

# ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

№ 1362—1364.

## Über die Anwendbarkeit der doppelten Strahlenbrechung bei astronomischen Messungen und Beobachtungen, von Herrn Professor A. Erman.

Die Anwendung der sogenannten Doppelbrechung zur Messung kleiner Winkel ist bereits vor achtzig Jahren in Vorschlag gebracht, von deutschen Mechanikern und Astronomen aber nur wenig beachtet worden.

Die Frage, ob ein nach diesem Vorschlage und namentlich in der von *Rochon* angegebenen Weise construirtes Mikrometer seinem Zwecke entsprechen könne, scheint mir daher um so erheblicher, als ein solches Instrument auch über die Natur des Lichtes von den in ihm geschehenen Objecten einen sehr wichtigen Aufschluss gewähren würde.

Ich setze voraus, dass das zu betrachtende Mikrometer aus einem astronomischen Fernrohre besteht, welches zwischen seinem Objective und Oculare ein System von zweien fest verbundenen Prismen aus Bergkrystall enthält. Diese beiden Prismen sollen einerlei brechenden Winkel ( $J$ ) besitzen und so gelegen sein, dass von dem einen die dem Objective nächste oder erste Ebene, von dem andern die dem Oculare zugekehrte oder zweite Ebene, die Fernrohraxe zur Normale haben. Es seien ferner von dem ersten Prisma die erste Ebene zur Krystallisationsaxe seiner Substanz normal, von dem zweiten Prisma aber der Durchschnitt seiner beiden Ebenen oder seine brechende Kante jener Krystallisationsaxe parallel. Die einander parallelen zweite Ebene des ersten und erste Ebene des zweiten Prisma mögen endlich durch eine Schicht von verschwindend kleiner Dicke getrennt sein, die aus einem durchsichtigen Kitt, dessen Brechungsindex mit  $m$  bezeichnet werde, besteht. Der Erfolg dieser Anordnung wird nun bekanntlich darin bestehen, dass von jedem durch das Objectiv gegangenen Lichtstral der sogenannte ordinäre Theil in den Prismen nach dem gewöhnlichen Brechungsgesetze und mit einem Brechungsindex, der durch  $\mu$  bezeichnet werde, gebrochen wird, während der übrige oder extraordinäre Theil desselben Strales einen andern Weg nimmt, zu dessen jedesmaliger Bestimmung ausser dem Index  $\mu$  auch der sogenannte extraordinäre Brechungsindex, den ich mit  $\mu_1$  bezeichne, beiträgt.

Von jedem vor dem Objective gelegenen Punkte werden daher der geometrische Ort der Durchschnitte seines ordinär gebrochenen und der geometrische Ort der Durchschnitte

seines extraordinär gebrochenen Lichtes je ein Bild erzeugen, deren Abstand mit dem zu bestimmenden Abstände der ordinären Bilder der gleichzeitig in dem Fernrohre sichtbaren Punkte verglichen werden kann.

Seiner Bestimmung als Mikrometer wird das in Rede stehende Instrument demnach dann, und nur dann entsprechen, wenn sich von den Stralen eines vor dem Objective gelegenen Punktes, die durch die Prismen getrennten ordinären und extraordinären Componenten

1) die einen und die andern hinlänglich nahe in je einem Punkte vereinigen; wenn

2) diese Vereinigungspunkte bis auf Umerkliches in einerlei zur Fernrohraxe senkrechten Ebene liegen, und wenn

3) der Abstand des ordinären von dem extraordinären Vereinigungspunkte oder optischen Bilde eine angebbare Function entweder nur von dem Abstände zwischen der Vorderfläche des ersten Prisma und dem Mittelpunkt des Objectives, welchen ich mit  $\alpha$  bezeichnen will, ist, oder doch von diesem  $\alpha$  und von andern bequem messbaren Grössen. Die Erfüllung der unter 1) und 2) genannten Bedingungen wird nach richtiger Einstellung des Oculars bewirken, dass das Fernrohr nach der Interposition der Prismen ebenso scharfe und daher zu Messungen ihrer Abstände ebenso geeignete Bilder gewährt, wie ohne dieselbe. Ist aber dann ausserdem der dritten Bedingung genügt, so wird der Werth von  $\alpha$ , der die Coincidenz des ordinären Bildes eines Punktes  $A$  mit dem extraordinären Bilde eines Punktes  $B$  herbeiführt, den Winkel ergeben der, ohne Anwendung der Prismen, am optischen Mittelpunkt des Objectives zwischen den, dann allein vorhandenen, ordinären Bildern von Punkt  $A$  und Punkt  $B$  und daher auch zwischen diesen Punkten selbst, Statt gefunden hätte.

Vergleicht man noch ferner die Lichtstärken, welche die zwei Bilder irgend eines Objectpunktes in diesem Mikrometerfernrohre annehmen, während man dasselbe um seine optische Axe dreht, so zeigt sich, ob das von demselben ausgehende Licht nach allen möglichen zu den Stralen senkrechten Richtungen gleich stark schwingendes, d. h. unpolarisirtes, oder aber nach irgend einer jener Richtungen

stärker als nach den übrigen schwingendes, d. h. partiell polarisirtes ist. Die Intensität der in einer mit der Fernrohraxe parallelen Ebene durch beide Bilder schwingenden Theile der Stralen wird sich zu der Intensität der senkrecht gegen diese Ebene schwingenden Theile derselben verhalten, wie die Lichtstärke des extraordinären zu der des ordinären Bildes und demnach die Ebene der Polarisation der Stralen mit der genannten Ebene durch beide Bilder zusammenfallen oder sie rechtwinklig durchschneiden, wenn resp. das extraordinäre Bild und das ordinäre Bild ein Maximum seiner Helligkeit erreicht hat.

Um nun zu entscheiden, in wie weit das in Rede stehende Instrument den genannten Bedingungen seiner Brauchbarkeit genügt und zugleich im Falle der Erfüllung derselben die Abhängigkeit des Winkels zwischen zweien Punkten *A* und *B* von demjenigen  $\alpha$  auszudrücken, welches eine Coincidenz des ordinären Bildes von *A* mit dem extraordinären von *B* bewirkt hat, werde ich die Beschaffenheit und die Lage beider Bilder eines Objectpunktes bestimmen, der in demselben Fernrohre nach Entfernung der Prismen durch einen Punkt von gegebener Lage abgebildet worden wäre.

Ich werde zu diesem Zwecke die Lage jedes in Betracht kommenden Punktes durch seine rechtwinkligen Coordinaten *z*, *x* und *y* bestimmen, welche ihren gemeinsamen Anfang in dem optischen Mittelpunkt des Objectives haben und gezählt werden müssen:

das *z* nach der Fernrohraxe gegen das Ocular zu,

das *x* senkrecht zu den brechenden Kanten beider Prismen und gegen die des ersten positiv,

das *y* daher parallel mit den brechenden Kanten.

Der Objectpunkt, dessen Wirkung untersucht wird, möge nach Entfernung der Prismen durch das Objectiv des Fernrohres in einem Punkt abgebildet werden, für den  $x = X$ ,  $y = Y$  und  $z = Z$  Statt finden, und den ich den ursprünglichen Bildpunkt nennen werde.

1. Durchgang eines nach Punkt (*X*, *Y*, *Z*) gerichteten Bündels ordinärer Stralen durch das Rochon'sche Prismensystem.

Zieht man durch Punkt (*X*, *Y*, *Z*), eine Parallele mit der *Z*-Axe und bezeichnet für irgend einen der zu diesem Punkt gerichteten Stralen seinen veränderlichen Abstand von der genannten Linie mit *s*, und mit *d* seinen, vor dem Eintritt in die Prismen gemessenen Winkel mit derselben Linie, so enthält die Gleichung eines jeden Theiles dieses Strales von merklicher Länge nur die Veränderlichen *z* und *s*, weil ausserdem das Verbleiben jener Theile in einerlei Ebene, durch die Linie, deren Gleichungen  $x = X$ ,  $y = Y$ ,  $z = Z$  sind, gegeben ist.

Es werden aber namentlich, wenn man, wie schon bemerkt, unter  $\alpha$  den Abstand der ersten Fläche des Prismensystems vom Mittelpunkt des Objectives und unter *e* den Abstand jener ersten Fläche von der letzten oder die Dicke des Systems versteht, für jeden Punkt des Strales vor seinem Eintritt in die Prismen:

$$s = (Z - z) \cdot \operatorname{tg} d,$$

innerhalb der Prismen:

$$\text{mit } \sin d' = \frac{\sin d}{\mu}$$

$$s = (Z - \alpha) \cdot \operatorname{tg} d - (z - \alpha) \operatorname{tg} d',$$

und nach seinem Austritt aus den Prismen:

$$s = (Z - z + e) \operatorname{tg} d - e \cdot \operatorname{tg} d' \dots \dots \dots (A).$$

Diese Gleichung gilt für jeden Stral, der durch das Prismensystem gegangen ist. Auf alle durch das Objectiv zu dem Punkt (*X*, *Y*, *Z*) gerichtete Stralen wird sie aber nur dann erst anwendbar, wenn keiner derselben an der verschwindend dicken Schicht zwischen beiden Prismen eine Totalreflexion erleidet. Bezeichnet man den brechenden Winkel von jedem der beiden Prismen mit *J*, den Winkel der Ebene eines Strales mit der *xz*-Ebene mit  $\pi$  und den Brechungsindex der genannten Zwischenschicht, wie schon erwähnt mit *m*, so muss, wenn

$$\cos w = \cos J \cdot \cos d' + \sin J \cdot \sin d' \cdot \cos \pi$$

gesetzt wird, die Bedingung

$$m \geq \mu \cdot \sin w$$

zum Durchgange eines bestimmten Strales erfüllt sein.

Nennt man ferner *O* den Halbmesser des Objectives und *f* den in Bogen ausgedrückten Halbmesser des Feldes des Fernrohres oder das Maximum des Werthes, den die Grösse  $\frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{Z \rho}$  in demselben annehmen kann, wenn  $\rho$  den Sinus der gewählten Bogeneinheit bezeichnet, so folgt mit  $\frac{O}{Z \rho} + f = \gamma$ , für die Wirksamkeit aller in allen möglichen Fällen zu dem Bilde beitragenden Stralen die Bedingung:

$$m \geq \mu \sin \left( J + \frac{\gamma}{\mu} \right) \dots \dots \dots (B).$$

Die Gleichung (A) eines beliebigen Strales nach seinem Austritte wird, wenn man zur Abkürzung

$$\xi = \frac{s}{e} = \frac{\sqrt{(x-X)^2 + (y-Y)^2}}{e}, \quad \zeta = \frac{Z - z + e}{e}, \quad \tau = \operatorname{tg} d'$$

einführt, zu:

$$\frac{\zeta \mu \tau}{\sqrt{1 - (\mu^2 - 1) \tau^2}} - \xi - \tau = 0 \dots \dots \dots (1).$$

Für den Durchschnitt desselben Strales mit dem ihm zunächst gelegenen muss diese Gleichung mit derjenigen

zusammenbestehen, die sich aus ihr durch Differentiation nach  $\tau$  unter den Voraussetzungen  $\frac{d\zeta}{d\tau} = 0$  und  $\frac{d\xi}{d\tau} = 0$  ergibt, das heisst mit.

$$\frac{\zeta \mu}{\{1-(\mu^2-1)\tau^2\}^{\frac{3}{2}}} - 1 = 0 \dots \dots \dots (2).$$

Die Elimination von  $\tau$  aus (1) und (2) ergibt, wenn  $\xi$  und  $\zeta$  durch die ihnen gleichbedeutenden Werthe ersetzt werden, für die nach den ursprünglichen Axen gezählten Coordinaten  $x, y, z$  eines jeden Stralendurchschnittes die Bedingung:

$$((x-X)^2 + (y-Y)^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (\mu^2-1)^{\frac{1}{2}} + (Z-z+e)^{\frac{3}{2}} \cdot \mu^{\frac{3}{2}} = e^{\frac{3}{2}} \dots (3).$$

Sie bezeichnet zugleich die Durchschnitte der Normalen einer durch die Gleichung:

$$\frac{(x-X)^2 + (y-Y)^2}{\mu^2-1} + \frac{(Z-z+e)^2}{\mu^2} = e^2$$

gegebenen Oberfläche und beweist daher, dass:

1) alle zur Abbildung des Punktes  $(X, Y, Z)$  beitragenden ordinären Stralen vom Index  $\mu$  senkrecht stehen auf einem Umdrehungsellipsoide, dessen Mittelpunkt in einer durch jenen ursprünglichen Bildpunkt gezogenen Parallele zur Fernrohraxe, um  $e$  oder die Dicke des Prismensystems hinter demselben liegt, und von welchem die mit der Fernrohraxe parallele Drehungsaxe  $\mu \cdot e$ , die Äquatorialaxe aber  $\sqrt{\mu^2-1} \cdot e$  betragen, und dass man

2) den Ort der zur Abbildung wirksamsten Stralendurchschnitte, den man die diakaustische oder Brenn-Fläche zum ursprünglichen Bildpunkte zu nennen pflegt, erhält, indem man die Evolute der erzeugenden Curve des genannten Ellipsoids um dessen Axe dreht.

Wenn aber, wie in dem hier betrachteten Falle, der zur Erzeugung des ursprünglichen Bildpunktes  $(X, Y, Z)$  dienende Strahlenbündel, ein durch das Objectiv des Fernrohrs begränktes ist, so wird auch die zur Abbildung beitragende oder effective Brennfläche, nur ein demgemäss begränkter Theil der durch (3) bestimmten. Das Stück der Ellipsen-Evolute, durch dessen Drehung diese effective Brennfläche entsteht, ändert im allgemeinsten Falle seine Ausdehnung, je nach dem Winkel  $(\varphi)$ , welchen dessen Ebene im Verlaufe dieser Drehung mit der  $xz$ -Ebene einschliesst. Ich will diese Ausdehnung durch den Winkel  $\theta$  bestimmen, welchen die Tangente an dem äussersten oder von der Axe entferntesten Punkt eines solchen Stückes mit der  $Z$ -Axe einschliesst und es sind dann für eben diesen Punkt auch die Coordinaten

$$x-X = s \cdot \cos \varphi$$

$$y-Y = s \cdot \sin \varphi \text{ und } z \text{ gegeben}$$

durch

$$\sin \theta' = \frac{\sin \theta}{\mu}$$

$$s = e (\mu^2-1)^{\frac{1}{2}} \cdot \operatorname{tg}^3 \theta'$$

$$(z-Z-e) = -e \cdot \frac{(1-(\mu^2-1) \cdot \operatorname{tg}^2 \theta')^{\frac{3}{2}}}{\mu}.$$

Den Winkel  $\theta$ , durch den nun diese Begränzung sowohl direct als auch in der eben angegebenen Weise bedingt ist, erhält man aber, wenn  $O$  den Halbmesser des Objectivs bezeichnet mit:

$$\frac{O}{Z} = F \cdot \rho, \quad \frac{X}{Z} = f' \cos \psi, \quad \frac{Y}{Z} = f' \sin \psi, \rho$$

aus:

$$\operatorname{tg} \theta = \rho \sqrt{F^2 + f'^2 \cos 2(\varphi - \psi) - 2f' \cos(\varphi - \psi) \sqrt{F^2 - f'^2 s^2} \cdot (\varphi - \psi)}$$

Das Maximum und das Minimum von  $\theta$  folgen daher, wenn der am Objective stattfindende Winkelabstand des ursprünglichen Bildpunktes vom Mittelpunkte des Feldes gegeben ist, beziehungsweise aus

$$\operatorname{tg} \theta = \rho (F + f')$$

$$\text{und} \quad \operatorname{tg} \theta = \rho (F - f'),$$

welche bei  $\varphi = 180^\circ + \psi$  und bei  $\varphi = \psi$  eintreten.

