

Stabilität und Partikularlösungen linearer Differentialgleichungen.

Von Georg Hamel in Brunn.

Physikalische Probleme der Stabilität¹⁾ führen zu folgender rein mathematischen Fragestellung:

Gegeben sei in einem Bereiche x, y eine lineare, homogene Differentialgleichung $2n^{\text{ter}}$ Ordnung für die abhängige Veränderliche u

$$L_{2n} \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, u, x, y \right) = 0.$$

Die Ableitung nach der Zeit t komme nur, wenn auch vielleicht kombiniert mit anderen, in der ersten Ableitung vor, t selbst explizit nicht. Am Rande — möge u nebst den ersten $n-1$ Ableitungen nach d — — — — — ernd verschwinden. Dann wird im allgemeinen u b — — — — — ann man noch $u = u_0$ zu Anfang ($t=0$) kennt. Andererseits gibt es jedenfalls Lösungen der Form

$$e^{\lambda t} \varphi(x, y),$$

für geeignete λ (die „Eigenwerte“) und es möge feststehen, daß sich die allgemeine Lösung, welche den genannten Randbedingungen genügt, in der Form

$$u = \sum c e^{\lambda t} \varphi(x, y)$$

darstellen lasse, wo die c willkürliche Konstante sind.

Angenommen nun: Alle Eigenwerte λ haben negativ-reellen Bestandteil; ist dann auch für jedes u_0

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \max |u| = 0$$

oder bleibt doch wenigstens $\iint u^2 dx dy$, über das ganze Gebiet erstreckt, dauernd unterhalb einer endlichen Grenze, die mit

$$\iint u_0^2 dx dy$$

unendlich klein wird?

¹⁾ Siehe z. B. des Verfassers Note: Zum Turbulenzproblem, Göttinger Nachrichten, 1911.

Ich werde zeigen, daß die Frage im allgemeinen nicht ohne weiteres bejaht werden kann, und dann das Problem für den einfachsten Fall vollständig lösen.

Es sei beispielsweise die Differentialgleichung gegeben:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\alpha \operatorname{tanhyp} \alpha x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha^2 (2 \operatorname{tanhyp}^2 \alpha x - 1) u, \quad (I)$$

$$\left(\operatorname{tanhyp} \alpha x = \frac{e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}}{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}} \right),$$

die bei der Substitution

$$u = \coshyp \alpha x \cdot V$$

in die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \quad (II)$$

übergeht.

Das Intervall sei $0 \leq x \leq \infty$ und an seinen Enden sei u , also auch V gleich Null vorgeschrieben. Partikuläre Lösungen von (II) sind

$$e^{-\lambda^2 t} \sin \lambda x;$$

von (I) also

$$e^{-\lambda^2 t} \sin \lambda x \cdot \coshyp \alpha x,$$

und bekanntlich läßt sich das allgemeine Integral von (II) bei den gegebenen Randbedingungen durch

$$\int_0^\infty f(\lambda) e^{-\lambda^2 t} \sin \lambda x d\lambda,$$

also das allgemeine Integral von (I) durch

$$\int_0^\infty f(\lambda) e^{-\lambda^2 t} \sin \lambda x \cdot \coshyp \alpha x d\lambda$$

darstellen.

Obwohl aber jede Partikularlösung, aus der sich die allgemeine zusammensetzen läßt, für $t = \infty$ gegen Null geht, gibt es doch eine Lösung u , für welche $\int_0^\infty u^2 dx$ stets existiert, aber mit wachsendem ψ über alle Grenzen geht.

den Randbedingungen entsprechend von Null verschiedene Lösungen hat (die „Eigenfunktionen“ φ), seien alle negativ.

Nach Hilbert (Göttinger Nachrichten 1904, zweite Mitteilung über lineare Integralgleichungen) gibt es nur diskrete Eigenwerte

$$\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \dots,$$

die sich gegen $-\infty$ häufen und das allgemeine Integral von (1) ist

$$u = \sum e^{\lambda_n t} c_n \varphi_n(x),$$

wenn φ_n die zu ihr gehörende Eigenfunktion, d. h. die Lösung von (2) ist.

Definition: Wenn stets $\mathfrak{J} = \int u^2 dx$ abnimmt, wollen wir von starker Stabilität sprechen; wenn wenigstens

$$\lim \mathfrak{J} = \lim \int_0^h u^2 dx$$

unterhalb einer endlichen Grenze bleibt, die mit $\int_0^h u_0^2 dx$ gegen Null geht, aber zu Anfang $\frac{\partial J}{\partial t} > 0$ sein kann, von schwacher Stabilität, wenn aber $\int u^2 dx$ bei gegebenem $\int_0^h u_0^2 dx$ über alle Grenzen wachsen kann, von Labilität.

Wir wollen den Satz beweisen:

Unter den angegebenen Voraussetzungen 1), 2), 3) ist im Fall $b=0$ stets starke Stabilität, im Fall $b \geq 0$ mindestens schwache Stabilität vorhanden. Labilität ist ausgeschlossen.

Beweis: 1. Betrachten wir zunächst den Fall $b=0$, in dem also $L(u)$ sich selbst adjungiert ist.

