ÜBER DEN HILBERT'SCHEN UNABHÄNGIGKEITSSATZ BEIM LAGRANGE'SCHEN VARIATIONSPROBLEM.

Von **Oskar Bolza** (Freiburg i. B.).

Adunanza del 12 febbrajo 1911.

Die Ausdehnung des HILBERT'schen Unabhängigkeitssatzes auf den Fall des LAGRANGE'schen Problems ist nach verschiedenen, scheinbar nicht unter einander zusammenhängenden Methoden von A. MAYER [1]), von HILBERT [2]), und von mir selbst [3]) untersucht worden. Hierzu ist kürzlich eine Arbeit von HAHN [4]) gekommen, in welcher derselbe einen interessanten Zusammenhang zwischen der Theorie des Unabhängigkeitssatzes und derjenigen der zweiten Variation aufdeckt.

Letztere Arbeit veranlasst mich, nochmals auf dieselbe Frage zurückzukommen, um eine zusammenfassende Darstellung der Theorie des Unabhängigkeitssatzes zu geben, bei welcher ich besonderes Gewicht darauf lege, den inneren Zusammenhang zwischen den verschiedenen bisherigen Resultaten und Methoden nachzuweisen.

Zunächst werden rein analytisch, unter Beiseitelassung aller nicht unmittelbar im Problem selbst liegenden Elemente, die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Gültigkeit des Unabhängigkeitssatzes im Fall des LAGRANGE'schen Problems aufgestellt. Den Ausgangspunkt bilden dabei die partiellen Differentialgleichungen für die Gefällfunctionen p_i und die Multiplicatorfunctionen μ_β eines Extremalenfeldes (§ 1), die

[1]) A. MAYER, *Über den* HILBERT*schen Unabhängigkeitssatz in der Theorie des Maximums und Minimums der einfachen Integrale* [Berichte über die Verhandlungen der Kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-physische Klasse, Bd. LV (1903), S. 131-145; Bd. LVII (1905), S. 49-67, 313-314].

[2]) HILBERT, *Zur Variationsrechnung* [Nachrichten von der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1905, S. 159-180; Mathematische Annalen, Bd. LXII (1906), S. 351-370].

[3]) BOLZA, WEIERSTRASS' *theorem and* KNESER'*s theorem on transversals for the most general case of an extremum of a simple definite integral* [Transactions of the American Mathematical Society, Bd. VII (1906), S. 459-488] und *Vorlesungen über Variationsrechnung* (Leipzig, Teubner, 1909), § 78. Letztere werde ich im folgenden einfach als *Vorlesungen* citieren und durchweg die dort gebrauchte Bezeichnung benutzen.

[4]) HAHN, *Über den Zusammenhang zwischen den Theorien der zweiten Variation und der* WEIERSTRASS'*schen Theorie der Variationsrechnung* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. XXIX (1. Semester 1910), S. 49-78].

in einer Form gegeben werden, aus welcher man unmittelbar ablesen kann, dass von den $\frac{n(n+1)}{2}$ Integrabilitätsbedingungen für den mit den Gefällfunctionen und Multiplicatorfunctionen gebildeten verallgemeinerten HILBERT'schen Differentialausdruck

$$\{f(x, y, p) - \sum_i p_i F_{n+i}(x, y, p, \mu)\} dx + \sum_i F_{n+i}(x, y, p, \mu) dy_i$$

diejenigen n Bedingungen, welche sich auf die Variable x beziehen, eine Folge der $\frac{n(n-1)}{2}$ übrigen Bedingungen sind. Diese letzteren lassen sich dann weiter dadurch reducieren, dass gezeigt wird, dass sie im ganzen Felde gelten, sobald sie für einen speciellen Wert $x = a^0$ erfüllt sind. Von hier aus gelangt man dann leicht zu den verschiedenen Resultaten von A. MAYER und HAHN, zum Teil auch zu denen von HILBERT (§ 2).