Der grösste Werth von  $f'$ , d. h. der oben mit  $f$  bezeichnete Halbmesser des Feldes des Fernrohrs, ist nun aber in allen praktischen Fällen, bei weitem kleiner als  $F$  oder die Neigung der Randstralen und man kann demnach, da auch diese stets ein seinem Sinus proportional zu betrachtender kleiner Winkel sein wird, ohne merklichen Fehler den gesuchten Gränzwert  $\theta$ , von  $\varphi$  unabhängig und durch:

$$\theta = F \frac{1}{Z \rho} \dots \dots \dots (4)$$

gegeben annehmen, womit dann auch für die Gränzen der Ausdehnung, die man der Gleichung (3) zu geben hat,

$$\left. \begin{aligned} s &= \sqrt{(x-X)^2 + (y-Y)^2} = e \cdot \frac{(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}} \cdot F^3}{\mu^3} \cdot \rho^3 \left\{ \dots (4*) \right. \\ z &= Z + e - e \cdot \frac{(\mu^2 - (\mu^2-1) F^2 \rho^2)^{\frac{3}{2}}}{\mu^4} \end{aligned} \right\}$$

erhalten werden.

Erinnert man sich nun, dass dem mit dem Oculare bewaffneten Auge des Beobachters alle diejenigen Punkte wie selbstleuchtende oder Punkte eines optischen Bildes erscheinen, von denen in seiner Brennebene je mehrere Stralen zugleich ausgehen, dass aber Stralen, die etwa gleichzeitig von ausserhalb dieser Ebene gelegenen Radiationspunkten zum Oculare gelangen, neben jenen Bildpunkten nur eine fast verschwindende Helligkeit auf der Netzhaut bewirken, so gewähren die Gleichungen (3) und (4\*) ein vollständiges Urtheil über die optischen Bilder, die sich von Punkt  $(X, Y, Z)$  in dem mit den Prismen versehenen Fernrohre darstellen. Wird zunächst

$$z = Z + e \cdot \frac{\mu-1}{\mu}$$

gemacht, d. h. der Brennpunkt des Oculars in den durch dieses  $z$  ausgedrückten Abstand von dem optischen Mittelpunkt des Objectivs gebracht, so folgt aus (3), für den Halbmesser  $s$  des optischen Bildes:

$$s = \sqrt{(x-X)^2 + (y-Y)^2} = 0.$$

Die Abbildung des Punktes  $(X, Y, Z)$  auf der Netzhaut erfolgt also in diesem Falle ebensowohl durch eine selbstleuchtende Stelle von verschwindender Ausdehnung, wie unter Coincidenz der Brennpunkte des Objectivs und Oculars bei der Anwendung des Fernrohrs ohne die Prismen, und es muss zur Erreichung dieses Erfolges das zum Deutlichsehen für diese letztere Anwendung eingestellte Ocular, um die Grösse  $e \cdot \frac{\mu-1}{\mu}$  von dem Objective entfernt werden.

Der Strahlungspunkt, der in dem eben betrachteten Falle an die Stelle des ursprünglichen Bildpunktes getreten ist, besitzt seine Eigenschaft in aller Strenge nur für dasjenige Licht, welches sehr nahe an einer bestimmten Stelle durch das Objectiv gedrungen ist und demnach dasselbe nahe parallel mit der Fernrohraxe verlassen hat. Alle übrigen Stralen, welche mit eben dieser Axe einen zwischen  $d = 0$  und  $d = \theta = F$  gelegenen Winkel einschliessen, erreichen dagegen ihren Durchschnittspunkt mit benachbarten, auf den diesen Winkeln entsprechenden kreisförmigen Schnitten der Brennfläche, nachdem sich zuvor alle zu gleichen  $d$  gehörigen in einerlei Punkt der Axe dieser Fläche geschnitten haben. Es wird hierdurch in dem vorliegenden Falle gerade ebenso, wie bei der Abbildung eines Punktes durch ein Objectiv neben der betrachteten Einstellung des Brennpunktes des Oculars in den Scheitel der durch die Gleichungen (3) und (4\*) bezeichneten Brennfläche, noch die Einstellung desselben in einen andern Schnitt dieser Fläche, welchen man den Aberrations-Kreis zu nennen pflegt, empfohlen. Er verbindet diejenigen Punkte der Brennfläche, in welchen dieselbe von den um  $\theta$  geneigten und rückwärts verlängerten Tangenten an ihre äussersten Punkte oder, was dasselbe sagt, von den unter  $d = \theta = F$  gegen die Fernrohraxe geneigten Stralen, vor deren Kreuzung im Innern des Brennraumes geschnitten wird. Die Anwendung dieses Aberrationskreises als Abbildung des Punktes  $(X, Y, Z)$  besitzt im Vergleich mit der zuvor betrachteten, den Nachtheil, dass sie einen strahlenden Ring von sehr kleinen, aber doch angebbarem Halbmesser an die Stelle des strahlenden Punktes setzt, dagegen aber den Vorzug, dass durch das Innere dieses Ringes auch alle diejenigen Stralen hindurchgehen, die ihre Vereinigungspunkte ausserhalb seiner Ebene besitzen, und welche ringsum den

Scheitel des Brennraumes in angebbaren Abständen von demselben liegen.

Der Halbmesser  $s$  des Aberrationskreises und sein Abstand  $z$  von dem Mittelpunkte des Objectivs müssen demnach dem durch Coincidenz der Gleichung (3) des Brennraumes mit der Gleichung (1) erhaltenen Ausdrücken entsprechen, wenn die letztere zuvor durch Substitution von

$$\tau = \text{ang } tg \cdot \left(\frac{\theta}{\mu}\right) = \frac{\theta}{\mu} \rho = \frac{F \rho}{\mu}$$

für einen Gränzstral spezialisirt worden ist.

Diese Verbindung der Gleichungen (1) und (3) giebt, wenn man zur Abkürzung einführt

$$(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{((x-X)^2 + (y-Y)^2)^{\frac{1}{2}}}{e^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{s}{e}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot (\mu^2-1)^{\frac{1}{2}} = \xi^{\frac{1}{2}} \cdot (\mu^2-1)^{\frac{1}{2}} = \varphi$$

und:  $\sqrt{\mu^2-1} \cdot \tau = \frac{\sqrt{\mu^2-1}}{\mu} \cdot F \cdot \rho = a$ , die Gleichung:

$$\varphi^6 - 3a^2 \cdot \varphi^4 + 2a(1-a^2) \cdot \varphi^3 + 3a^2 \cdot \varphi^2 - a^4 = 0 \dots (5).$$

Von den Wurzeln derselben gehören aber zwei einander gleiche, zu der Berührung der betrachteten Gränzstralen mit der Brennfläche, und da für diese Berührungspunkte

$$\xi = -(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}} \cdot \tau^3 = -(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{F^3 \cdot \rho^3}{\mu^3}$$

und daher:

$$\varphi = -a$$

Statt finden, so erhält man für die übrigen Durchschnitte der Gränzstralen mit dem Brennraume, durch Division der Gleichung (5) mit:

$$\varphi^2 + 2\varphi \cdot a + a^2 = 0,$$

den Ausdruck:

$$\varphi^4 - 2a \cdot \varphi^3 + 2a \cdot \varphi - a^2 = 0$$

und demnächst durch Entwicklung nach steigenden Potenzen des stets äusserst kleinen Werthes von  $a$ , für den Radius  $s$  des Aberrationskreises:

$$s = e \cdot \sqrt{\frac{\varphi^3}{\mu^2-1}} = e \left\{ (\mu^2-1) \cdot \frac{F^3 \rho^3}{8\mu^3} + 9(\mu^2-1)^2 \cdot \frac{F^5 \cdot \rho^5}{128 \cdot \mu^5} + \dots \right\} \dots (6)$$

und hieraus nach (1) für das  $z$  dieses Schnittes des Brennraumes:

$$z = Z + e \frac{\mu-1}{\mu} + \frac{e}{\mu} \left\{ \frac{3}{8} \cdot \frac{\mu^2-1}{\mu^2} \cdot F^2 \rho^2 + \frac{15}{128} \cdot \frac{(\mu^2-1)^2}{\mu^4} \cdot F^4 \rho^4 + \dots \right\} \dots (7)$$

Sowohl der durch Einstellung des Brennpunktes des Oculars bei  $z = Z + e \frac{\mu-1}{\mu}$  erscheinende Lichtpunkt, als auch, bis auf verschwindend kleines, der Mittelpunkt des Lichtringes, der durch Einstellung des Ocularbrennpunktes bei dem durch (7) gegebenen  $z$  sichtbar sein würde, wenn  $\mu$  für alle Stralen constant wäre, werden in der Wirklichkeit bis auf einen Abstand  $\sigma$  von concentrirtem farbigem Lichte und bis auf einen andern  $\sigma_1$  von gemischtem und äusserst schwachem umgeben sein. Zur Bestimmung dieser Abstände

sieht man zunächst, dass wenn  $z = z_0$  für die Stralen von mittlerer Brechbarkeit, deren Brechungsindex nun vorzugsweise unter  $\mu$  verstanden werde, die eine oder andere jener zwei Lagen des Ocularbrennpunktes bezeichnet, für die Stralen, deren Indices  $\mu + \frac{\delta\mu}{2}$  und  $\mu - \frac{\delta\mu}{2}$  sind, resp.  $z_0 - \frac{e\delta\mu}{2\mu^2}$  und  $z_0 + \frac{e\delta\mu}{2\mu^2}$  zu gleicher Wirkung auf das Auge erfordert werden; dass aber, wenn man  $z = z_0$  beibehält und für die zuerst genannten Stralen unter  $\sigma$  das zu diesem  $z$  gehörige  $s$  ihres Brennraumes, unter  $\sigma_1$  den zu demselben  $z$  gehörigen Abstand eines der Gränzstralen von der  $Z$ -Axe versteht, bis auf unmerklich kleine Glieder hervorgehen:

$$\sigma = \frac{e}{\sqrt{27}} \cdot \frac{(\delta\mu)^3}{\sqrt{\mu^3(\mu^2-1)}} \dots\dots\dots (8)$$

$$\text{und} \quad \sigma_1 = \frac{e}{2} \cdot \frac{\delta\mu}{\mu^2} \cdot F \cdot \rho \dots\dots\dots (9)$$

Von jeder Lichtart, deren Brechungsindex  $\mu - \frac{\delta\mu}{2}$  beträgt, wird bei  $z = z_0$  der Brennraum gar nicht durchschnitten und es findet daher für dieselbe ein Vorkommen von concentrirten Stralen, deren Verbreitungsradius mit  $\sigma$  bezeichnet werden sollte, gar nicht Statt. Der Werth von  $\sigma_1$ , d. h. der Abstand, bis zu dem vereinzelte Stralen einer solchen Lichtart vorkommen, ist bis auf Glieder von verschwindender Kleinheit identisch mit dem unter (9) genannten entsprechenden Werthe für den Brechungsindex  $\mu + \frac{\delta\mu}{2}$ .

Die durch (6) und (8) gegebenen Lineardimensionen der kreisförmigen Bilder, erscheinen dem Auge ebenso wie grösste Kreisbogen des Himmels, die am Mittelpunkte des Objectivs respective den Winkel  $\frac{s}{(Z+\varepsilon)\rho}$  und entweder  $\frac{\sigma}{Z\rho}$  oder  $\frac{\sigma}{(Z+\varepsilon)\rho}$ , je nachdem das Ocular auf den Scheitel des Brennraumes oder auf den Aberrationskreis eingestellt worden ist, entsprechen — wenn unter  $\varepsilon$  das stets äusserst kleine dritte Glied der rechten Hälfte der Gleichung (7) verstanden wird. Es ist dieses eine Folge des Umstandes, dass bei Anwendung der Prismen, mit  $z = Z + e \cdot \frac{\mu-1}{\mu}$ , die zwei andern Coordinaten des Bildes der Bedingung  $(x-X)^2 + (Y-Y)^2 = 0$  genügen, welche mit  $x = X$  und  $y = Y$  übereinkömmt und daher auch mit Gleichheit der Abstände von dem Mittelpunkte des Feldes für den ursprünglichen Bildpunkt  $(X, Y, Z)$  und für den mit den Prismen bewirkten  $(x, y, z)$ .

Wir können das Vorstehende dahin zusammenfassen, dass von einem ursprünglichen Bildpunkte  $(X, Y, Z)$  mit Anwendung der Prismen das ordinäre Bild sich darstellt:

1) wenn sich der Ocularbrennpunkt bei  $z = Z + e \cdot \frac{\mu-1}{\mu}$  befindet durch die Vereinigung alles Lichtes von mittlerer Brechbarkeit in dem Punkte, für den  $x = X$ ,  $y = Y$  und  $z = Z + e \cdot \frac{\mu-1}{\mu}$  stattfinden, und durch Umgebung dieses Punktes bis auf die Winkeldistanz  $\frac{e}{\rho \cdot \sqrt{27} \cdot Z} \cdot \frac{(\delta\mu)^3}{\sqrt{\mu^3(\mu^2-1)}}$  mit unendlich schmalen, aber intensiven Ringen aller Lichtarten, die stärker als die mittleren gebrochen werden, und für welche daher successiv  $\delta\mu = 0$  bis  $\mu + \frac{\delta\mu}{2}$  gleich dem grössten der für Bergkrystall vorkommenden ordinären Brechungsindices zu setzen ist. Der abbildende Punkt ist noch ausserdem bis auf die Winkeldistanz  $\frac{e}{\rho \cdot 2 \cdot Z} \cdot \frac{\delta\mu}{\mu^2} \cdot F$  von isolirten Stralen umgeben, die aber wegen ihrer verschwindenden Dichtigkeit als unwirksam zu betrachten sind, und welche zu gleichen Theilen den Lichtarten, die stärker und die schwächer als die mittleren gebrochen werden, angehören.

Wenn man aber

2) den Ocularbrennpunkt in den durch die Gleichung (7) gegebenen Abstand ( $z$ ) von dem Mittelpunkt des Objectivs gebracht hat, so wird das ordinäre Bild des Punktes  $(X, Y, Z)$  zu einer Vereinigung der Stralen von mittlerer Brechbarkeit, auf einem unendlich schmalen Ringe, dessen Halbmesser die Lineargrösse  $s$  und die Winkelgrösse  $\frac{s}{(Z+\varepsilon)\rho}$  besitzt, wenn  $s$  aus der Gleichung (6) und  $Z + \varepsilon = z - e \cdot \frac{\mu-1}{\mu}$  aus der Gleichung (7) entnommen werden. Die Lichtarten, deren Brechbarkeit grösser oder kleiner als die mittlere ist, sind um den Mittelpunkt dieses Ringes bis auf völlig Unmerkliches ebenso vertheilt, wie bei der zuerst genannten Einstellung des Oculars um den abbildenden Punkt.

Zur Veranschaulichung dieser Resultate folgen hier die auf sie bezüglichen numerischen Werthe für ein *Rochon'sches* Mikrometerfernrohr von *Lenoir*, welches Veränderungen des zu messenden Winkels um eine Sekunde durch eine unzweifelhafte Veränderung der Ablesung anzeigt. Für die aus Bergkrystall bestehenden Prismen desselben sind

$$\mu = 1,54711$$

$$\delta\mu = 0,01335 \text{ zu setzen.}$$

Es werden dadurch  $\mu - \frac{\delta\mu}{2}$  und  $\mu + \frac{\delta\mu}{2}$  resp. der zu den *Fraunhofer'schen* Spectrallinien *B* und *G* gehörigen Lichtarten entsprechend vorausgesetzt, deren Leuchtkraft im Sonnenlicht unter 0,03 der maximalen beträgt.