In diesem Fall ist nach Hilbert (l. c.) der Kern der (2) entsprechenden Integralgleichung

$$\varphi = \lambda \int_0^h G(z; x) \varphi(z) dz, \quad (2')$$

d. h. die Greensche Funktion G der Differentialgleichung

$$L(\varphi) = 0$$

symmetrisch und daher sind die Eigenfunktionen φ , welche (2) resp. (2') befriedigen, zueinander orthogonal.

Also ist

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} u^2 dx &= \frac{1}{4(1+4at)^3} \int_0^{\infty} x^2 e^{\frac{-2ax^2}{1+4at}} \left(e^{2ax} + 2 + e^{-2ax} \right) dx = \\ &= \frac{1}{4(1+4at)^3} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{2a}{1+4at}x^2} \left(1 + e^{2ax} \right) dx.\end{aligned}$$

Nun ergibt Differentiation der Cauchyschen Formel nach p

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-px^2+qx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{p}} \left(\frac{1}{2p} + \frac{q^2}{4p^2} \right) e^{\frac{q^2}{4p}},$$

weshalb

$$J \equiv \int_0^{\infty} u^2 dx = \frac{1}{16a} \sqrt{\frac{\pi}{2a}} \frac{1}{\sqrt{1+4at^3}} \left\{ 1 + \left(1 + \frac{\alpha^2}{a} (1+4at) \right) e^{\frac{\alpha^2}{4a^2} (1+4at)^2} \right\}$$

wird.

Ist $\alpha = 0$, haben wir es also mit der reinen Wärmeleitungsgleichung (II) zu tun, so wird $\lim_{t \rightarrow \infty} J = 0$; ist aber α nicht gleich Null (I), so wird J mit t unendlich, w. z. b. w.

Wir betrachten nun den einfachsten Fall:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L(u) \equiv a(x) \cdot u + 2b(x) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(c(x) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (1)$$

wo also rechts der allgemeinste, homogene, lineare Differentialausdruck 2.0. mit einer unabhängigen Veränderlichen steht.

1. Das Intervall sei endlich: etwa $0 \leq x \leq h$; $c(x)$, $b(x)$, $a(x)$ seien in diesem Intervall regulär, außerdem werde $c(x)$ nirgendwo Null und bleibe also — der Fall negativer $c(x)$ kommt nicht in Frage — oberhalb einer festen Grenze N .

$$c(x) \geq N > 0.$$

2. An den Grenzen: $x=0$ und $x=h$ sei dauernd $u=0$ vorgeschrieben; zu Anfang ($t=0$) sei $u=u_0$ eine reguläre Funktion von x .

3. Die „Eigenwerte“ λ , für welche

$$\lambda \varphi = L(\varphi) \quad (2)$$

den Randbedingungen entsprechend von Null verschiedene Lösungen hat (die „Eigenfunktionen“ φ), seien alle negativ.

Nach Hilbert (Göttinger Nachrichten 1904, zweite Mitteilung über lineare Integralgleichungen) gibt es nur diskrete Eigenwerte

$$\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \dots,$$

die sich gegen $-\infty$ häufen und das allgemeine Integral von (1) ist

$$u = \sum e^{\lambda_n t} c_n \varphi_n(x),$$

wenn φ_n die zu ihr gehörende Eigenfunktion, d. h. die Lösung von (2) ist.

Definition: Wenn stets $\mathfrak{J} = \int u^2 dx$ abnimmt, wollen wir von starker Stabilität sprechen; wenn wenigstens

$$\lim \mathfrak{J} = \lim \int_0^h u^2 dx$$

unterhalb einer endlichen Grenze bleibt, die mit $\int_0^h u_0^2 dx$ gegen Null geht, aber zu Anfang $\frac{\partial J}{\partial t} > 0$ sein kann, von schwacher Stabilität, wenn aber $\int u^2 dx$ bei gegebenem $\int_0^h u_0^2 dx$ über alle Grenzen wachsen kann, von Labilität.

Wir wollen den Satz beweisen:

Unter den angegebenen Voraussetzungen 1), 2), 3) ist im Fall $b=0$ stets starke Stabilität, im Fall $b \geq 0$ mindestens schwache Stabilität vorhanden. Labilität ist ausgeschlossen.

Beweis: 1. Betrachten wir zunächst den Fall $b=0$, in dem also $L(u)$ sich selbst adjungiert ist.

In diesem Fall ist nach Hilbert (l. c.) der Kern der (2) entsprechenden Integralgleichung

$$\varphi = \lambda \int_0^h G(z; x) \varphi(z) dz, \quad (2')$$

d. h. die Greensche Funktion G der Differentialgleichung

$$L(\varphi) = 0$$

symmetrisch und daher sind die Eigenfunktionen φ , welche (2) resp. (2') befriedigen, zueinander orthogonal.