Sodann wird dieselbe Aufgabe noch nach einer zweiten Methode gelöst (§ 3), wobei die Formeln für die partiellen Ableitungen des Feldintegrals, genommen von einer das Feld schneidenden Hyperfläche den Ausgangspunkt bilden. Diese Methode liefert eine mehr geometrische Formulierung der Sätze und führt in einfacher Weise einerseits zu dem Hauptsatz von HILBERT, andererseits zu den Sätzen über Transversalhyperflächen eines Extremalenfeldes (§ 4).

§ 1.

Die partiellen Differentialgleichungen für die Gefäll- und Multiplicatorfunctionen eines Extremalenfeldes.

Es handelt sich um das Problem, das Integral

$$(1) \qquad J = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') dx, \qquad \left(y_i' = \frac{dy_i}{dx}\right)$$

zu einem Extremum zu machen mit den $m < n$ Nebenbedingungen [5])

$$(2) \qquad \varphi_\beta(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0, \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, m).$$

Wir setzen

$$F = f + \sum_{\beta=1}^{m} \lambda_\beta \varphi_\beta$$

mit unbestimmten Functionen λ_β von x und erhalten dann die Differentialgleichungen des Problems in der bekannten Form

$$(3) \qquad F_k - \frac{d}{dx} F_{n+k} = 0, \qquad \varphi_\beta = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n;\ \beta = 1, 2, \ldots, m)\ ^{6)},$$

[5]) Von den Functionen f und φ_β wird vorausgesetzt, dass sie in dem in Betracht kommenden Bereich von der Klasse C^{IV} sind (in der Terminologie meiner *Vorlesungen*, p. 13).

[6]) Wir werden in der Folge diese Angabe über die Indices weglassen, indem wir verabreden, dass die Indices h, i, j, k stets die Werte $1, 2, \ldots, n$ durchlaufen, der Index β die Werte $1, 2, \ldots, m$.

wobei

$$F_k = \frac{\partial F}{\partial y_k}, \qquad F_{n+k} = \frac{\partial F}{\partial y'_k}.$$

Es sei jetzt [7])

(4) $$y_i = Y_i(x, b_1, b_2, \ldots, b_n), \qquad \lambda_\beta = \Lambda_\beta(x, b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

eine n-parametrige Schar von Lösungen der Differentialgleichungen (3). Die Extremalenschar

(5) $$y_i = Y_i(x, b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

möge ein Feld $\mathfrak{S}$ im $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$-Raum liefern, falls die Variabeln $x, b_1, b_2, \ldots, b_n$ auf einen gewissen Bereich $\mathfrak{A}$ beschränkt werden, den wir der grösseren Präcision wegen als cylindrisch voraussetzen, d. h. definiert durch die Bedingungen

$$\mathfrak{A}: (b_1, b_2, \ldots, b_n) \text{ in } \mathfrak{B};\; g(b_1, b_2, \ldots, b_n) \overline{\gtrless} x \overline{\gtrless} G(b_1, b_2, \ldots, b_n),$$

wo $\mathfrak{B}$ ein einfachzusammenhängendes [8]) Continuum im Gebiet der Variabeln $b_1, b_2, \ldots, b_n$ bezeichnet und g und G zwei Functionen von $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sind, welche in $\mathfrak{B}$ stetig sind und der Ungleichung

(6) $$g(b_1, b_2, \ldots, b_n) < G(b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

genügen.

Die inversen Functionen [9]) des Feldes seien

(7) $$b_i = \mathfrak{b}_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

sodass also in $\mathfrak{S}$, resp. in $\mathfrak{A}$

(8) $$Y_i(x, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_n) = y_i, \qquad \mathfrak{b}_i(x, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) = b_i.$$

Die Gefällfunctionen des Feldes seien

(9) $$p_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = Y'_i(x, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_n),$$

die Multiplicatorfunctionen des Feldes

(10) $$\mu_\beta(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = \Lambda_\beta(x, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_n).$$

Die Functionen p_i und μ_β genügen dann einem System von partiellen Differentialgleichungen, die wir folgendermassen erhalten: Wir führen in den Differentialgleichungen (3) die Differentiation nach x aus, setzen dann für y_i, λ_β die Lösungen Y_i, Λ_β ein und erhalten so $n + m$ in $x, b_1, b_2, \ldots, b_n$ identische Gleichungen, welche daher ihre Gültigkeit behalten, wenn wir darin die b_i durch die $\mathfrak{b}_i$ ersetzen. Die Substitution von $\mathfrak{b}_i$ für b_i deuten wir durch die Klammer ( ) an. Es ist dann nach dem obigen

$$(Y_i) = y_i, \qquad (Y'_i) = p_i, \qquad (\Lambda_\beta) = \mu_\beta,$$

---

7) Die Functionen Y_i, Y'_i, Λ_β sollen im Bereich $\mathfrak{A}$ von der Klasse C'' sein; Accente sollen stets Ableitung nach x bedeuten.