Die Brennweite des Objectivs dieses Fernrohrs ist  $Z = 143,00$

Der Halbmesser der Öffnung desselben  $O = 8,20$

Die Dicke des Prismensystems  $e = 8,43$

wenn die Pariser Linie als Maasseinheit genommen wird, ferner die Neigung der Randstrahlen:

$$\theta = F = 196' 90''$$

und demnächst:

der Abstand des Ocularbrennpunkts vom Mittelpunkt des Objectivs

$$\text{ohne Prismen} \quad 143,0000 = Z$$

mit den Prismen bei Ab-

$$\text{bildung durch Punkte} \quad 145,9812 = Z + e \cdot \frac{\mu-1}{\mu}$$

desgl. bei Abbildung

$$\text{durch Aberrationskr.} \quad 145,9851 = z \text{ nach Gl. (7);}$$

der Halbmesser des

$$\text{Aberrationskreises} \quad 0,00007316$$

$$\text{oder } 0''106 \text{ am Mittelpunkt d. Objectivs,}$$

der Halbmesser der Farbenringe um die Abbildung durch die mittleren Strahlen

$$0,001103 = \sigma$$

$$\text{oder } 1''59 \text{ am Mittelpunkt d. Objectivs.}$$

Die Ausdehnung der diakaustischen Fläche nach der Fernrohraxe:

$$0,0156 \text{ von dem Scheitel derselben}$$

$$\text{oder bis zu } 145,9968 \text{ von dem Mittelpunkt des Objectivs,}$$

und der Halbmesser des grössten Querschnittes derselben

$$0,0006379$$

$$\text{oder } 0''920 \text{ am Mittelpunkt des Objectivs.}$$

Die hier gefundenen Winkelgrössen für die Halbmesser der Lichtringe, welche an der Stelle eines Punktes erscheinen, bleiben dieselben, wenn in einem grösseren Fernrohre der brechende Winkel der Prismen und daher auch das Maximum der mit demselben messbaren Winkel beibehalten, die Öffnung des Objectivs aber in demselben Verhältniss wie dessen Brennweite vermehrt wird. Wenn man dagegen unter Beibehaltung der Maximumgränze für die zu messenden Winkel die Öffnung des Objectivs  $n$  Mal und die Brennweite desselben  $n'$  Mal vergrössert, so werden die Winkelwerthe der Halbmesser des Aberrationskreises das  $\left(\frac{n}{n'}\right)^4$ -fache und des Farbenringes das  $\left(\frac{n}{n'}\right)$ -fache des angegebenen. Mit  $n = 3$  und  $n' = 4$ , welches ein für die Praxis sehr Annehmbares zu sein scheint, würden zum Beispiel der zuerst genannte Halbmesser nur noch  $0''034$  und der andere  $1''19$  betragen.

2. Durchgang der extraordinären Strahlen durch das Rochon'sche Prismensystem, wenn die einfallenden nach Punkt (X, Y, Z) gerichtet sind.

Ich werde die für einen kleinen Lichtkegel von der genannten Art gültigen Beziehungen durch Specialisirung der

allgemeinen ableiten und daher nach einander suchen für einen extraordinären Stral:

1) seinen Winkel mit der Normale der brechenden Fläche und sein von der Ebene durch diese Normale und die Krystallaxe angezähltes Azimut,

a) bei dem Übergange aus einem einfach brechenden Mittel vom Index  $m$  in das krystallinische vom ordinären Index  $\mu$  und extraordinären Index  $\mu_1$ ;

b) bei dem Übergange aus dem krystallinischen Mittel von Indices  $\mu$  und  $\mu_1$  in das einfach brechende vom Index  $m$ , und zwar in beiden Fällen die unmittelbar anschaulichen Vorschriften zu deren Erlangung und die zur logarithmischen Rechnung brauchbaren;

2) die Anwendung der Ausdrücke unter a) auf die Durchgänge durch die erste und dritte, und unter b) auf die Durchgänge durch die zweite und vierte Fläche des Rochon'schen Prismensystems, sowohl allgemein für beliebige Werthe des Einfallswinkels auf die erste Fläche, als speziell für einen kleinen Werth desselben, — sodann aber 3) die Lage des Brennpunktes oder der grössten Verdichtungen des extraordinären Lichtes für einen durch das Rochon'sche System gegangenen kleinen Strahlenkegel.

Wenn um den Einfallspunkt eines Strales auf die Gränze eines einfach brechenden Mittels vom Index  $m$  mit einem einaxig doppelbrechenden Mittel von Indices  $\mu$  und  $\mu_1$  eine Kugel vom Radius  $r$  und ein Rotationsellipsoid construirt wird, welches nach der Krystallaxe des Mittels seine Drehungs-

axe von der Länge  $\frac{2m}{\mu}$  und den Äquatorialradius  $\frac{m}{\mu_1}$  hat, so geht der extraordinäre Stral bekanntlich durch denjenigen Punkt dieses Ellipsoids, dessen Berührungsebene denselben Durchschnitt mit einer an dem Einfallspunkt gelegten Berührungsebene der Gränzfläche der Mittel hat, wie eine an die Kugel, in deren Durchschnitt mit der Verlängerung des einfallenden Strales gelegte Berührungsebene. — Zur Benutzung dieser Vorschrift mögen von dem Einfallspunkte an rechtwinkliche Coordinaten  $z$ ,  $x$  und  $y$  gezählt werden und zwar  $z$  nach der in das Innere des zweiten Mittels gerichteten Normale der Gränzfläche,  $x$  in der Ebene durch diese Normale und durch die Krystallaxe oder in dem sogenannten Hauptschnitt — auch sollen ausserdem  $\vartheta$  und  $\pi$  respective den Einfallswinkel und das von der  $xz$ -Ebene oder dem Hauptschnitte an gezählte Azimut des einfallenden Strales,  $\vartheta'$  und  $\pi'$  die entsprechenden Werthe für den extraordinär gebrochenen Stral bedeuten. Man hat dann ohne Weiteres für die genannte Berührungsebene an die Kugel, oder was dasselbe sagt, für eine um  $r$  von dem Einfallspunkte absteigende Wellenebene des Strals die Gleichung:

$$x \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \pi + y \sin \vartheta \cdot \sin \pi + z \cos \vartheta = 1.$$

Für den Durchschnitt dieser Ebene mit der Berührungsebene der Gränzfläche der Mittel im Einfallspunkte, ist daher:

$$y + r \cdot \cotg \pi - \frac{1}{\sin \mathcal{J} \cdot \sin \pi} = 0,$$

und für jede durch diesen Durchschnitt gelegte Ebene, wenn  $n$  einen unbestimmten Coefficienten bedeutet:

$$y + r \cdot \cotg \pi + n \mathfrak{z} - \frac{1}{\sin \mathcal{J} \cdot \sin \pi} = 0 \dots \dots (D).$$

Der extraordinäre Stral geht von dem Anfang der Coordinaten nach dem Berührungspunkte einer durch (D) ausdrückten Ebene, mit der zu den positiven  $z$  gehörigen Hälfte des oben definirten Ellipsoids. Die Krystallaxe möge nun von der  $\mathfrak{z}$ -Axe gegen die  $r$ -Axe um den Winkel  $\lambda$  abstehen, so ist, wenn nach ihr  $\mathfrak{z}'$ -Coordinaten und senkrecht zu ihr in der  $r\mathfrak{z}$  Ebene  $r'$ -Coordinaten gezählt werden, die Gleichung jenes Ellipsoids:

$$\mu^2 \mathfrak{z}'^2 + \mu_1^2 (r'^2 + y^2) - m^2 = 0.$$

Sie erhält die unter (C) angegebene Form, wenn durch

$$\begin{aligned} \mathfrak{z}' &= \mathfrak{z} \cos \lambda + r \sin \lambda \\ r' &= -\mathfrak{z} \sin \lambda + r \cos \lambda \end{aligned}$$

die ursprünglichen Coordinaten wieder eingeführt und zur Abkürzung gesetzt werden:

$$\frac{m^2}{\mu_1^2} = \alpha^2 \quad \frac{\mu^2 \sin^2 \lambda + \mu_1^2 \cos^2 \lambda}{\mu_1^2} = \beta^2 \quad \frac{\mu^2 \cos^2 \lambda + \mu_1^2 \sin^2 \lambda}{\mu_1^2} = \gamma^2$$

$$\text{und} \quad \frac{\mu^2 - \mu_1^2}{\mu_1^2} \cdot \sin \lambda \cdot \cos \lambda = E.$$

$$y^2 = \alpha^2 - \beta^2 r'^2 - \gamma^2 \mathfrak{z}'^2 - 2 E r' \mathfrak{z}' \dots \dots (E).$$

Ausser den Gleichungen (C) und (D) müssen nun für den gesuchten Berührungspunkt noch diejenigen zwei bestehen, welche sich ergeben, wenn man zuerst für  $y \frac{dy}{dx}$  und sodann für  $y \frac{dy}{dz}$  die zwei Ausdrücke einander gleich setzt, welche sich nach einander aus der Gleichung (C) und aus

der Gleichung (D) ergeben. Es sind diese die hiernächst mit (E) und mit (F) bezeichneten Ausdrücke:

$$y \cdot \cotg \pi = \beta^2 r + E \mathfrak{z} \dots \dots (E)$$

$$\text{und} \quad y \cdot n = E r + \gamma \mathfrak{z} \dots \dots (F)$$

Diese vier Gleichungen, (C) .. (F), ergeben aber von den Coordinaten des fraglichen Berührungspunktes oder Endpunktes des extraordinären Strales das  $y$  und das  $\mathfrak{z}$  respective durch die Combinationen

$$(C) + r \cdot (E) + \mathfrak{z} \cdot (F) - y \cdot (D)$$

$$\text{und} \quad \{y \cdot (D) - \mathfrak{z} \cdot (F)\} \beta^2 + \{\mathfrak{z} \cdot (E) + y \cotg \pi\} \cdot (E)$$

und sodann das  $r$  durch die Gleichung (E).

Es folgen direct, wenn für  $\alpha, \beta, \gamma$  und  $E$  ihre ursprünglichen Werthe zum Theil wieder eingeführt und für den fraglichen Punkt:  $r^2 + y^2 + \mathfrak{z}^2 = R^2$  gesetzt werden:

$$\mathfrak{z} = R \cdot \cos \mathcal{J} = \frac{m \sqrt{\beta^2 \mu_1^2 - m^2 \cdot \sin^2 \mathcal{J} (\sin^2 \pi + \beta^2 \cos^2 \pi)}}{\mu \mu_1}$$

$$y = R \cdot \sin \mathcal{J} \cdot \sin \pi' = \frac{m^2 \cdot \sin \mathcal{J} \cdot \sin \pi}{\mu_1^2}$$

$$r = R \cdot \sin \mathcal{J} \cdot \cos \pi' = \frac{m^2 \cdot \sin \mathcal{J} \cdot \cos \pi}{\mu_1^2 \cdot \beta^2} - \frac{E}{\beta^2} R \cdot \cos \mathcal{J},$$

und für die umgekehrte Aufgabe:

$$\text{mit } \mu = s \cdot \sin x \quad \cos \mathcal{J} \cdot \cos \lambda + \sin \mathcal{J} \cdot \sin \lambda \cdot \cos \pi' = \sin O$$

$$\mu_1 = s \cdot \cos x \quad \cos 2x \cdot \cos 2O = \cos 2P'$$

$$\text{und} \quad R = \frac{m}{s \cdot \cos P'}$$

die Vorschrift:

$$\sin \mathcal{J} \cdot \sin \pi = \frac{\mu_1^2}{m^2} R \cdot \sin \mathcal{J}' \cdot \sin \pi'$$

$$\sin \mathcal{J} \cdot \cos \pi = \beta^2 \cdot \frac{\mu_1^2}{\mu^2} \cdot R \cdot \sin \mathcal{J}' \cos \pi' + \frac{E \cdot \mu_1^2}{m^2} R \cdot \cos \mathcal{J}.$$

Zur praktischen Anwendung lassen sich diese Ausdrücke unter anderen durch folgende mit ihnen beziehungsweise identischen ersetzen: für den Übergang aus einem einfach brechenden in ein einaxig-krystallinisches Mittel rechne man mit  $m, \mu, \mu_1, \lambda, \mathcal{J}$  und  $\pi$ :

$$\left. \begin{aligned} s \cdot \sin x &= \mu & \cos 2u &= \cos 2x \cdot \cos 2\lambda & \cos 2v &= \cos 2Q \cdot \cos 2\pi \\ s \cdot \cos x &= \mu_1 & \tg Q &= \frac{\cos u}{\cos x} & \sin P &= \frac{m \cdot \sin \mathcal{J} \cdot \cos v}{\mu_1 \sin Q} & \tg M &= \frac{\cotg 2x \cdot \sin 2\lambda \cdot \cotg P \cdot \cos v}{\cos Q \cdot \cos \pi} \\ \text{so sind: } R \cdot \cos \mathcal{J}' &= \frac{m \cdot \tg Q}{\mu} \cdot \cos P \\ R \cdot \sin \mathcal{J}' \cdot \sin \pi' &= \frac{m^2 \cdot \sin \mathcal{J} \cdot \sin \pi}{\mu^2} \\ R \cdot \sin \mathcal{J}' \cdot \cos \pi' &= \frac{m^2 \cdot \sin \mathcal{J} \cdot \cos \pi}{s^2 \cdot \cos^2 u} \cdot \frac{\sin(45^\circ + M)}{\sin 45^\circ \cdot \cos M} \end{aligned} \right\} \dots (1a)$$

Für den Übergang aus einem einaxig-krystallinischen in ein einfach brechendes Mittel bestimmt man mit  $\mu$ ,  $\mu_1$ ,  $\lambda$ ,  $\mathcal{J}$  und  $\pi'$ :

$$\left. \begin{aligned} s \cdot \sin x &= \mu & \cos 2u &= \cos 2x \cdot \cos 2\lambda & \sin O &= \sin U \cdot \sin (T + \mathcal{J}) \\ s \cdot \cos x &= \mu_1 & \sin U \cdot \sin T &= \cos \lambda & \cos 2P' &= \cos 2x \cdot \sin 2O \\ & & \sin U \cdot \cos T &= \cos \pi' \cdot \sin \lambda & \operatorname{tg} N &= \frac{\cos 2x \cdot \sin 2\lambda \cdot \operatorname{ctg} \mathcal{J}}{2 \cos^2 u \cdot \cos \pi'} \end{aligned} \right\} \dots\dots (1b)$$

so sind:

$$\begin{aligned} \sin \mathcal{J} \cdot \sin \pi &= \frac{s \cdot \cos^2 x \cdot \sin \mathcal{J}' \cdot \sin \pi'}{m \cdot \cos P'} \\ \sin \mathcal{J} \cdot \cos \pi &= \frac{s \cdot \cos^2 u \cdot \sin \mathcal{J}' \cdot \cos \pi'}{m \cdot \cos P'} \cdot \frac{\sin (45^\circ - N)}{\sin 45^\circ \cdot \cos N} \end{aligned}$$