Infolgedessen ist wegen

$$u = \sum c_n \varphi_n(x) e^{\lambda_n t}$$

$$\mathfrak{J} = \int_0^h u^2 dx = \sum c_n^2 e^{2\lambda_n t}$$

eine Summe positiver Glieder, deren jedes wegen $\lambda_n < 0$ ständig abnimmt. Also nimmt auch \mathfrak{J} dauernd ab und geht, weil $\sum c_n^2$ konvergiert ($= J_0$) und

$$J < e^{2\lambda_1 t} \sum c_n^2$$

ist, mit wachsendem t gegen Null.

2. Ist b nicht Null, so setze man

$$w = B(x) u = e^{\int_0^x \frac{b}{c} dx} u.$$

Da nach den Voraussetzungen (1) B nie Null oder Unendlich im Intervall wird, erfüllt auch w die Randbedingungen (2).

w genügt aber einer analogen Differentialgleichung

$$\frac{\partial w}{\partial t} = A(x) \cdot w + \frac{\partial}{\partial x} \left(c \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad (3)$$

wo also jetzt die rechte Seite sich selbst adjungiert ist; es ist

$$A = a(x) - \frac{db}{dx} - \frac{b^2}{c}$$

regulär.

Die Eigenwerte für w sind dieselben wie die für u , denn es ist natürlich

$$\psi_n e^{\lambda_n t} = e^{\lambda_n t} \varphi_n \cdot B(x)$$

eine Partikularlösung von (3);

$$\psi_n = \varphi_n B(x)$$

sind die Eigenfunktionen von

$$\lambda \psi = A \cdot \psi + \frac{\partial}{\partial x} \left(c \frac{\partial \psi}{\partial x} \right).$$

Sie sind orthogonal und es nimmt also jedenfalls

$$J_1 = \int_0^h w^2 dx$$

ständig ab.

Nun ist aber

$$J = \int_0^h u^2 dx = \int_0^h B^2 w^2 dx = B_0^2 J_1,$$

wo B_0^2 einen Mittelwert von B^2 bedeutet.

Und da B^2 unterhalb einer festen Grenze M bleibt, ist

$$J < M \cdot J_1,$$

also

$$\lim_{t=\infty} J = 0.$$

w. z. b. w.

Es besteht also tatsächlich Stabilität, doch kann sie schwach sein.

Denn aus (1) folgt durch Multiplikation mit u Integration über das ganze Intervall und partielle Umformung mit Beachtung der Randbedingungen

$$\frac{1}{2} \frac{dJ}{dt} = \int_0^h u^2 \left(a - \frac{db}{dx} \right) dx - \int_0^h c \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (4)$$

Hat $\int_0^h \left[c \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - a u^2 \right] dx$ keine untere Grenze ≥ 0 , so wäre schon für $\frac{db}{dx} = 0$ starke Stabilität ausgeschlossen.

Habe also $\int_0^h \left(c \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - a u^2 \right) dx$ eine positive untere Grenze.

Wählen wir nun

$$-\frac{db}{dx} = \mu \cdot f(x),$$

wo $f(x)$ wenigstens stellenweise positiv ist, so gibt es sicher auch eine untere Grenze für

$$\int_0^h c \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx - \int_0^h a u^2 dx,$$

während $\int_0^h f(x) u^2 dx = 1$ ist.

Sei diese untere Grenze G .

Wir brauchen dann nur

$$\mu > G$$

zu nehmen, um $\frac{dJ}{dt} > 0$, also schwache Stabilität möglich zu machen.

Anhang. Es sei gestattet, noch eine Bemerkung zu der Frage zu machen: Wann sind denn alle Eigenwerte λ negativ?

Wir können uns auf den Fall $b=0$ beschränken. Dann wird aus (4)

$$\frac{1}{2} \frac{dJ}{dt} = \int_0^h a u^2 dx - \int c \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx.$$

Da nach Früherem bei lauter negativen λ immer $\frac{dJ}{dt} < 0$ sein muß und das natürlich auch hinreichend dafür ist, daß alle $\lambda < 0$ seien, so sind alle λ negativ, wenn für alle u , die an den Rändern verschwinden,

$$\int_0^h c \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx > \int_0^h a u^2 dx$$

ist.

Da man bei $|c| \geq N > 0$ das erste Integral bei festgehaltenem zweiten dem absoluten Werte nach stets beliebig groß machen kann, muß sicher

$$c > 0$$

sein ($c=0$ bleibt ausgeschlossen, auch stellenweise).

Ist dann stets $a < 0$, so sind sicher alle λ negativ. Ist a wenigstens teilweise positiv, so kann man

$$\int_0^h a u^2 dx = 1 \tag{5}$$

vorschreiben.

Damit also alle λ negativ seien, muß das Minimum von

$$\int c \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx$$

unter der Nebenbedingung (5) größer als 1 sein. Nun ist aber dieses Minimum der kleinste positive Eigenwert μ , für welchen die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx} \left(c \frac{du}{dx} \right) + \mu a u = 0 \tag{6}$$

eine an den Grenzen verschwindende Lösung hat.

Damit alle Eigenwerte λ der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx} \left(c \frac{du}{dx} \right) + au = \lambda u \quad (c \geq d > 0, a \text{ wenigstens teilweise positiv})$$

negativ seien, ist notwendig und hinreichend, daß der kleinste positive Eigenwert μ der Differentialgleichung (6) größer als 1 sei.