8) Vgl. HEFFTER, *Ueber Curvenintegrale im m-dimensionalen Raum* [Transactions of the American Mathematical Society, Bd. IV (1903), S. 142-148], S. 147.

9) Vgl. *Vorlesungen*, loc. cit. [3]), S. 635, 639.

sodass die Argumente der Ableitungen der Functionen F und φ_β werden

$$x,\ y_1,\ldots,y_n,\ p_1,\ldots,p_n,\ \mu_1,\ldots,\mu_m \quad \text{resp.} \quad x,\ y_1,\ldots,y_n,\ p_1,\ldots,p_n$$

oder, wie wir in der Folge kürzer schreiben werden,

$$x,\ y,\ p,\ \mu \qquad \text{resp.} \qquad x,\ y,\ p.$$

Es sind dann noch die Functionen (Y_i'') und (Λ_β') durch die Functionen p_i, μ_β auszudrücken; nach (9) und (8) ist

$$(11)\qquad \begin{cases} Y_i'(x, b_1, \ldots, b_n) = p_i(x, Y_1, \ldots, Y_n), \\ \Lambda_\beta(x, b_1, \ldots, b_n) = \mu_\beta(x, Y_1, \ldots, Y_n). \end{cases}$$

Wir differentiieren diese Gleichungen nach x und ersetzen dann b_i durch $\mathfrak{b}_i$, so kommt

$$(Y_j'') = \frac{\partial p_j}{\partial x} + \sum_i \frac{\partial p_j}{\partial y_i} p_i,$$

$$(\Lambda_\beta') = \frac{\partial \mu_\beta}{\partial x} + \sum_i \frac{\partial \mu_\beta}{\partial y_i} p_i.$$

Durch Einsetzen dieser Werte erhalten wir als Resultat des angegebenen Processes die folgenden partiellen Differentialgleichungen [10]) für die Functionen p_i, μ_β:

$$(12)\qquad \begin{cases} [F_{n+k,0}] + \sum\limits_i [F_{n+k,i}]p_i + \sum\limits_j [F_{n+k,n+j}]\left(\dfrac{\partial p_j}{\partial x} + \sum\limits_i \dfrac{\partial p_j}{\partial y_i} p_i\right) \\ \qquad + \sum\limits_\beta \left[\dfrac{\partial \varphi_\beta}{\partial y_k'}\right]\left(\dfrac{\partial \mu_\beta}{\partial x} + \sum\limits_i \dfrac{\partial \mu_\beta}{\partial y_i} p_i\right) - [F_k] = 0, \\ \qquad [\varphi_\beta] = 0. \end{cases}$$

Darin bedeuten

$$F_{n+k,0} = \frac{\partial^2 F}{\partial y_k' \partial x}, \qquad F_{n+k,i} = \frac{\partial^2 F}{\partial y_k' \partial y_i}, \qquad F_{n+k,n+j} = \frac{\partial^2 F}{\partial y_k' \partial y_j'},$$

und die Klammer [ ] soll andeuten, dass in den partiellen Ableitungen von F und φ_β die Argumente x, y, y', λ durch x, y, p, μ zu ersetzen sind. Addiert und subtrahiert man jetzt auf der linken Seite von (12) den Ausdruck

$$\sum_i p_i \left\{[F_{n+i,k}] + \sum_j [F_{n+i,n+j}] \frac{\partial p_j}{\partial y_k} + \sum_\beta \left[\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial y_i'}\right] \frac{\partial \mu_\beta}{\partial y_k}\right\},$$

so erhält man das folgende Resultat:

Satz I. — *Die Gefällfunctionen p_i und Multiplicatorfunctionen μ_β eines jeden Extremalenfeldes genügen den $n+m$ partiellen Differentialgleichungen, resp. Gleichungen*

$$(13)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}[F_{n+k}] - \dfrac{\partial}{\partial y_k}\{[F] - \sum\limits_i p_i [F_{n+i}]\} + \sum\limits_i p_i \left\{\dfrac{\partial}{\partial y_i}[F_{n+k}] - \dfrac{\partial}{\partial y_k}[F_{n+i}]\right\} = 0 \\ \qquad [\varphi_\beta] = 0. \end{cases}$$

---

[10]) In dieser Form schon bei A. Mayer, loc. cit. [1]), Bd. LVII (1905), S. 54.

Dies ist die Verallgemeinerung des Satzes von BELTRAMI [11]), wonach im Fall des einfachsten Variationsproblems die Gefällfunction $p(x, y)$ der partiellen Differentialgleichung genügt:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial y'}\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left\{[f] - p\left[\frac{\partial f}{\partial y'}\right]\right\}.$$

§ 2.

Die Bedingungen für die Gültigkeit des Unabhängigkeitssatzes in rein analytischer Formulierung.

Wir wenden uns jetzt zu unserer eigentlichen Aufgabe, der Aufstellung von notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Gültigkeit des HILBERT'schen Unabhängigkeitssatzes für das Feld $\mathfrak{S}$; das soll heissen: wir wollen untersuchen, unter welchen Bedingungen der mit den eben definierten Functionen p_i, μ_β gebildete Differentialausdruck

$$(14) \qquad \{f(x, y, p) - \sum_i p_i F_{n+i}(x, y, p, \mu)\} dx + \sum_i F_{n+i}(x, y, p, \mu) dy_i$$

in $\mathfrak{S}$ ein vollständiges Differential ist, wobei wir wegen $[\varphi_\beta] = 0$ auch $F(x, y, p, \mu)$ statt $f(x, y, p)$ schreiben dürfen.

Aus der allgemeinen Theorie der Integrabilitätsbedingungen können wir die fraglichen Bedingungen zunächst in der Form hinschreiben [12])

$$\frac{\partial}{\partial x}[F_{n+k}] = \frac{\partial}{\partial y_k}\{[F] - \sum_i p_i [F_{n+i}]\},$$

$$\frac{\partial}{\partial y_h}[F_{n+k}] = \frac{\partial}{\partial y_k}[F_{n+h}].$$

Aus Satz I lesen wir aber sofort ab, dass die n ersten dieser Gleichungen eine Folge der übrigen $\frac{n(n-1)}{2}$ sind.

Für die Gültigkeit des HILBERT'*schen Unabhängigkeitssatzes ist also notwendig und hinreichend, dass die Gefällfunctionen p_i und die Multiplicatorfunctionen μ_β im Felde $\mathfrak{S}$ den $\frac{n(n-1)}{2}$ partiellen Differentialgleichungen*

$$(15) \qquad \frac{\partial}{\partial y_h}[F_{n+k}] = \frac{\partial}{\partial y_k}[F_{n+h}]$$

genügen.

Diese Bedingung lässt sich aber noch weiter wesentlich reduzieren. Sei nämlich a^0 ein specieller Wert von x, welcher in $\mathfrak{B}$ der Ungleichung genügt

$$(16) \qquad g(b_1, \ldots, b_n) < a^0 < G(b_1, \ldots, b_n),$$

[11]) Vgl. *Vorlesungen,* loc. cit. [3]), S. 107.