Um nun den extraordinären Weg auszudrücken, den ein beliebiger Stral des ursprünglichen Bildpunktes ( $X, Y, Z$ ) durch das *Rochon'sche* Prismensystem befolgt, mögen  $z, x, y$  die, wiederum vom Mittelpunkt des Objectivs, resp. nach der Fernrobraxe, senkrecht zur brechenden Kante des ersten Prisma und parallel mit derselben gezählten Coordinaten eines beliebigen Punktes desselben, die mit verschiedenen Accenten versehenen Buchstaben  $\pi$  und  $\mathcal{J}$  aber, beziehungsweise, die Winkel mit der  $z$ -Axe und mit der  $xz$ -Ebene für einen der vier Theile dieses Strales, die eine merkliche Länge besitzen, bedeuten und dann gesetzt werden:

$$\begin{aligned} \text{für den ursprünglichen Stral: } & \left. \begin{aligned} x &= X + (z-Z) \cdot \sin \mathcal{J} \cdot \cos \pi \\ y &= Y + (z-Z) \cdot \sin \mathcal{J} \cdot \sin \pi \end{aligned} \right\} \text{I.} \\ \text{für dessen 1. innern Theil: } & \left. \begin{aligned} x &= \xi + (z-\zeta) \cdot \sin \mathcal{J}' \cdot \cos \pi' \\ y &= \eta + (z-\zeta) \cdot \sin \mathcal{J}' \cdot \sin \pi' \end{aligned} \right\} \text{II.} \\ \text{für dessen 2. innern Theil: } & \left. \begin{aligned} x &= \xi' + (z-\zeta') \cdot \sin \mathcal{J}'' \cdot \cos \pi'' \\ y &= \eta' + (z-\zeta') \cdot \sin \mathcal{J}'' \cdot \sin \pi'' \end{aligned} \right\} \text{III.} \\ \text{für dessen ausgetret. Theil: } & \left. \begin{aligned} x &= \xi'' + (z-\zeta'') \cdot \sin \mathcal{J}_2 \cdot \cos \pi_2 \\ y &= \eta'' + (z-\zeta'') \cdot \sin \mathcal{J}_2 \cdot \sin \pi_2 \end{aligned} \right\} \text{IV.} \end{aligned}$$

wo die resp. für die  $x$ -,  $z$ - und  $y$ -Coordinate gültigen Werthe:

$\xi, \zeta$  und  $\eta$  durch Verbindung der Gleichungen (I.)

mit der der ersten Fläche:  $z = \alpha$ ,

$\xi', \zeta'$  und  $\eta'$  durch Verbindung der Gleichungen (II.)

mit der der zweiten u. dritten Fläche:  $z = \alpha + \frac{e}{2} - x \operatorname{tg} J$

und  $\xi'', \zeta''$  und  $\eta''$  durch Verbindung der Gleichungen (III.)

mit der der dritten Fläche:  $z = \alpha + e$

zu bestimmen sind.

Die zur Anwendung dieser Gleichungen nothwendigen Beziehungen zwischen den successiven Werthen der Einfallswinkel und Azimute ergeben sich wie in allen ähnlichen Fällen durch abwechselnde Benutzung von optischen und von geometrischen Bedingungen, in sofern man unter den ersteren allgemein die zwischen der Lage zweier aneinander gränzenden Stralentheile gegen einerlei Normale und Hauptschnitt, unter den andern oder geometrischen Bedingungen aber diejenigen versteht, durch welche für ein und denselben Stralentheil die gegen die Normale und den Haupt-

schnitt einer Fläche bekannt gewordenen Bestimmungsstücke in die entsprechenden gegen Normale und Hauptschnitt der darauf folgenden Fläche umgesetzt werden.

Die unter (G) folgende Rechnungsvorschrift, welche in Verbindung mit den Gleichungen I. bis IV. den Weg der extraordinären Componente eines jeden zum ursprünglichen Bildpunkt ( $X, Y, Z$ ) gehörigen Strales vollständig kennen lehrt, ergibt sich unmittelbar auf diesem Wege, wenn die in ihr noch ausser den bereits definirten vorkommenden Bezeichnungen folgendermaassen bestimmt werden. Auf einer Kugel, die, um den ersten Einfallspunkt, mit einem gegen die Dimensionen der Prismen als unendlich gross zu betrachtenden Radius beschrieben ist, bezeichnen  $N$  den Durchschnitt der mit der Krystallaxe im ersten Prisma identischen Normalen der ersten und vierten Ebene des Systems,  $N'$  den Durchschnitt mit der gemeinsamen Normale der zweiten und dritten Ebene desselben, und  $A'$  den Durchschnitt mit der Krystallaxe im zweiten Prisma, wodurch  $NN' = J$  und  $NN'A' = N'NA' = 90^\circ$  gegeben sind; es seien ferner, auf derselben Kugel bezeichnet, die Ausgangspunkte des einfallenden Strales mit  $S$ , des ersten inneren Stralentheiles von merklicher Länge mit  $S'$ , des darauf folgenden Stralentheiles von verschwindender Länge mit  $S'_1$ , des zweiten inneren Stralentheiles von merklicher Länge mit  $S''$ , und des ausgetretenen Strales mit  $S'''$ ; so dass nach dem Vorhergehenden:

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= SN & \mathcal{J}' &= S'N & \mathcal{J}'' &= S''N & \text{und } \mathcal{J}_2 &= S'''N \\ \pi &= SNN' & \pi' &= S'NN' & \pi'' &= S''NN' & \pi_2 &= S'''NN' \end{aligned}$$

stattfinden, so gelten für den Gang und für die Bezeichnung der in Rede stehenden Ableitungen, dass man entnehme:

- 1)  $\mathcal{J}'$  u.  $\pi'$  aus  $\mathcal{J}$  u.  $\pi$  nach (1a) mit  $\mathcal{J} = \mathcal{J}$ ,  $\mathcal{J}' = \mathcal{J}'$ ,  $\lambda = 0$ ,  
 $\pi = \pi$ ,  $\pi' = \pi'$ ,  $m = 1$ ;
- 2)  $t = S'N'$ ,  $p = S'N'N$  aus den im Dreieck  $SNN'$  bekannten  $J$ ,  $\mathcal{J}$  und  $\pi'$ ;
- 3)  $t' = S'_1N$ ,  $p' = S'_1N'N$  aus  $t$  und  $p$ , nach (1b)  
mit  $\mathcal{J}' = t$   $\mathcal{J} = t'$   $\lambda = J$   
 $\pi' = p$   $\pi = p'$   $m = m$ ;

- 4)  $t'' = S''N'$ ,  $p'' = S''N'N$  aus  $t'$  und  $p'$ , nach (1a) mit  $\mathfrak{J} = t'$   $\mathfrak{J}' = t''$   $\lambda = 90^\circ$   
 $\pi = p' + 90^\circ$   $\pi' = p'' + 90^\circ$   $m = m$ ;
- 5)  $\mathfrak{J}''$  und  $\pi''$  aus den im Dreieck  $S''N'N'$  bekannten  $J$ ,  $t''$  und  $p''$  und
- 6)  $\mathfrak{J}_2$  und  $\pi_2$  aus  $\mathfrak{J}''$  und  $\pi''$ , nach (1b) mit  $\mathfrak{J}' = \mathfrak{J}''$   $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_2$   $\lambda = 90^\circ$   
 $\pi' = \pi'' + 90^\circ$   $\pi = \pi_2 + 90^\circ$   $m = 1$ ,

$$s \cdot \sin x = \mu \quad \sin P = \frac{\sin \mathfrak{J}}{\mu_1}$$

$$s \cdot \cos x = \mu_1$$

$$g \cos G = \cos \mathfrak{J}'$$

$$g \sin G = \sin \mathfrak{J}' \cos \pi$$

$$\cos 2u = \cos 2x \cdot \cos 2J \quad \sin O = \sin U \cdot \sin(T+t)$$

$$\sin U \cdot \sin T = \cos J \quad \cos 2P' = \cos 2x \cdot \cos 2O$$

$$\sin U \cdot \cos T = \sin J \cdot \cos p \quad tg N = \frac{\cos 2x \cdot \sin 2J \cdot ctg t}{2 \cdot \cos^2 u \cdot \cos p}$$

$$\cos 2v = -\cos 2x \cdot \cos 2p'$$

$$\sin P'' = \frac{m \cdot \sin t' \cdot \cos v}{s \cdot \sin x \cdot \cos x}$$

$$g' \cos G' = \cos t''$$

$$g' \sin G' = \sin t'' \cdot \cos p''$$

$$\sin O' = -\sin \pi'' \cdot \sin \mathfrak{J}''$$

$$\cos 2P''' = \cos 2x \cdot \cos 2O'$$

Für die Stralen, welche durch das Objectiv eines Fernrohrs und durch Bergkrystallprismen von der in Rede stehenden Beschaffenheit hindurchgehen, ist in diese allgemeine Vorschrift sowohl:

$$\sin \mathfrak{J} = \mathfrak{J} \rho \quad \text{und} \quad \cos \mathfrak{J} = 1$$

als auch:

$$\sin(45^\circ - x) = (45^\circ - x) \cdot \rho \quad \text{und} \quad \cos(45^\circ - x) = 1$$

zu substituieren, indem  $45^\circ - x = 10'20$  für die Stralen von mittlerer Brechbarkeit, die letztere Voraussetzung, die Grenzen des oben mit  $F$  bezeichneten grössten Werthes von  $\mathfrak{J}$  aber auch die Vernachlässigung der Glieder in  $\frac{F^2}{2} \rho^2$ , welche mit der ersteren Voraussetzung identisch ist, rechtfertigen. Es ergeben sich aber hiermit:

$$(H) \dots \begin{cases} (1) & \mathfrak{J}' = \frac{\mu}{\mu_1^2} \cdot \mathfrak{J} & \pi' = \pi \\ (1a) & t = \left( J - \frac{\mu}{\mu_1^2} \mathfrak{J} \cdot \cos \pi \right) & p = \frac{\mu}{\mu_1^2} \cdot \frac{\mathfrak{J} \sin \pi}{\sin J} \end{cases}$$

wobei die Buchstaben in den linken Hälften der Substitutionsgleichungen dasselbe, wie in (1a) und (1b) bedeuten.

Die Ausführung dieses Verfahrens giebt folgende Rechnungsvorschrift zur Bestimmung des Durchganges der extraordinären Componente eines beliebigen Strales durch ein Rochon'sches Prismensystem:

$$\begin{aligned} tg \mathfrak{J}' &= tg x \cdot tg P \\ \pi' &= \pi \\ \cos t &= g \cdot \cos(J-G) \\ \sin t \cdot \sin p &= \sin \mathfrak{J}' \cdot \sin \pi \\ \sin t \cdot \cos p &= g \cdot \sin(J-G) \\ \sin t' \sin p' &= s \cdot \frac{\cos^2 x \cdot \sin t \cdot \sin p}{m \cdot \cos P'} \\ \sin t' \cos p' &= s \cdot \frac{\cos^2 u \cdot \sin t \cdot \cos p \cdot \sin(45^\circ - N)}{m \cdot \cos P' \cdot \sin 45^\circ \cdot \cos N} \\ tg t'' \cdot \sin p'' &= \frac{m \cdot \sin t' \cdot \sin p'}{\mu \cdot tg x \cdot \cos P''} \\ tg t'' \cdot \cos p'' &= \frac{m \cdot \sin t' \cdot \cos p'}{\mu_1 \cdot \cos P''} \end{aligned} \quad (G)$$

$$\begin{aligned} \cos \mathfrak{J}'' &= g' \cos(J'-G') \\ \sin \mathfrak{J}'' \sin \pi'' &= \sin t'' \cdot \sin p'' \\ \sin \mathfrak{J}'' \cos \pi'' &= g' \cdot \sin(J'-G') \\ \sin \mathfrak{J}_2 \sin \pi_2 &= \frac{\mu^2 \cdot \sin \mathfrak{J}'' \cdot \sin \pi''}{s \cdot \cos P'''} \\ \sin \mathfrak{J}_2 \cos \pi_2 &= \frac{\mu_1^2 \cdot \sin \mathfrak{J}'' \cdot \cos \pi''}{s \cdot \cos P'''} \end{aligned}$$

$$(H) \begin{cases} (1b) & \sin t' = \frac{\mu}{m} \cdot \sin \left( J - \frac{\mathfrak{J} \cos \pi}{\mu} \right), \quad p' = \frac{\mathfrak{J} \cdot \sin \pi}{\mu \cdot \sin J} \\ (1c) & \sin t'' = \frac{\mu}{\mu'} \cdot \sin \left( J - \frac{\mathfrak{J} \cos \pi}{\mu} \right), \quad p'' = \frac{\mu_1^2}{\mu^3} \cdot \frac{\mathfrak{J} \cdot \sin \pi}{\sin J} \\ (2) & \begin{cases} \sin \mathfrak{J}'' \sin \pi'' = \frac{\mu'}{\mu^2} \cdot \mathfrak{J} \sin \pi \cdot \rho \\ \sin \mathfrak{J}'' \cos \pi'' = \frac{\mu_1 - \mu}{\mu_1} \cdot tg J + \frac{\mathfrak{J} \cos \pi}{\mu_1} \cdot \rho \end{cases} \\ (3) & \begin{cases} \sin \mathfrak{J}_2 \sin \pi_2 = \mathfrak{J} \sin \pi \cdot \rho \\ \sin \mathfrak{J}_2 \cos \pi_2 = (\mu_1 - \mu) \cdot tg J + \mathfrak{J} \cos \pi \cdot \rho \end{cases} \end{cases}$$

Die mit (1b) bezeichnete Gleichung dieses Systems lehrt zunächst, dass der Durchgang der extraordinären Componenten von allen durch das Objectiv zum ursprünglichen Bildpunkt gerichteten Stralen dann, und nur dann möglich sein wird, wenn der Brechungsindex  $m$  des zwischen beiden Prismen befindlichen Mittels der Bedingung:

$$(J_*) \dots \dots \dots m \geq \mu \cdot \sin \left( J + \frac{\gamma}{\mu} \right),$$

wo  $\gamma$ , ebenso wie in der Gleichung (B), den grössten positiven Werth, den  $-\mathfrak{J}$  erlangen kann, d. h. den Winkel  $\frac{O}{Z\rho} + F$ , bedeutet. Die Bedingung ( $J_*$ ) für die Wirksamkeit aller zum Punkt (X, Y, Z) gehörigen extraordinären Stralen, ist also mit der entsprechenden unter (B) für die Wirksamkeit der ordinären Stralen identisch.

