\partial \pi}{\partial v}\right)$$

che serve a determinarlo. Da essa infatti che si può scrivere

$$\text{(9)} \qquad \frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\left\{(V-U)\pi\right\}=0$$

si ricava per $\pi$ l'espressione:

$$\text{(10)} \qquad \pi=\frac{f(v)+\phi(u)}{V-U}$$

essendo $f$ e $\phi$ funzioni arbitrarie, e per il potenziale del moto trasformato si ha poi subito per le (7) l'espressione

$$\text{(11)} \qquad \pi_1=\frac{V\phi(u)+Uf(v)}{K^2(V-U)} .$$

Si ha quindi il resultato seguente:

« Se riferendo due superfici S, $S_1$ a quei due sistemi ortogonali che sopra esse si corrispondono, i loro elementi lineari assumono la forma

$$\text{(12)} \qquad \left\{\begin{aligned} ds^2 &= (U-V)\left\{U_1^2du^2+V_1^2dv^2\right\}\\ ds_1^2 &= \left(\frac{1}{V}-\frac{1}{U}\right)\left\{\frac{U_1^2}{U}du^2+\frac{V_1^2}{V}dv^2\right\}\end{aligned}\right.$$

si può trasformare il moto di un punto di massa uno sulla superficie S in uno corrispondente sulla $S_1$ in modo che si conservi l'integrale delle forze vive solo quando il potenziale sopra S ha la forma (10); il potenziale del moto trasformato prende la forma (11) ».

I due casi precedenti di moto di un punto sopra una superficie definita da un elemento lineare delle forme (12) e con un potenziale delle forme (10) e (11) rientrano nel caso generale studiato dal Liouville [1]) e dal Morera [2]), in cui l'integrazione delle equazioni del moto è effettuabile. Infatti dimostra il Morera che affinchè si possa eseguire la separazione delle variabili, e quindi determinare facilmente un integrale completo dell'equazione a derivate parziali, da cui dipende l'integrazione dell'equazioni del moto, è necessario e sufficiente:

1°. Che l'espressione della forza viva sia $\theta(\psi u'^2 + \chi v'^2)$ essendo in $\theta$ le $u$, $v$ separate e $\psi$ funzione solo di $u$ e $\chi$ di $v$.

2°. Che nel prodotto $\theta\pi$ della funzione delle forze $\pi$ per $\theta$ le variabili $u$, $v$ siano ancora separate.

Ora questo si verifica per i due moti sopra le superfici S ed $S_1$ e ci permette quindi di dire che:

« Il solo caso in cui la trasformazione del moto di un punto sopra una superficie nel moto sopra un'altra, conserva l'integrale delle forze vive è quello in cui il potenziale e la forza viva hanno la forma considerata dal Liouville.

Consideriamo ora il caso particolare in cui una delle superfici è piana e determiniamo esplicitamente quale deve essere la forma del potenziale del moto del punto sulla superficie affinchè anche per il moto piano corrispondente si abbia potenziale. Intanto la trasformazione dovrà far corrispondere alle geodetiche della superficie le rette del piano, quindi dovrà la superficie, per un teorema del Beltrami, essere a curvatura totale costante. Queste trasformazioni sono state determinate in generale dal Dautheville (Mem. cit.) nei tre casi della superficie a curvatura totale nulla, positiva e negativa e ci permettono la risoluzione del problema proposto.

Riferiamo la superficie al sistema di coordinate curvilinee formato da una famiglia di geodetiche e dalle loro traiettorie ortogonali; il suo elemento lineare prende la forma:

$$ds^2 = du^2 + c^2 dv^2 .$$

1) Liouville, *Journal de Mathématiques*, 1846.

2) Morera, *Atti dell' Accademia delle Scienze di Torino* t. XVI. *Sulla separazione delle variabili nelle equazioni del moto di un punto materiale sopra una superficie*.