[12]) Vgl. Fussnote [8]).

sodass also der Schnitt der linearen Hyperfläche $x = a^0$ mit der Extremalenschar (5) ganz im Felde $\mathfrak{S}$ liegt; wegen der Voraussetzung (6) gibt es stets solche Werte von a^0, falls wir den Bereich $\mathfrak{B}$ hinreichend einschränken. Dann gilt der Satz, dass *die Gleichungen* (15) *im ganzen Feld erfüllt sind, sobald sie für den Schnitt des Feldes mit der Hyperfläche $x = a^0$ erfüllt sind.*

Um dies zu beweisen, bemerken wir zunächst, dass *die Gleichungen* (15) *äquivalent sind mit den $\frac{n(n-1)}{2}$ Bedingungen*

$$\frac{\partial S_k}{\partial b_h} = \frac{\partial S_h}{\partial b_k}, \tag{17}$$

wo die Function $S_k(x, b_1, \ldots, b_n)$ definiert ist durch die Gleichung

$$S_k(x, b_1, \ldots, b_n) = \sum_i F_{n+i}(x, Y, Y', \Lambda)\frac{\partial Y_i}{\partial b_k}. \tag{18}$$

Denn die Gleichungen (15) sagen aus, dass es eine in $\mathfrak{S}$ eindeutige und stetig differentiierbare Function $\Omega(x, y_1, \ldots, y_n)$ gibt, sodass

$$F_{n+k}(x, y, p, \mu) = \frac{\partial \Omega}{\partial y_k}. \tag{19}$$

Definieren wir jetzt

$$S(x, b_1, \ldots, b_n) = \Omega(x, Y_1, \ldots, Y_n),$$

so folgt aus (19) mit Rücksicht auf (11)

$$\frac{\partial S}{\partial b_k} = S_k. \tag{19$_a$}$$

Die Gleichungen (17) sind also eine Folge von (15); und ebenso leicht zeigt man, dass auch umgekehrt (15) aus (17) folgt, indem man rückwärts von den Variabeln $x, b_1, \ldots, b_n$ durch die Transformation (7) zu den Variabeln $x, y_1, \ldots, y_n$ übergeht.

Nunmehr gilt aber der

Satz II. — *Für jede n-parametrige Extremalenschar sind die $\frac{n(n-1)}{2}$ Differenzen*

$$\frac{\partial S_k}{\partial b_h} - \frac{\partial S_h}{\partial b_k}$$

entlang derselben Extremalen constant, d. h. von x unabhängig.

Denn es ist

$$\frac{\partial S_k}{\partial x} = \sum_i \left(\frac{\partial Y_i}{\partial b_k}\frac{\partial \bar{F}_{n+i}}{\partial x} + \frac{\partial Y'_i}{\partial b_k}\bar{F}_{n+i}\right),$$

wo wir durch Ueberstreichen die Substitution von Y, Y', Λ für y, y', λ andeuten. Nun ist aber nach (3)

$$\frac{\partial \bar{F}_{n+i}}{\partial x} = \bar{F}_i;$$

also erhalten wir, wenn wir noch berücksichtigen, dass $\bar{\varphi}_\beta = 0$,

$$\frac{\partial S_k}{\partial x} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial b_k}.$$

Hieraus folgt aber, dass

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial S_k}{\partial b_h} - \frac{\partial S_h}{\partial b_k}\right) = 0$$

womit Satz II bewiesen ist.

Aus Satz II folgt aber wegen der Aequivalenz der Gleichungen (15) und (17) unmittelbar die oben ausgesprochene Behauptung, und wir haben damit den folgenden Fundamentalsatz gewonnen:

SATZ III. — *Für die Gültigkeit des* HILBERT'*schen Unabhängigkeitssatzes im Felde* $\mathfrak{S}$ *ist notwendig und hinreichend, dass die* $\frac{n(n-1)}{2}$ *Gleichungen*

$$\frac{\partial F_{n+k}(a^0, y, p(a^0, y), \mu(a^0, y))}{d y_h} = \frac{\partial F_{n+h}(a^0, y, p(a^0, y), \mu(a^0, y))}{d y_k} \tag{20}$$

im Schnitt des Feldes mit der Hyperfläche $x = a^0$ *erfüllt sind, was damit gleichbedeutend ist, dass* [13])

$$\frac{\partial S_k(a^0, b_1, \ldots, b_n)}{\partial b_h} = \frac{\partial S_h(a^0, b_1, \ldots, b_n)}{\partial b_k} \quad \textit{in } \mathfrak{B}. \tag{21}$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so nennen wir die Extremalenschar (5) eine MAYER'*sche Extremalenschar,* das Feld $\mathfrak{S}$ ein MAYER'*sches Feld.*

Von hier aus können wir nun mit Leichtigkeit zu den verschiedenen Formen der Bedingung für die Gültigkeit des Unabhängigkeitssatzes übergehen, wie sie von HILBERT, A. MAYER, und HAHN angegeben worden sind.