Die Substitution aus den mit (1), (2) und (3) bezeichneten Gleichungen des Systems (II) in die Gleichungen I...IV., ergibt aber ferner für jeden zu dem extraordinären Bilde des Punktes (X, Y, Z) gehörigen Stral, wenn man abgekürzt bezeichnet:

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= X + (\mu_1 - \mu) \cdot \operatorname{tg} J \cdot \left\{ (Z - a) - \left( \frac{e}{2} - X \operatorname{tg} J \right) \frac{\mu}{\mu_1^2} \right\} \\ a &= Z + e \left( 1 - \frac{\mu_1 + \mu}{2 \mu_1^2} \right) - X \operatorname{tg} J \cdot \left( \frac{\mu_1 - \mu}{\mu_1^2} \right) \\ b &= Z + e \left( 1 - \frac{\mu_1^3 + \mu^3}{2 \mu_1^2 \mu^2} \right) - X \operatorname{tg} J \cdot \left( \frac{\mu_1^3 - \mu^3}{\mu_1^2 \mu^2} \right), \\ \text{die Gleichungen:} \\ y &= Y + \mathfrak{J} \rho \cdot \sin \pi \cdot (z - b) \\ x &= X_1 + ((\mu_1 - \mu) \cdot \operatorname{tg} J + \mathfrak{J} \rho \cdot \cos \pi) \cdot (z - a) \end{aligned} \right\} (J).$$

Da die Grössen  $X_1$ ,  $a$  und  $b$  von der ursprünglichen Lage der Stralen, von denen sie die endliche Richtung bestimmen helfen, durchaus unabhängig sind, so zeigen die Gleichungen (J) ohne Weiteres, dass das extraordinäre Bild des Punktes (X, Y, Z) besteht:

1) in der Entfernung vom Mittelpunkte des Objectivs  $z = b$ , aus einer mit der  $x$ -Axe parallelen, d. h. zu den brechenden Kanten der Prismen senkrechten Linie, durch den Punkt:  $z = b$ ,  $y = Y$ , die ihre Mitte bei  $x = X_1 - (a - b) (\mu_1 - \mu) \cdot \operatorname{tg} J$ , und zu jeder Seite derselben die Länge  $(a - b) F \rho$  hat, wenn  $F$ , so wie oben, das biulänglich nahe constante Maximum der positiven und der negativen Werthe von  $\mathfrak{J}$  bezeichnet; und

2) in der Entfernung vom Mittelpunkte des Objectivs  $z = a$  aus einer mit der  $Y$ -Axe, d. h. mit den brechenden Kanten der Prismen parallelen Linie durch den Punkt  $z = a$ ,  $x = X_1$ , die ihre Mitte bei  $y = Y$  und zu jeder Seite derselben ebenfalls die Länge  $(a - b) F \rho$  hat.

Man ersieht auch noch ferner aus den eben betrachteten Gleichungen, dass in der zuerst genannten der beiden linearen Abbildungen des Punktes (X, Y, Z) alle diejenigen Stralen, die ursprünglich in einer zum Hauptschnitte senkrechten Ebene gelegen, d. h.  $\pi = 90^\circ$  gehabt haben, in dem Mittelpunkte so wie überhaupt die auf dem Objective zu einerlei X gehörigen, in einerlei Punkt der abbildenden Linie vereinigt werden, und dass dieselben Vereinigungen in dem Mittelpunkte und in einerlei Punkt der bei

$z = a$  gelegenen linearen Darstellung resp. für alle ursprünglich im Hauptschnitte oder bei  $\pi = 0$  gelegenen und für alle ursprünglich zu einerlei Y gehörigen Stralen stattfinden. Es ist aber, bevor wir uns zur Vergleichung der Lage dieser extraordinären Bilder des betrachteten Punktes mit der seiner ordinären wenden, zu entscheiden, ob die ersteren die günstigsten ihrer Art, oder ob etwa noch vollständigere Vereinigungen von allen extraordinären Componenten der zum ursprünglichen Bildpunkt gehörigen Stralen vorhanden sind.

Der in einer Bildebene und mithin senkrecht zur Fernrohraxe gemessene Abstand eines beliebigen Strales von einem der ihn umgebenden ist durch  $\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2}$  ausgedrückt, wenn man mit  $d\pi = \kappa \cdot d\mathfrak{J}$

$$\begin{aligned} \delta x &= \left( \frac{dx}{d\mathfrak{J}} + \kappa \cdot \frac{dx}{d\pi} \right) \delta \mathfrak{J} = (z - a) \{ \cos \pi - \kappa \mathfrak{J} \rho \cdot \sin \pi \} \delta \mathfrak{J} \\ \delta y &= \left( \frac{dy}{d\mathfrak{J}} + \kappa \cdot \frac{dy}{d\pi} \right) \delta \mathfrak{J} = (z - b) \{ \sin \pi + \kappa \mathfrak{J} \rho \cdot \cos \pi \} \delta \mathfrak{J} \end{aligned}$$

einführt. Ein Minimum jenes Abstandes der zwei betrachteten Stralen wird aber dann bei denjenigen Werthen von  $z$  statt finden, welche der Gleichung:

$$0 = \delta x \cdot \frac{d(\delta x)}{dz} + \delta y \cdot \frac{d(\delta y)}{dz}$$

genügen. Zu einem Maximum des fraglichen Abstandes können diese  $z$  deswegen nicht gehören, weil die zwei betrachteten Stralen, rückwärts verlängert, sich bis zum Unendlichen von einander entfernen. Die zuletzt genannte Gleichung giebt nun leicht:

$$z = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \left\{ \frac{\cos 2\pi \cdot (1 - \kappa^2 \cdot \mathfrak{J}^2 \rho^2) - 2 \cdot \sin 2\pi \cdot \kappa \mathfrak{J} \rho}{1 + \kappa^2 \cdot \mathfrak{J}^2 \rho^2} \right\}$$

für die Abstände vom Mittelpunkte des Objectivs, an denen der durch den Werth von  $\kappa$  ausgezeichnete Stral dem zu  $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}$  und  $\pi = \pi$  gehörigen möglichst nahe liegt. Dieser zuletzt genannte Stral wird aber demgemäss von irgend einem der ihn umgebenden eine möglichst grosse Annäherung erfahren, zwischen denjenigen Werthen von  $z$ , welche der vorstehenden Gleichung entsprechen und zugleich deren nach  $\kappa$  veränderlichen Werth zu einem Minimum oder Maximum machen. Aus  $\frac{dz}{d\kappa} = 0$  folgt aber:

$$\kappa = \frac{\cos 2\pi \pm 1}{\mathfrak{J} \rho \cdot \sin 2\pi}$$

oder, wenn man die zwei Wurzeln dieser Gleichung mit  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$ , so wie auch die ihnen entsprechenden Werthe der Gränzen von  $z$ , bei denen noch stärkste Stralenverdichtungen stattfinden, mit  $z_1$  und  $z_2$  bezeichnet:

$$\begin{aligned} \kappa_2 \cdot \mathfrak{J} \rho &= -\operatorname{tg} \pi & \kappa_1 \cdot \mathfrak{J} \rho &= +\operatorname{ctg} \pi \\ z_2 &= a & z_1 &= b. \end{aligned}$$

Die bei  $z = b$  und  $z = a$  gelegenen extraordinären Bilder, sind also in der That unter allen, in denen grösste Stralenverdichtungen vorkommen, dem Objectiv am nächsten und von ihm am entferntesten. Die Substitution der Werthe  $\kappa_1 \mathcal{J} \rho$  und  $\kappa_2 \mathcal{J} \rho$  für  $\kappa \mathcal{J} \rho$  in die von  $\delta x$  und  $\delta y$ , ergibt für jedes dieser Bilder den kleinsten Stralenabstand  $\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2} = 0$ , und beweist daher, wie wir auch schon aus der linearen Gestalt derselben und aus den Gleichungen (J) geschlossen haben, dass in ihnen wahre Durchschnitte aller derjenigen Stralen vorkommen, die ursprünglich bei gleichen Werthen von  $z$  in einerlei beziehungsweise mit den  $z$ - und  $y$ -Axen und mit den  $z$ - und  $x$ -Axen parallelen Ebene gelegen haben.

Wenn dagegen der Brennpunkt des Oculars in irgend einen zwischen  $z = b$  und  $z = a$  gelegenen Abstand von dem Mittelpunkte des Objectivs, welchen ich mit  $z = b + \nu$  bezeichnen will, gebracht wird, so stellt sich den Gleichungen (J) zu Folge, der ursprüngliche Bildpunkt (X, Y, Z) durch die extraordinären Stralencomponenten allgemein als eine Ellipse dar, die ihren Mittelpunkt bei:

$$\begin{aligned} x &= X_1 - (a - b - \nu)(\mu_1 - \mu) \cdot \operatorname{tg} J \text{ und} \\ y &= Y \end{aligned}$$

hat, und für welche betragen

$$\begin{aligned} \text{die halbe } x\text{-Axe: } & (a - b - \nu) F \rho, \\ \text{die halbe } y\text{-Axe: } & \nu \cdot F \rho. \end{aligned}$$

Wird ferner die Dichtigkeit der Stralen am Objectiv als Einheit genommen, so folgt für die entsprechende in einem solchen Bilde:

$$\frac{i \cdot Z^2}{(a - b - \nu) \cdot \nu}$$

wenn unter  $i$  in dem betrachteten Falle der Quotient der extraordinären Stralenmenge durch die gesammte verstanden wird. Dieser Ausdruck wird sowohl für  $\nu = 0$  oder  $z = b$ , als auch für  $\nu = a - b$  oder  $z = a$  unendlich gross, erreicht dagegen für  $\nu = \frac{a - b}{2}$  oder  $z = \frac{a + b}{2}$  seinen kleinsten Werth mit  $\frac{4i \cdot Z^2}{(a - b)^2}$ , welcher zugleich mit dem Übergange der elliptischen Begränzung des extraordinären Bildes in die Begränzung durch einen Kreis von dem Halbmesser  $\frac{a - b}{2} \cdot F \rho$  eintritt.

### 3. Vergleichung der Lage des ordinären und extraordinären Bildes eines Punktes und deren Anwendung zur Winkelmessung.

Die Entscheidung, ob eine der zwei vortheilhaftesten Gestaltungen des extraordinären Bildes mit einer der über-

haupt zulässigen des ordinären in einerlei zur Fernrohraxe senkrechten Ebene liegen und demnach durch die entsprechende Stellung des Oculars sichtbar gemacht werden können, erfolgt nun durch die Vergleichung der unter (J) angegebenen Werthe von  $a$  und  $b$ , mit der unter (4<sub>\*</sub>) genannten Begränzung des  $z$  für die Brennfläche der ordinären Stralen. Es ist zunächst klar, dass das gleichzeitige Eintreten der ordinären Darstellung des Objectpunktes durch den Scheitel dieser Brennfläche, und der extraordinären Darstellung desselben durch eine Linie von verschwindender Breite, in keinem Falle zu verwirklichen ist, denn wenn man das  $z$  für jenen Scheitel, d. h. den Werth  $Z + e \cdot \frac{\mu_1}{\mu}$  und  $z_0$  bezeichnet, so behalten die Differenzen  $b - z_0$  und  $a - b$  unter allen Umständen merkbare Werthe, und zwar positive, wenn der extraordinäre Brechungsindex:  $\mu_1$  der Prismensubstanz grösser ist, als ihr ordinärer Brechungsindex:  $\mu$  — und negativ im entgegengesetzten Falle. Nur in dem ersteren Falle, der für Bergkrystall stattfindet, kann aber auch der Ocularabstand  $b$ , der das eine der vollkommensten extraordinären Bilder zur Anschauung bringt, einem  $z$  gleich gemacht werden, welches grösser ist als  $z_0$ , und das demnach, wenn noch andere angebbare Bedingungen erfüllt sind, von den Stralen zu einem Objectpunkte die ordinären Componenten in einen Schnitt ihrer effectiven Brennfläche vereinigt. Substanzen, welche wie Kalkspath:  $\mu_1 < \mu$  haben, sind in Folge dieses Umstandes zu einem Mikrometerfernrohr unanwendbar.

Mit den für Bergkrystall gültigen Werthen:

$$\mu_1 = 1,55631 \text{ und } \delta \mu_1 = 0,01375,$$

wo die Gränzen für die Intensität der bemerkbaren Farbstrahlen ebenso wie oben für  $\delta \mu$  gewählt sind, folgen nun namentlich: für das ordinäre Bild:

$$z \leq Z + e \{0,35364 + 0,000172 \cdot F^2\},$$

und für das extraordinäre Bild:

$$\begin{aligned} b &= Z + e \cdot 0,35552 - X \cdot \operatorname{tg} J \cdot 0,01142 \\ a &= Z + e \cdot 0,35937 - X \cdot \operatorname{tg} J \cdot 0,00380, \end{aligned}$$

wenn der Winkel  $F = \operatorname{ang} \operatorname{tg} \left( \frac{O}{Z} \right)$  in Graden ausgedrückt wird.

Die Abhängigkeit der für das extraordinäre Bild geforderten Ocular-Abstände  $b$  und  $a$  von der  $x$ -Coordinate (X) seiner ohne die Prismen in demselben Fernrohre stattfindenden Darstellung, nöthigt zu einer Bestimmung dieser Grösse, und es ist dabei für die Praxis am einfachsten, dass man sie durch Beobachtung der zu benutzenden Coincidenzen in der Fernrohraxe oder dem Mittelpunkte des Feldes herbeiführe. Dieser Anordnung entspricht die Substitution:

$$X_1 = 0$$

in die erste der Gleichungen unter (*J*) oder, nach Auflösung derselben, der Werth:

$X \operatorname{tg} J = +0,002938 \cdot e \cdot \operatorname{tg}^2 J - 0,00920 \cdot \{Z - \alpha\} \cdot \operatorname{tg}^2 J$ ,  
welcher für die der genannten Beobachtungsart entsprechenden Werthe von *b* und *a*, die ich mit *b*<sub>0</sub> und *a*<sub>0</sub> bezeichnen will, ergibt:

$$b_0 = Z + e \{0,35552 - 0,00003 \cdot \operatorname{tg}^2 J\} + 0,0001055 (Z - \alpha) \operatorname{tg}^2 J$$

$$a_0 = Z + e \{0,35937 - 0,00001 \cdot \operatorname{tg}^2 J\} + 0,0000350 (Z - \alpha) \operatorname{tg}^2 J.$$

Die Vergleichung dieser Ausdrücke mit dem zuletzt genannten Gränzwerthe des *z* für das ordinäre Bild; zeigt dass dessen Übereinstimmung mit dem grössten Werthe den *b*<sub>0</sub> bei  $\alpha = 0$  annimmt, d. h. bei Messung des grössten Winkels, welchen das Mikrometer angiebt, herbeigeführt wird durch

$$F^2 = 10,931 - 0,1744 \cdot \operatorname{tg}^2 J + \frac{Z}{e} \cdot 0,6139 \cdot \operatorname{tg}^2 J \dots (K),$$

wo noch, da die Öffnung des Prismensystems der mit *2 O* bezeichneten Öffnung des Objectivs gleich sein muss, die Dicke *e* des ersteren durch:

$$e = 2 O \cdot \operatorname{tg} J = 2 Z \cdot F \cdot \rho \operatorname{tg} J$$

zu ersetzen ist. — Es folgen hier die Werthe von  $F = \operatorname{ang.} \operatorname{tg} \left( \frac{O}{Z} \right)$ , welche bei allen Prismenwinkeln *J*, die etwa noch in Gebrauch kommen dürften, eben gross genug sind, um der Gleichung (*K*) zu genügen, und um somit, bei jeder Anwendung des Instruments, die Coincidenz eines noch zulässigen ordinären Bildes mit einem der besten extraordinären möglich zu machen:

$$\delta s_1 = + \frac{\delta \mu}{\mu^2} \cdot \operatorname{tg} J \left\{ F^2 \rho + F^4 \rho^3 \cdot \frac{9-3\mu^2}{2\mu^2} \right\} = 0,167610^{-5} \cdot F^2 \cdot \operatorname{tg} J + 0,3909 \cdot 10^{-11} \cdot F^4 \cdot \operatorname{tg} J$$

für *F*<sub>1</sub> und  $\delta s_1$  in Bogenminuten gesetzt wird. Diese Abstände betragen also bei