Il moto di un punto sopra di essa è definito dalle equazioni

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt_1}\left(\dfrac{\partial T}{\partial u'}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial u} = P\,, & u' = \dfrac{du}{dt_1} \\ \dfrac{d}{dt_1}\left(\dfrac{\partial T}{\partial v'}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial v} = Q\,, & v' = \dfrac{dv}{dt_1} \end{cases}$$

$$2T = u'^2 + c^2 v'^2$$

ove $t_1$ indica il tempo, ed il moto sul piano è definito da

$$(2) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = X\,, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y$$

con $x\,y$ coordinate cartesiane ortogonali ed X, Y funzioni solo di $x, y$. Le trasformazioni della forma

$$(3) \qquad x = f(u, v) \qquad y = \phi(u, v) \qquad dt_1 = \lambda(u, v)\,dt$$

che servono a passare dalle (2) alle (1) con la condizione che siano anche P e Q indipendenti da $u', v'$ debbono soddisfare, come mostra il Dautheville, alle seguenti equazioni che le determinano:

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}\dfrac{\partial \phi}{\partial v} - \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial u^2}\dfrac{\partial f}{\partial v}\right) + \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\partial \lambda}{\partial u} = 0 \\ \dfrac{2}{\Delta}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\dfrac{\partial \phi}{\partial v} - \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial u\,\partial v}\dfrac{\partial f}{\partial v}\right) + \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\partial \lambda}{\partial v} = 0 \\ \dfrac{1}{\Delta}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}\dfrac{\partial \phi}{\partial v} - \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial v^2}\dfrac{\partial f}{\partial v}\right) + c\,\dfrac{\partial c}{\partial u} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} - \dfrac{\partial \phi}{\partial u}\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2} = 0 \\ \dfrac{2}{\Delta}\left(\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial u\,\partial v} - \dfrac{\partial \phi}{\partial u}\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\right) + \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\partial \lambda}{\partial u} - \dfrac{2}{c}\dfrac{\partial c}{\partial u} = 0 \\ \dfrac{1}{\Delta}\left(\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial v^2} - \dfrac{\partial \phi}{\partial u}\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right) + \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\partial \lambda}{\partial v} - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial c}{\partial v} = 0 \end{cases}$$

ove è $\Delta = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial \phi}{\partial v} - \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial \phi}{\partial u}$ e fra P, Q, X, Y si ha poi le relazioni

$$(5) \qquad X = \lambda^2 \left( P \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{Q}{c^2} \frac{\partial f}{\partial v} \right), \qquad Y = \lambda^2 \left( P \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{Q}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)$$

Supponiamo ora che sulla superficie si abbia un potenziale $\pi$; affinchè si abbia anche per il moto piano dovremo avere $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$ ossia

$$\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

Se nella precedente equazione sostituiamo ad X, Y i valori (5) e per $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ i valori che si possono ricavare dalle (3) si ha per la funzione $\pi$ la seguente equazione a derivate parziali

$$(6) \; \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\left\{ \lambda^2 \left( \frac{\partial \pi}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \pi}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial v} \right) \right\} - \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\left\{ \lambda^2 \left( \frac{\partial \pi}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \pi}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial v} \right) \right\}$$
$$= \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\left\{ \lambda^2 \left( \frac{\partial \pi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \pi}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \right\} - \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\left\{ \lambda^2 \left( \frac{\partial \pi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \pi}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \right\}$$

Esaminiamo i tre casi in cui la superficie è a curvatura totale nulla od uguale ad $\frac{1}{a^2}$ od a $-\frac{1}{a^2}$ con $a$ costante; l'elemento lineare cambiando $u$ in $au$ e scegliendo convenientemente la coordinata $v$ prende le forme seguenti [1]):

$$(7) \qquad ds^2 = du^2 + u^2 dv^2$$

$$(8) \qquad ds^2 = a^2 (du^2 + \operatorname{sen}^2 u \, dv^2)$$

$$(9) \qquad ds^2 = a^2 \left( du^2 + \left( \frac{e^u - e^{-u}}{2} \right)^2 dv^2 \right)$$

e quindi le equazioni in termini finiti delle geodetiche sono nei tre casi:

$$(10) \qquad A\, u \cos v + B\, u \operatorname{sen} v + D = 0$$

1) Darboux. *Op. cit.* III. partie, 1° fasc. p. 46.

$$\text{(11)} \qquad A \tang u \cos v + B \tang u \operatorname{sen} v + D = 0$$

$$\text{(12)} \qquad A \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} \cos v + B \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} \operatorname{sen} v + D = 0 .$$

Le trasformazioni che servono al problema si ottengono quindi prendendo per le ordinate rettangolari $x, y$ dei punti del piano i coefficienti di A e B in una delle equazioni precedenti, e quando si è effettuata una tale rappresentazione si otterranno tutte le altre facendo seguire questa, per particolare che sia, dalla trasformazione omografica la più generale nel piano [1]).