<i>J</i>	
20"	1''14
30	1,66
40	2,78

Das extraordinäre Bild desselben Punktes, dessen halbe Länge allgemein die durch

$$l_1 = \frac{F}{Z} (a_0 - b_0)$$

ausgedrückte Winkelgrösse annimmt, wird durch Einführung der mit  $e = 2 Z \cdot F \cdot \rho \cdot \operatorname{tg} J$  spezialisirten Werthe von *a*<sub>0</sub> und *b*<sub>0</sub> expliziter bestimmt zu:

$$l_1 = F^2 \cdot \rho (\mu_1^2 - \mu^2) \cdot \left\{ \frac{\operatorname{tg} J}{\mu_1 \cdot \mu^2} + \frac{(\mu_1 - \mu) \cdot \operatorname{tg}^3 J \dots}{\mu_1^3 \cdot \mu} \right\}$$

$$\frac{F \cdot (\delta b_0)}{Z} = \frac{F^2 \cdot \rho \operatorname{tg} J}{2} \left\{ \frac{2\mu^3 - \mu_1^3}{\mu^2 \mu_1^3} \cdot \delta \mu_1 + \frac{2\mu_1^3 - \mu^3}{\mu_1^2 \mu^3} \cdot \delta \mu \right\} = F^2 \cdot \operatorname{tg} J \cdot n \cdot \operatorname{tg} 4,11253$$

<i>J</i>	<i>F</i>	<i>J</i>	<i>F</i>	<i>J</i>	<i>F</i>
20°	213' 9	30°	221' 5	40°	229' 7
22	215,4	32	223,1	42	231,4
24	216,9	34	224,7	44	233,2
26	218,4	36	226,3	46	235,0
28	219,9	38	228,0		
30	221,5	40	229,7		

Es werden aber unter diesen Umständen namentlich das durch die Stralen von mittlerer Brechbarkeit entstehende ordinäre Bild des Punktes (*X, Y, Z*) ein unendlich schmaler Ring, dessen linearer Halbmesser *s* nach der Gleichung (4\*) beträgt:

$$s = 2 Z \cdot F^4 \cdot \rho^4 \cdot \operatorname{tg} J \cdot \frac{\sqrt{\mu^2 - 1}}{\mu^3}$$

und der sich daher am Himmel unter dem Winkel *s*<sub>1</sub> darstellt, wenn man setzt:

$$s_1 = 2 F^4 \cdot \rho^3 \cdot \operatorname{tg} J \cdot \frac{\sqrt{\mu^2 - 1}}{\mu^3} = 0,63757 F^4 \cdot \rho^3 \cdot \operatorname{tg} J.$$

Mit den zusammengehörigen Werthen von *F* und *J* folgen z. B. bei:

<i>J</i>	Halbmesser des Bildes
20°	0''72
30	1,30
40	2,30

Nur die schwächer als die mittleren gebrochenen Stralen bilden innerhalb dieses Ringes concentrische von merklicher Helligkeit, welche von ihm allgemein bis zu  $-s_1 + \delta s_1$  ab- stehen, wenn:

oder in Zahlen zu:

$$l_1 = F^2 \cdot \rho \{0,00768 \cdot \operatorname{tg} J + 0,00004 \cdot \operatorname{tg}^3 J \dots\}$$

Diese Winkelgrösse beträgt mithin bei

<i>J</i>	<i>l</i> <sub>1</sub>
20°	2''21
30	3,75
40	5,88

Alle Stralen vom Brechungsindex  $\mu_1$  sind innerhalb einer nach der *y*-Axe unendlich schmalen Linie vereinigt, welche nach der *x*-Axe um *l*<sub>1</sub> zu jeder Seite ihres Mittelpunktes oder des eigentlichen Bildpunktes hinausragt, während die stärker und schwächer brechbaren Stralen innerhalb eines Saumes von gemischtem diffusum, und daher relativ verschwindendem Lichte enthalten sind, dessen grösste Winkelausdehnung nach der *Y*-Axe durch

für  $F$  in Minuten ausgedrückt ist. Sie beträgt daher z. B. bei

$J$	
20°	1"30
30	2.19
40	3.66

Es findet indessen diese Breite des diffusen Lichtsaumes nur um die Mitte der linearen Bilder Statt, während dieselbe gegen beide Enden abnimmt und an denselben vollständig verschwindet. Der wirksame Theil des extraordinären Bildes wird auch durch diesen Umstand in seiner zu den brechenden Kanten der Prismen senkrechten Ausdehnung herabgesetzt. In noch weit höherem Maasse geschieht dieses aber dadurch, dass die Lichtlinie von halber Winkelgrösse  $I_1$  an jedem um  $\frac{I_1}{n}$  von ihrer Mitte entfernten Punkte die Intensität  $\frac{\sqrt{n^2-1}}{n}$  besitzt, welche an dem Ende zu Null wird und daher einen für das Auge unfühlbaren Werth jedenfalls merklich innerhalb der angegebenen Grenzen für die gesammte Ausdehnung des Bildes erreicht. Es wären jene Gränzwerte zum Beispiel um nahe an  $\frac{1}{2}$  und nahe an  $\frac{1}{4}$  zu verkleinern, wenn nur Helligkeiten, die der Hälfte oder zwei dritteln der stärksten gleich kämen, sich merkbar erwiesen. Die Erfahrung hat zu entscheiden, ob die Erkennung der Mitte von jedem der Bilder, durch welche ein optischer Punkt in dem in Rede stehenden Mikrometerfernrohre dargestellt wird, durch die so eben bestimmte merkliche Ausdehnung derselben erschwert wird. A priori ist dieses nicht für wahrscheinlich zu erklären, wenn man sich an die beträchtlichen Durchmesser der kreisförmigen Bilder erinnert, welche die vollendetsten Fernröhre an und für sich von hellen Fixsternen liefern, und man hat demnach, von dieser Seite, die an dergleichen Fernröhren angebrachten Ocular- oder Objectiv-Mikrometer ihrem mathematischen Ideale kaum näher zu halten, als das hier betrachtete doppelbrechende Mikrometer.

Die zwei Punkte des Himmels, deren Winkelabstand  $w$  gemessen werden soll, mögen nun, unserer bisherigen Annahme gemäss, durch den passenden Werth des Abstandes  $\alpha$  zwischen der Vorderfläche des Prismensystems und dem Mittelpunkt des Objectivs in dem Mittelpunkt des Feldes zusammenfallend erscheinen. Dem Vorhergehenden zu Folge würde dann ohne die Prismen, in demselben Fernrohre derjenige dieser Punkte, dessen extraordinäres Bild gesehen wird, als  $x$ -Coordinate, das zu  $X_1 = 0$  gehörig  $X$ , welches ich mit  $X_0$  bezeichnen will, gehabt haben, so wie auch  $y = 0$  und  $z = Z$ , der andere Punkt aber:

$$\begin{aligned} x &= X_1 = 0 \\ y &= 0 \quad \text{und} \\ z &= Z. \end{aligned}$$

Es ist daher in aller Strenge:

$$\operatorname{tg} w = -\frac{X_0}{Z},$$

oder nach Anwendung der ersten Gleichung unter ( $J$ ) mit  $X_1 = 0$  und  $X = X_0$ :

$$\operatorname{tg} w = \frac{(\mu_1 - \mu) \cdot \operatorname{tg} J \left\{ Z - \frac{\mu}{\mu_1^2} \cdot \frac{e}{2} - \alpha \right\}}{Z \left( 1 + \mu \cdot \frac{(\mu_1 - \mu)}{\mu_1^2} \cdot \operatorname{tg}^2 J \right)} = w.p... (L)$$

wo die Annahme der Proportionalität des zu messenden Winkels mit seiner Tangente selbst bei  $J = 45^\circ$  nur Fehler, die kleiner sind als  $\frac{1}{20}$  Secunde, veranlassen kann. Wenn nun an der Fassung des Fernrohrs, eine mit dessen optischer Axe parallele Theilung angebracht und auf derselben, durch einen mit dem verschiebbaren Prismensysteme fest verbundenen Index, die Zuwächse von  $-\alpha$ , d. h. die Annäherungen der Prismen an das Objectiv, abgelesen werden, so hat man, um jeden Zuwachs dieser Ablesung einer Vermehrung des Winkels  $w$  um eine ihm gleiche Anzahl von Sekunden gleichsetzen zu dürfen, die Länge  $\xi$  einer Theilungseinheit nach dem Ausdruck:

$$\xi = \frac{Z \cdot \sin 1'' \left( 1 + \mu \cdot \frac{\mu_1 - \mu}{\mu_1^2} \cdot \operatorname{tg}^2 J \right)}{(\mu_1 - \mu) \cdot \operatorname{tg} J} = \frac{Z \{ 1 + 0,005876 \cdot \operatorname{tg}^2 J \}}{1897,61 \cdot \operatorname{tg} J} (M)$$

zu bestimmen, in welchem  $Z$  so wie bisher die Brennweite des Objectivs bedeutet. Bezeichnet man dann allgemein mit  $s$  die Zahl der Theilungseinheiten, neben der sich der Index befindet, während der zu messende Winkel  $w$  Sekunden beträgt, so hat man nach der Gleichung unter ( $M$ ):

$$w = \frac{Z - \frac{\mu}{\mu_1^2} \cdot \frac{e}{2}}{\xi} + s$$

und, wenn beim Eintreten der Coincenz beider Bilder von ein und demselben Punkte, für das allgemeine  $s$  der besondere Werth  $s_0$  abgelesen worden ist:

$$0 = \frac{Z - \frac{\mu}{\mu_1^2} \cdot \frac{e}{2}}{\xi} + s_0 \dots \dots \dots (M_*)$$

und daher:

$$w = (s - s_0) \dots \dots \dots (N)$$

Diese Gebrauchsanweisung des Instruments geht natürlich in die allgemeinere:

$$w = \nu (s - s_0) \dots \dots \dots (N_*)$$

über, wenn die Einheiten der vorhandenen Theilung anstatt des unter ( $M$ ) angegebenen Werthes  $\xi$  einen beliebigen anderen:  $\xi_1 = \nu \cdot \xi$  besitzen, und es ist diese allgemeinere Voraussetzung schon deswegen beizubehalten, weil ein nach ( $M$ ) berechneter Werth von  $\xi$ , sowohl durch einen Fehler in

der angenommenen Brennweite des Objectivs, als auch, und besonders, durch dergleichen in den hier angenommenen Brechungsindices des Bergkrystalls, von dem wahren abweichen könnte. In jedem Falle wird aber eine vollständige Messung in der Beobachtung der in der Mitte des Feldes stattfindenden Coincidenzen der Bilder der zwei zu bestimmenden Punkte bei der Skalenablesung  $s$ , und der Bilder ein und desselben Punktes bei der Skalenablesung  $s_0$  bestehen, und zur Bestimmung des  $\nu$  in der Gleichung unter  $(N_*)$  wird dann etwa die, mit demselben Instrumente und nur einmal für allemal ausgeführte, Messung eines anderweitig bekannten Winkels  $w$  zu benutzen sein.

Es ist hier über die Ausführung dieser Beobachtungen noch zu erinnern, dass wenn der Ocularbrennpunkt des Fernrohrs zuerst in denjenigen Abstand  $b_0$  von dem Mittelpunkt des Objectivs gebracht worden ist, welcher beiden Bildern eines Punktes bei  $\alpha = 0$ , d. h. bei möglichst starker Trennung, die grösste Deutlichkeit ertheilt, der Anwendung des Instruments bei einem grösseren  $\alpha$  eine Annäherung des Oculars an das Objectiv ( $-\delta b_0$ ) vorhergehen muss, welche gegeben ist durch:

$$-\delta b_0 = \frac{(\mu_1 - \mu)(\mu_1^3 - \mu^3) \cdot tg^2 J}{\mu_1^2 \mu^2 + (\mu_1 - \mu)\mu^3 \cdot tg^2 J} \cdot \alpha = \frac{0,0001055 \cdot tg^2 J}{1 + 0,005876 \cdot tg^2 J} \cdot \alpha$$

und von welcher das zu  $w = 0$ , d. h. zur Coincidenz beider

$$W = \frac{\mu_1^2 (\mu_1 - \mu) tg J - \mu (\mu_1 - \mu) \cdot F \rho \cdot tg^2 J}{\rho \{ \mu_1^2 + \mu (\mu_1 - \mu) tg^2 J \}} = \frac{1897''61 \cdot tg J - 0,005876 \cdot F \cdot tg^2 J}{1 + 0,005876 \cdot tg^2 J} \dots\dots\dots (O)$$

Es folgen hier diese Gränzen der Brauchbarkeit für Prismensysteme von gegebenen Winkeln  $J$  und zugleich in Par. Linien die Breite ( $2Z tg F$ ) und Dicke  $e$  der Bergkrystallstücke, die, unter Beibehaltung des oben für nothwendig erkannten Verhältnisses zwischen  $F$  und  $J$ , zu ihrer Darstellung für ein Fernrohr von 1 Par. Fuss Brennweitig nöthig sind. Für Objective von  $n$  Fuss Brennweite gilt demnach das  $n$ -fache der zuletzt genannten Werthe, während die Gränze  $W$  der mit ihnen messbaren Winkel ungeändert bleibt:

Prismen- winkel $J$	Gränze der An- wendbarkeit $W$	Breite   Dicke des Bergkrystall bei 1 Fuss Brenn. in Lin.	
20°	11' 29''0	17,9	6,5
25	14 42,1	18,2	8,5
30	18 10,9	18,6	10,7
35	22 1,0	18,9	13,2
40	26 20,0	19,3	16,2
45	31 18,3	19,6	19,6

Der Durchmesser der Öffnung des Objectivs ist überall der angegebenen Breite des Bergkrystall gleich.

Der Anfertigung von zweifüssigen und wohl auch von

Bilder und zur Skalenablesung  $s = s_0$  gehörige Maximum ( $-\Delta b_0$ ) mit  $\alpha = Z - \frac{e}{2} \cdot \frac{\mu}{\mu_1^2} = Z \left\{ 1 - F \rho \cdot tg J \cdot \frac{\mu}{\mu_1^2} \right\}$  und der Bedingung unter  $(K)$  bestimmt wird:

bei $J$	zu: $-\Delta b_0$ allgemein	für ein 5 f. Fernrohr
20°	0,000014 Z.	0,018 Pariser Linien.
30	0,000035 Z.	0,025 " "
40	0,000070 Z.	0,050 " "

Die Vernachlässigung dieser, wie man sieht äusserst kleinen Bewegung, würde zur Folge haben, dass das extraordinäre Bild eines betrachteten Punktes anstatt einer unendlich schmalen Linie, eine Ellipse von äusserst geringer aber doch merklicher kleinen Axe darstellte. Sein ordinäres Bild würde unter denselben Umständen bei allen Werthen von  $w$  denselben Querschnitt, wie bei der grössten Trennung der Bilder behalten, während es bei ganz richtiger Einstellung des Oculars für  $w = 0$  einen etwas engeren Lichtring bildet, wie für das Maximum von  $w$ .

Um endlich das in Rede stehende Instrument zur Messung von Winkeln bis zu einem gegebenen Maximum von  $w$ , welches ich mit  $W$  bezeichnen will, geschickt zu machen, ergibt sich das Erforderte aus der Gleichung  $(L)$  durch Substitution von  $\alpha = 0$  und  $e = 2Z \cdot F \rho \cdot tg J$ . Es wird aber namentlich:

dreifüssigen Mikrometer-Fernröhren dieser Art würde hier nach auch von Seiten des Materials kein allzu grosses Hinderniss entgegenstehen, während zu einem fünffüssigen nur etwa die Bergkrystallkugeln ausreichen würden, die angeblich mit 20000 bis 30000 Thaler bezahlt worden sind. Die nach den eben erhaltenen Regeln dem jedesmaligen Bedürfniss entsprechend gemachten Prismen werden von den durch das Objectiv gegangenen Strahlen keinen vollständig ausschliessen, sobald der Brechungsindex  $m$  ihrer Zwischenschicht der unter  $(B)$  und unter  $(J_*)$  genannten Ungleichheit Genüge leistet. Die in diese eingehende Grösse  $\gamma$  ist von dem Winkelhalbmesser des Feldes  $f$  abhängig. Man wählt aber für diesen letztern gewiss das äusserste Maximum, indem man ihm  $= \frac{2}{3} W$ , also den Durchmesser des Feldes dem dreifachen des grössten der mit dem Mikrometer zu messenden Winkel und demnach:

$$\gamma = F + \frac{3W}{2}$$

annimmt. Die Bedingung für den Brechungsindex  $m$  wird dann:

bei $J$	$m$ grösser als:
20°	0,6056
25	0,7163
30	0,8353
35	0,9479
40	1,0532
45	1,1503

und man sieht, dass ihr für Prismenwinkel, die kleiner als 37°4 sind, selbst durch eine luftleere Zwischenschicht, für grössere Werthe von  $J$  aber durch Mittel von häufig vorkommenden Brechungsvermögen entsprochen wird. Es versteht sich von selbst, dass man, da eine Maximumgränze für  $m$  nicht vorhanden ist und da die Intensität der hindurchgelassenen Stralen zugleich mit  $m$  wächst, den in Rede stehenden Raum mit einem stark brechenden Kitt und beispielsweise mit Canadabalsam oder einer der ihm ähnlichen Verbindungen von Harzen und flüchtigen Ölen füllen wird. Nach der Anfertigung und Verbindung der Prismen und Bestimmung der Brennweite des Objectivs  $Z$  kann sodann die Einheit der auf die Fernrohrfassung aufzutragenden Theilung durch die Gleichung ( $M$ ) berechnet, so wie ferner bei deren Anbringung, durch Benutzung der Beziehung unter ( $M_*$ ) der Werth von  $s_0$  der Null beliebig nahe gebracht werden. Man kann endlich auch den Werth von  $b_0$  und dessen Veränderungen nach  $\alpha$  durch das Vorstehende bestimmen, und jenachdem die letzteren noch merklich oder für die Einstellungsmittel verschwindend sind, verschiedene oder nur ein Zeichen zur richtigen Einstellung des Oculars auf den Röhren, welche es mit dem Objective verbinden, anbringen.

Ich werde hier auch diese Resultate der theoretischen Betrachtung auf das von *Lenoir* ausgeführte *Rochon'sche* Mikrometerfernrohr, welches ich oben erwähnt habe, anwenden, und dadurch Gelegenheit zur Veranschaulichung des Einflusses erhalten, den einige Fehler der Construction auf die Leistungen eines solchen Instrumentes ausüben. Zu den oben angeführten Werthen

$$\begin{aligned} O &= 8,20 \\ e &= 8,43 \text{ und} \\ Z &= 143,0 \end{aligned}$$

für den Halbmesser der Objectivöffnung, die Dicke des Prismensystems und die Brennweite des Objectivs an dem *Lenoir'schen* Fernrohre, kommt noch für den brechenden Winkel seiner Prismen:

$$J = 36^\circ 12'.$$

Ich habe diesen Werth nur aus Messungen schliessen können, welche dessen vollständige Gleichheit für beide Hälften des Systems nicht bewiesen.

Der Halbmesser der Öffnung des Prismensystems beträgt für dieses Instrument nur:

$$4,215 \cdot \text{ctg}(36^\circ 12') = 5,759,$$

und es kömmt daher die Neigung der Randstralen:

$$F = \text{ang. tg } \frac{O}{Z} = 196'9$$

nur so lange vollständig in Anwendung, als der Abstand  $\alpha$  der Vorderfläche des Prismensystems grösser als 39,4 Pariser Linien oder der Winkelabstand der Bilder  $w$  kleiner als 0,7 seines Maximumwerthes erhalten wird. Zwischen  $\alpha = 39,4$  und  $\alpha = 0$  vermindert sich dagegen der für  $F$  anzuwendende Werth continuirlich bis zu  $F = 138'$ .

Der Bedingungsgleichung ( $K$ ) für die Identität der Ebenen, in der sich ein lineares extraordinäres Bild und das Ende der effectiven Brennfläche der ordinären Stralen befinden, wird für dieses Instrument im allgemeinen Falle nicht genügt, und es beträgt vielmehr der Abstand dieser Ebene oder nach der obigen Bezeichnung die Grösse:

$$\begin{aligned} b_0 - z_0 &= (143 - \alpha) 0,0000568 \text{ Par. Lin. für } \alpha > 39,4 \text{ und} \\ b_0 - z_0 &= 0,0762 - \alpha \cdot 0,00180 \text{ Par. Lin. für } 0 > \alpha > 39,4. \end{aligned}$$

Wenn man nun, der Wahrscheinlichkeit gemäss, annimmt, dass zur Herbeiführung des deutlichsten Sehens der Ocularbrennpunkt unter diesen Umständen in den Abstand  $z = \frac{b_0 + z_0}{2}$  von dem Mittelpunkte des Objectivs gebracht wird, so sind daselbst die Stralen des ordinären Bildes auf einen Ring vom Winkel-Halbmesser  $s'_1$  vertheilt, wenn

$$s'_1 = 2 F^4 \rho^3 \cdot \text{tg } J \cdot \frac{\sqrt{\mu^2 - 1}}{\mu^3} + \frac{b_0 - z_0}{2Z} \cdot F$$

mit den jedesmal gültigen Werthen von  $F$ ,  $b_0$  und  $z_0$  gesetzt werden, und die Stralen des extraordinären Bildes auf einer Ellipse, deren Winkelgrösse betragen für:

$$\text{die halbe } x\text{-Axe: } \frac{a_0 - b_0}{Z} \cdot F + \frac{b_0 - z_0}{2Z} \cdot F = A$$

$$\text{die halbe } y\text{-Axe: } \frac{b_0 - z_0}{2Z} \cdot F = B,$$

wenn  $F$ ,  $a_0$ ,  $b_0$  und  $z_0$  wiederum nach der jedesmaligen Lage des Prismensystems bestimmt werden. Es folgen hiermit, wenn wie früher der zu messende Winkel mit  $w$ , dessen noch messbares Maximum aber mit  $W$  bezeichnet werden, bei:

	Ordinär. Bild	Extraordinär. Bild	
$w$	$s'_1$	$A$	$B$
0	1''04	2''66	0''00
0,7 $W$	1,28	2,58	0,24
$W$	3,25	3,64	2,17

Für die zwischen dem ersten und zweiten und zwischen dem zweiten und dritten gelegenen Werthe von  $w$ , wachsen die Dimensionen der Bilder bis auf Unerhebliches proportional mit den Zuwächsen von  $w$ , auch ist noch zu bemerken,

dass hier der Ring, der das ordinäre Bild eines Punktes ausmacht, nicht unendlich schmal und von incommensurabler Helligkeit gegen das diffuse Licht in seinem Innern sein kann, sondern dass er als eine Kreisfläche erscheinen muss, in welcher die Helligkeit zwar äusserst stark, aber doch nur stetig von dem Umfange gegen den Mittelpunkt abnimmt. Es scheint nicht, als ob das Auge vor diesem Fernrohr einen Unterschied zwischen diesen Bildern und zwischen den ihnen entsprechenden vollkommensten, d. i. dem verschwindend kleinen ordinären und dem linearen extraordinären wahrnehme, denn wenn man selbst bei den grössten Werthen von  $w$  das Ocular nach einander für die vollkommenste Deutlichkeit des einen und des andern Bildes einzustellen sucht, so findet sich im Mittel kein Unterschied zwischen den zu beiden gehörigen  $z$ ; zwischen den einzelnen Einstellungen aber Differenzen, welche 0,076 Par. Linien und mithin das Maximum von  $b_0 - z_0$  wesentlich übertreffen.

Das bei  $\alpha = 0$  eintretende Maximum des messbaren Winkels sollte nach der Gleichung unter (L) für das *Lenoir*-sche Mikrometerfernrohr  $23' 2'' 6$  betragen. Man findet daher mit Verwunderung dessen wirklichen Werth noch um etwas grösser als  $33' 30''$ . Eine ausreichende Erklärung zeigte sich

$$\delta x = (Z - \alpha) \{ \mu - 1 \} (i + i') \rho \}$$

$$\delta x_1 = (Z - \alpha) \left\{ \mu_1 (i + i') \rho + \frac{(\mu_1 - \mu)(\mu_1^3 - \mu^3)}{\mu_1^2 \mu^2} \cdot \lg^2 J ((\mu_1 + 1) i + \mu_1 i') \rho \right\}$$

Es sind dabei nur Glieder, welche die Producte von Sinussen der kleinen Winkel  $i$ ,  $i'$  und  $F$  enthalten, vernachlässigt. Der entsprechende Zuwachs  $\delta w$  des zu einem ge-

$$\delta w = \frac{\delta x_1 - \delta x}{Z \rho} = \frac{Z - \alpha}{Z} \{ 1,00920 (i + i') + (0,00027 \cdot i + 0,000016 \cdot i') \cdot \lg^2 J \}$$

und daher für das *Lenoir*-sche Fernrohr bei  $\alpha = 0$ , bis auf Unmerkliches, zu:  $\delta w = 1,00932 (i + i')$  eine Grösse, die mit  $w = 23' 2'' 6$  und  $i + i' = 10' 5$ , das  $w + \delta w = 33' 36''$  dem beobachteten Werthe ganz so nahe bringt, wie es die nur angenäherte Messung des  $i + i'$  erwarten liess. Das Mittel, dessen sich der französische Mechaniker hier zu Erhöhung der Anwendbarkeit seines Mikrometers bedient hat, wäre empfehlenswerth, wenn nicht durch dasselbe ein jedes der Bilder eines Punktes mit einem farbigen Rande umgeben würde, dessen Winkelbreite zu jeder Seite seiner Mitte nahe genug durch:

$$\frac{Z - \alpha}{2 Z} \cdot (\delta \mu) (i + i') \text{ für das ordinäre, und}$$

$$\frac{Z - \alpha}{2 Z} \cdot (\delta \mu_1) \cdot (i + i') \text{ für das extraordinäre}$$

ausgedrückt ist. Diese Vergrösserung der Bilder, die bei  $w = 0$  verschwindet, beträgt bei dem Maximum des mess-

jedoch bald in dem Umstande, dass die parallel vorausgesetzten Flächen des Prismensystems bei diesem Instrumente um nahe an  $10' 5$  gegen einander geneigt sind, und dass sie sich namentlich genugsam verlängert bei einem negativen  $x$  unter diesem Winkel schneiden würden. Ich habe diesen Winkel wiederholentlich mit Hülfe der Bilder eines so gut als unendlich entfernten Punktes gemessen, die nach einander in die Abschenslinie eines Fernrohrs von beiden zu vergleichenden Flächen reflectirt wurden, während man das Prismensystem um die seinen brechenden Kanten möglichst nahe parallel gemachte Axe eines Theodoliten drehte. Die Abweichungen der einzelnen Resultate von ihrem Mittel erklärten sich genugsam durch zurückgebliebene Neigungen der Drehungsaxe gegen den Durchschnitt beider Flächen. Wenn nun aber die vorstehenden Ableitungen unter den Voraussetzungen ergänzt werden, dass die brechenden Winkel für das erste Prisma  $J - i$ , für das zweite Prisma  $J + i'$  betragen, und dass zugleich die nach aussen gerichtete Normale der ersten Fläche des Systems den Winkel  $90^\circ + i$  mit der positiven Hälfte der  $x$ -Axe einschliesst, so erhalten bei  $z = b_0$  die  $x$ -Coordinationen des ordinären und des extraordinären Bildes die Zuwächse  $\delta x$  und  $\delta x_1$ , wenn man setzt:

gegebenen Werthe von  $\alpha$  gehörigen Winkels  $w$  zwischen zwei coincidirenden Punkten wird allgemein zu:

baren Winkels für das in Rede stehende Fernrohr resp.  $4'' 20$  und  $4'' 33$ .

Ich finde der Theorie entsprechend bei  $\alpha = Z$  oder  $w = 0$  die beiden Bilder selbst unter Anwendung von sehr intensivem Lichte farblos; bei  $\alpha = 0$  aber das extraordinäre Bild mit merklichen Farbensäumen umgeben, von denen an dem ordinären offenbar wegen der ihm eigenen Lichtvertheilung auf einer Kreisfläche nichts wahrzunehmen ist.

#### 4. Erkennung und Untersuchung von polarisirtem Lichte mit dem *Rochon*'schen Mikrometerfernrohr.

Nach der allgemeinen Betrachtung der Wellenbewegung in elastischen Mitteln, erfolgen in einaxig doppelbrechenden Substanzen, die Schwingungen des ordinären Strales in einer Ebene durch die Krystallaxe und die Wellennormale und die des extraordinären Strales nach einer zu dieser Richtung senkrechten Linie der Wellenebene.

Von den Stralen eines kleinen Bündels werden hiernach, in dem ersten Prisma des *Rochon'schen* Systems, der zur ersten Ebene senkrecht nicht zerlegt, ein jeder der übrigen aber in zwei, nach den Azimuten  $\pi$  und  $\pi + 90^\circ$  unserer früheren Bezeichnung, schwingende Theile. In dem zweiten Prisma und nach dem Austritt aus demselben liegen dagegen, derselben Construction zu Folge, die Schwingungen aller extraordinären Theile desselben Bündels bis auf Unmerkliches in der *ZY*-Ebene.