Se la superficie è a curvatura nulla la trasformazione è

$$\text{(13)} \qquad x = u \cos v , \quad y = u \operatorname{sen} v , \quad dt_1 = k\, dt$$

con $k$ costante e l'equazione (6) in $\pi$ viene ad essere identicamente soddisfatta; si conserva quindi sempre l'integrale delle forze vive ciò che del resto deve essere giacchè la superficie è sviluppabile e quindi i due moti sono identici.

Se la superficie ha la curvatura totale costante positiva ed uguale ad $\frac{1}{a^2}$ la trasformazione è

$$\text{(14)} \quad x = \tang u \cos v , \quad y = \tang u \operatorname{sen} v , \quad dt_1 = k \cos^2 u\, dt$$

essendo $k$ costante. La (6) determina $\pi$ e si ha che:

« Il moto di un punto sopra una superficie a curvatura totale costante positiva $\frac{1}{a^2}$ sotto l'azione di forze che ammettono il potenziale della forma $\pi = \frac{f(v) + \phi(u)}{\operatorname{sen}^2 u}$ si trasforma mediante le (14) in un moto piano sotto l'azione di forze che ammettono il potenziale $\pi_1 = \frac{k^2}{a^2} \left\{ \frac{\cos^2 u\, f(v) + \phi(u)}{\operatorname{sen}^2 u} \right\}$ in cui si deve porre $u = \operatorname{arctang} \sqrt{x^2 + y^2}$, $v = \operatorname{arctang} \frac{y}{x}$ ».

Se infine la superficie ha la curvatura totale costante negativa $-\frac{1}{a^2}$ la trasformazione è:

1) Dautheville, *Mem. cit.* e Darboux *op. cit.*

$$(15)\quad x=\frac{e^u-e^{-u}}{e^u+e^{-u}}\cos v\,,\quad y=\frac{e^u-e^{-u}}{e^u+e^{-u}}\operatorname{sen} v,\quad dt_1=k\,(e^u+e^{-u})^2\,dt$$

con $k$ costante. Per la (6) si ha che:

« Il moto di un punto sopra una superficie a curvatura totale costante negativa $-\frac{1}{a^2}$ sotto l'azione di forze che ammettono il potenziale della forma $\pi=\frac{f(v)+\varphi(u)}{(e^u-e^{-u})^2}$ si trasforma per le (15) in un moto piano sotto l'azione di forze che ammettono il potenziale $\pi_1=\frac{16k^2}{a^2}\frac{\left(\frac{e^u+e^{-u}}{2}\right)^2 f(v)+\varphi\,(u)}{(e^u-e^{-u})^2}$ ottenendosi l'espressione di $\pi_1$ per $x$, $y$ con la trasformazione

$$u=\frac{1}{2}\log\frac{1+\sqrt{x^2+y^2}}{1-\sqrt{x^2+y^2}},\quad v=\operatorname{arctang}\frac{y}{x}\ ».$$

SULLE PROPRIETÀ FONDAMENTALI DELLA FUNZIONE POTENZIALE NELLA IMMEDIATA PROSSIMITÀ E NELL'ESTENSIONE DELL'AGENTE; MEMORIA DEL PROF. GIAN ANTONIO MAGGI [1]).

§ 7. I precedenti risultati trovano un'immediata applicazione alle derivate seconde di V in un punto interno.

In ogni punto interno P, nel quale $k$ riceve il valore $k_0$, abbiamo:

$$\frac{dV}{dx}=-k_0\int\frac{d\frac{1}{r}}{da}\,d\tau+\int_\omega\cos(rx)\,d\omega\int_r(k-k_0)\,dr$$

$$=k_0\int\frac{1}{r}\cos(nx)\,d\sigma+\int_\omega\cos(rx)\,d\omega\int_r(k-k_0)\,dr\,.$$

1) *Continuazione.* Vedi pag. 106.