Wenn daher von einem leuchtenden Punkte eine mit *J* bezeichnete Quantität nach allen Seiten schwingenden, oder sogenannten natürlichen Lichts, und ausserdem *J'* linear polarisirten Lichtes ausgehen, so werden, wenn man dessen Schwächung durch die brechenden Flächen übersieht, in dem Mikrometerfernrohre

das extraordinäre Bild die Intensität:  $J + J' \cdot \cos^2 \alpha$ ,

das ordinäre Bild die Intensität:  $J + J' \cdot \sin^2 \alpha$

besitzen, während  $\alpha$  den Winkel bedeutet, den die ursprüngliche Schwingungsebene des auf das Objectiv fallenden polarisirten Lichts mit der *XZ*-Ebene, und daher auch mit einer der Fernrohraxe parallelen Ebene durch beide Bilder einschliesst. Die extremen Werthe  $\frac{J+J'}{J}$  und  $\frac{J}{J+J'}$ , welche das Intensitätsverhältniss zwischen einem und dem andern Bilde des untersuchten Punktes annimmt, wenn man durch Drehung des Fernrohrs um seine optische Axe nacheinander  $\alpha = 0$  oder  $180^\circ$  und  $\alpha = 90^\circ$  oder  $270^\circ$  herbeiführt, werden hiernach beziehungsweise zu 1 und 1, zu einem unächten und einem ächten Bruche, und zu  $\infty$  und 0, jenachdem dessen Licht natürliches, partiell polarisirtes oder vollständig polarisirtes ist, und man wird also, wie schon oben angedeutet wurde, über das Vorhandensein des einen oder andern dieser Zustände, meistens durch den unmittelbaren Augenschein, der sich bei Drehung des Fernrohrs darbietet, entscheiden können. Um sodann aber auch die Schwingungsebene des polarisirten Lichtes zu bestimmen, möge mit *P* der von Norden an rechts herum gezählte Positionswinkel des grössten Kreises, in welchem sie die Himmelskugel schneidet, bezeichnet werden. Es sei ferner die Fassung des Fernrohrs mit einer zur optischen Axe senkrechten, und von rechts nach links wachsenden, Kreistheilung versehen und deren, in dem Hauptschnitte der Prismen gelegener, Durchmesser mit 0 und mit  $180^\circ$  bezeichnet; mit dem feststehenden Fusse des Instruments aber ein, in dem Vertikale durch den Mittelpunkt dieses Kreises gelegener, Index zu demselben verbunden. Die, bei einer beliebigen Lage des Prismensystems an diesem Kreise gemachte, Ablesung sei mit *p* bezeichnet, so wird allgemein:

$$P = p + \text{ang. sin} \left( \frac{\sin t \cdot \cos \varphi}{\sin z} \right) + \alpha,$$

wenn *t* und *z* den Stundenwinkel und die Zenithdistanz des beobachteten Punktes, und  $\varphi$  die Polhöhe des Ortes bedeuten, und daher auch resp.:

$$\cos (P-p') = - \frac{\sin t \cdot \cos \varphi}{\sin z}, \text{ oder}$$

$$\sin (P-p'') = + \frac{\sin t \cdot \cos \varphi}{\sin z}$$

wenn nach einander bei den Ablesungen von *p'* und *p''* das ordinäre Bild und das extraordinäre Bild das Maximum seiner Helligkeit erreicht hatte. In vollständiger Übereinstimmung mit diesen theoretischen Resultaten finden sich die Erscheinungen, welche verschiedene terrestrische Objecte, bei der Untersuchung mit einem Mikrometerfernrohre von der betrachteten Einrichtung, darbieten. Man unterscheidet auf das bestimmteste alle diejenigen, welche von nicht-metallischen Oberflächen direktes Sonnenlicht reflektiren, indem ihre Bilder, bei der Drehung des Fernrohrs, Intensitätsunterschiede zeigen, die von erheblichen Schwächungen bis zu vollständigen Verschwindungen gehen, während die Helligkeit der Bilder von Objecten, welche verschieden auffallendes Tageslicht nach einerlei Richtung verbreiten, von dem Werthe des Winkels *p* ganz unabhängig erscheint. Für Objecte der ersteren Art findet man ausserdem die, nach den vorstehenden Regeln bestimmte, Schwingungsrichtung ihrer Stralen zu deren Reflexionsebene senkrecht und die Vollständigkeit der Polarisation durch die Senkrechttheit der an ihnen reflektirten Stralen zu denen in ihr Inneres gebrochenen bedingt.

Man kann die, bei vollständiger Polarisation, durch Veränderung von *p* zu bewirkende Verschiedenheit des Ansehens zweier Bilder, beträchtlich verstärken, indem man vor oder hinter dem Objective, aber vor der ersten Fläche des Prismensystems, eine, zwischen zwei zur optischen Axe senkrechten Ebenen enthaltene, Schicht aus einer der Substanzen anbringt, welche, wie Bergkrystall, Terpentinöl, Zuckerlösungen u. m. a., die Schwingungsebene verschiedener Farbstralen in verschiedenem Grade drehen. Eine Platte von Bergkrystall, deren einander parallele Gränzflächen zur Krystallaxe normal sind, genügt diesem Zwecke am einfachsten; indem sie, nach Art einer Blende, dem Objective des Mikrometerfernrohrs hinzugefügt und wieder von ihm getrennt werden kann. Nach Anbringung derselben gelten aber, bei Betrachtung des bisher vorausgesetzten Punktes, die Ausdrücke:

$$J + \Sigma f \cdot \cos^2 \left( \alpha + \frac{\nu \cdot \partial}{n^2} \right) \text{ für d. Intensität des extraord. Bildes, und}$$

$$J + \Sigma f \cdot \sin^2 \left( \alpha + \frac{\nu \cdot \partial}{n^2} \right) = \text{ordinären} =$$

wenn  $\Sigma f = f' + f'' + \dots + f^{(n)} + \dots = J'$ , und  $J'$  die Intensität des linear polarisirten Lichtes,  $f^{(n)}$  aber die Intensität derjenigen bestimmten Lichtart bedeutet, deren Wellenlänge durch den, zu  $w^{(n)}$  spezialisirten, Werth des allgemeinen Zeichen  $w$  für die Wellenlänge sämtlicher Lichtarten, ausgedrückt ist, während unter  $d$  die Dicke der Platte und unter  $\nu$  eine constante, von der Natur der Substanz derselben abhängige, positive oder negative Winkelgrösse verstanden werden.

Es ist klar, dass das Helligkeitsverhältniss beider Bilder durch diese Einrichtung, der Unabhängigkeit von  $\alpha$  und von der, mit  $\alpha$  gleichmässig veränderlichen, Ablesung  $p$  äusserst nahe gebracht werden kann; indem durch Vergrösserung von  $d$  die Gränzwerte der trigonometrischen Functionen in beiden Summen beliebig stark unterschieden, und dadurch die Werthe dieser Summen ausgeglichen werden. So sind für Bergkrystall und  $d = 3,0015$  Par. Linien, die beiden Gränzwerte von  $\frac{\nu d}{w^2}$ : für die äussersten rothen Strahlen  $118^\circ 28'$ , für die äussersten violetten Strahlen aber  $298^\circ 28'$ , und damit die durch jede der beiden Summen ausgedrückte Quantität des Lichts, bis auf die sekundären Unterschiede, die von Ungleichheit des  $f$  für verschiedene Farbstrahlen herühren, sowohl identisch als auch unabhängig von  $\alpha$ .

Ganz entgegengesetzt verhält es sich aber mit den Färbungen dieser Bilder, denn da die eine und die andere in jedem Falle beziehungsweise aus zwei Quantitäten jedes einzelnen Farbstrales, die sich einander ergänzen, bestehen, und ausserdem nur etwa noch aus dem in beiden Bildern gleichwirkenden unpolarisirten Lichte, so zeigt sich bei jedem beliebigen Werthe von  $\alpha$  oder  $p$ , die eine als sogenannte Ergänzungsfarbe der anderen. Von den unendlich mannichfaltigen Färbungen dieser Art, wird aber diejenige, welche eines der beiden Bilder bei der Ablesung  $p$  besitzt, dem andern Bilde ertheilt, wenn diese Ablesung entweder um  $\pm 90^\circ - 2p$  oder um  $\pm 90^\circ$  vermehrt wird. Der Unterschied zwischen dem zu einer bestimmten Färbung des einen der beiden Bilder gehörigen Werthe von  $p$  und dem  $p'$  oder dem  $p''$ , die ohne die drehende Platte resp. das ordinäre und das extraordinäre Bild am hellsten gemacht hätten, und welche dann das gesuchte  $P$  ergeben, kann einmal für allemal bestimmt werden. Als besonders kenntlich eignet sich hierzu diejenige Färbung der beiden Bilder, welche beim Verschwinden des Strales von mittlerem Quadrate der reziproken Wellenlänge, in dem einen von ihnen und demnach, bei gleicher Intensität der beiden extremen Lichtarten, sowohl in diesem wie in dem andern Bilde eintritt. Der höchst ausgezeichnete Eindruck, den gleichzeitiges Vorherrschen der äussersten rothen und der äussersten violetten Stralen be-

wirkt, wird dann vorzugsweise an dem ordinären oder an dem extraordinären Bilde wahrgenommen, jenachdem von dem halben Unterschiede der beiden Gränzwerte von  $\frac{\nu d}{w^2}$  der Sinus oder der Cosinus grösser ist. Diese eigenthümliche Färbung des einen Bildes trifft aber immer mit einem Vorherrschen derjenigen in dem andern zusammen, für die  $w^{-2}$  dem Mittel zwischen den Gränzen dieser Grösse gleich ist, und es sind dies namentlich die im Grün gelegenen höchst intensiven Stralen des vollständigen Spectrum. Wenn gleichzeitig der Unterschied der Gränzen von  $\frac{\nu d}{w^2}$  nur  $60^\circ$  und mithin die Dicke der Bergkrystallplatte nur 1 Pariser Linie beträgt, so ist das Helligkeitsverhältniss beider Bilder in Sonnen- oder Sternenlicht grösser als  $\frac{\pi + 3 \cdot \sin 60^\circ}{\pi - 3 \cdot \sin 60^\circ}$ , d. h. als der Zahlwerth 10,561, denn es würde diesem erst gleich werden, wenn die Werthe der  $f$  von den Wellenlängen  $w$ , denen sie zugehören, unabhängig wären. Nach *Fraunhofer's* Messungen tritt in den genannten Lichtarten an die Stelle dieser Unabhängigkeit eine sehr beträchtliche Abnahme des  $f$  von der Mitte gegen beide Enden des Spectrum und dadurch in dem betrachteten Falle ein Verhältniss der Helligkeit beider Bilder, welches den angegebenen Zahlwerth noch bedeutend übertrifft. Es ergibt sich hieraus, dass die Anwendung von Bergkrystallplatten, deren Dicke 1 Pariser Linie nicht übertrifft und namentlich zwischen dieser Gränze und der Hälfte derselben gelegen ist, einen beträchtlichen Vortheil für die beabsichtigte Bestimmung des Positionswinkels der Lichtschwingungen gewähren, indem sie unter Umständen, welche der Erkennung des geschilderten Farbenunterschiedes der Bilder nicht günstig sind, ein Maximum des Helligkeitsverhältnisses mit ihm gleichzeitig erstreben lassen und demnach auch die Reduction des zugehörigen  $p$  auf das  $p'$  oder  $p''$  in doppelter Weise zu bestimmen erlauben.

Ich habe hier zwei Versuche über das Licht des Cometen zu erwähnen, der nach Herrn *Pape's* Elementen sein Perihel 1861 Juni 13, 6066 Berl. m. Zeit erreichte. Sie sind unter sehr ungünstigen Umständen ausgeführt worden, aber dennoch geeignet, die Anwendung des dabei gebrauchten Beobachtungsmittels in ähnlichen Fällen zu empfehlen. 1861 Juli 6 von  $10^h 45^m$  bis  $11^h 0^m$  Berliner mittl. Zeit konnte ich an dem genannten Cometen keine Veränderung der Helligkeit der beiden Bilder wahrnehmen, welche das oben beschriebene Mikrometerfernrohr von *Lenoir* darstellte, während es um seine Axe gedreht wurde. Das Fernrohr musste dabei aus freier Hand gehalten werden.

Juli 13 von  $10^h 30^m$  bis  $10^h 45^m$  Berl. mittl. Zt. wiederholte ich denselben Versuch, nachdem an dem Objective eine Bergkrystallplatte der beschriebenen Art von 0,65 Par.

Lin. Dicke angebracht und das Fernrohr mit einem Stative versehen war. Die Höhe des Cometen von nahe an  $57^\circ$  erschwerte die Beobachtung mit einem ungebrochenen Fernrohr beträchtlich. Ich glaube mich aber dennoch nicht getäuscht zu haben, indem ich wiederholentlich die Helligkeit beider Bilder des Cometen als gleich erkannte, wenn die Richtung des Schweifes rechtwinklich von ihrer Verbindungslinie durchschnitten wurde, und dagegen von den Bildern des Schweifes das ordinäre weit schwächer als das extraordinäre oder umgekehrt, so oft jedes derselben die Verbindungslinie beider Bilder des Kernes unter einem zu  $45^\circ$  geschätzten spitzen

Winkel durchschnitt. Der Kern selbst erschien auch bei diesen Lagen in beiden Bildern gleich hell. Die Färbung der Bilder des Schweifes war nicht deutlich zu unterscheiden. Nach Versuchen mit derselben Bergkrystallplatte, dreht dieselbe die Polarisationssebene der Stralen von mittleren  $n=2$  um sehr nahe an  $45^\circ$ , und verlegt auch um ebenso viel das Maximum des Intensitätsverhältnisses beider Bilder. Man hatte also nach diesen Wahrnehmungen anzunehmen, dass: zu der genannten Zeit, das Licht von dem Schweife des Cometen zu grossem Theil aus Schwingungen, die in der Ebene durch den Stral und durch die Sonne lagen, bestand.

### Aus einem Schreiben des Herrn Directors *Bond* an den Herausgeber.

Enclosed you will find positions of a new planet (73)? discovered at this Observatory, April 7<sup>th</sup>, by Mr. *H. P. Tuttle*. Cloudy weather and bright moonlight which intervened, prevented it from being reobserved after the morning of the discovery, for nearly a fortnight.

It is of the 12<sup>th</sup> magnitude.

Observatory of Harvard College.

Cambridge Mass., America, 1862 May 3.

*G. P. Bond.*

### Observations upon Planet (73)?

	M. T. Cambr.	Planets AR.	Planets Decl.	Obs.
April 7	15 <sup>h</sup> 5 <sup>m</sup> 26 <sup>s</sup>	11 <sup>h</sup> 42 <sup>m</sup> 7 <sup>s</sup> 43	+2° 13' 50'' 3	<i>B.</i>
20	10 17 10	11 34 51,51	+2 48 54,8	<i>S.</i>
23	11 43 26	11 33 38,42	+2 54 4,3	<i>H.</i>
24	10 49 38	11 33 18,65	+2 55 24,1	<i>S.</i>
25	9 1 23	11 33 0,42	+2 56 32,1	<i>H.</i>
26	9 12 9	11 32 42,51	+2 57 41,0	<i>S.</i>
27	9 1 37	11 32 25,65	+2 58 40,2	<i>H.</i>
29	10 6 16	11 31 55,84	+3 0 5,6	<i>H.</i>
30	8 54 37	11 31 44,47	+3 0 36,0	<i>S.</i>

In the column headed „Observer“ the letters *B.*, *S.* and *H.*, stand respectively for *G. P. Bond*, *J. H. Safford* and *A. Hall*.

### Ephemeride der Proserpina für die Opposition am 10. Juni 1862.

Von Herrn Professor *Hoek*, Director der Sternwarte in Utrecht.

War es mir diesmal durch andere Geschäfte schwierig, eine genaue Ephemeride mit Berücksichtigung der Jupiter- und Saturnstörungen zu berechnen, wie ich es für die früheren Oppositionen gethan habe, so will ich es doch nicht unterlassen, den Beobachtern die nöthigen Hülfsmittel zur bequemen Aufsuchung und Beobachtung des Asteroiden zu verschaffen. Ich habe nämlich aus der Jahresephemeride im Berliner Jahrbuch für 1864, Seite 442, eine Ephemeride durch Interpolation für die Zeit der Opposition hergeleitet, und Herr Observator *Kam* in Leyden hatte die Gefälligkeit, den Planeten schon am 18<sup>ten</sup> Mai aufzusuchen und mir die Correction der Ephemeride:

in AR.  $-3^\circ$ , in  $\delta$   $0' 0$ , mitzutheilen.

Diese Correction ist schon in den folgenden Zahlen mit aufgenommen.

Mittl. Zt. Berlin	AR. (26)	$\delta$ (26)	log $\Delta$	Lichtzeit
1862 Mai 25,5	17 <sup>h</sup> 29 <sup>m</sup> 32 <sup>s</sup>	$-26^\circ 15' 3$	0,1628	11 <sup>m</sup> 57 <sup>s</sup> 5
26,5	28 42	16,6	1618	55,7
27,5	27 50	17,8	1608	54,0
28,5	26 58	19,0	1598	52,4
29,5	26 4	20,2	1589	51,0
30,5	25 9	21,4	1581	49,7
31,5	24 13	22,5	1573	48,5
Juni 1,5	23 17	23,5	1567	47,4
2,5	22 20	24,5	1561	46,5
3,5	21 23	25,3	1556	45,7
4,5	20 25	26,1	1552	45,0
5,5	19 27	26,9	1548	44,5