Zunächst lässt sich Satz III auch folgendermassen aussprechen:

Wenn das HILBERT'*sche Linienintegral* J^*, *d. h. das Integral des Differentialausdrucks* (14), *vom Weg unabhängig ist für alle ganz auf der Hyperfläche* $x = a^0$, *und gleichzeitig im Felde* $\mathfrak{S}$ *gelegenen Curven, so findet dies auch statt für* ALLE *Curven, die ganz im Felde gelegen sind.*

Dies ist ein specieller Fall eines allgemeineren Satzes von HILBERT, mit dem wir uns in § 3 noch näher beschäftigen werden [14]).

Führt man ferner die Differentiation von S_k und S_h nach b_h und b_k aus, so erhält man, wie HAHN bemerkt hat,

$$\frac{\partial S_k}{\partial b_h} - \frac{\partial S_h}{\partial b_k} = \sum_{i,j}\left\{\bar{F}_{n+i,j}\left(\frac{\partial Y_i}{\partial b_k}\frac{\partial Y_j}{\partial b_h} - \frac{\partial Y_i}{\partial b_h}\frac{\partial Y_j}{\partial b_k}\right) + \bar{F}_{n+i,n+j}\left(\frac{\partial Y_i}{\partial b_k}\frac{\partial Y_j'}{\partial b_h} - \frac{\partial Y_i}{\partial b_h}\frac{\partial Y_j'}{\partial b_k}\right)\right\}$$
$$+ \sum_{i,\beta}\frac{\overline{\partial \varphi_\beta}}{\partial y_i'}\left(\frac{\partial Y_i}{\partial b_k}\frac{\partial \Lambda_\beta}{\partial b_h} - \frac{\partial Y_i}{\partial b_h}\frac{\partial \Lambda_\beta}{\partial b_k}\right),$$

oder in der Bezeichnung von v. ESCHERICH [15]):

$$\frac{\partial S_k}{\partial b_h} - \frac{\partial S_h}{\partial b_k} = \psi\left(\frac{\partial Y}{\partial b_k}, \frac{\partial \Lambda}{\partial b_k}; \frac{\partial Y}{\partial b_h}, \frac{\partial \Lambda}{\partial b_h}\right). \tag{22}$$

---

[13]) Die Formeln (21) leitet HAHN, loc. cit. [4]), S. 55 auf geometrischem Wege mittels seines Satzes über Extremalenröhren ab, siehe unten, § 3 Ende.

[14]) Siehe unten, Satz VI_a.

[15]) Vgl. *Vorlesungen,* loc. cit. [3]), S. 626.

Hieraus folgt, dass *Satz II identisch ist mit dem Satz von* CLEBSCH *aus der Theorie der zweiten Variation, wonach*

$$\psi\left(\frac{\partial Y}{\partial b_k}, \frac{\partial \Lambda}{\partial b_k}; \quad \frac{\partial Y}{\partial b_h}, \frac{\partial \Lambda}{\partial b_h}\right) = \text{const.} \tag{23}$$

Dies ist der bereits im Eingang erwähnte, zuerst von HAHN entdeckte Zusammenhang zwischen der Theorie der Extremalenfelder und der Theorie der zweiten Variation.

Daher lassen sich nun die Gleichungen (21) auch schreiben

$$\psi\left(\frac{\partial Y}{\partial b_k}, \frac{\partial \Lambda}{\partial b_k}; \quad \frac{\partial Y}{\partial b_h}, \frac{\partial \Lambda}{\partial b_h}\right)\Bigg|^{x=a^0} = 0, \tag{24}$$

und in dieser Form drücken sie den folgenden Satz von HAHN [16]) aus:

SATZ IV. — *Für die Gültigkeit des Unabhängigkeitssatzes in Felde* $\mathfrak{S}$ *ist notwendig und hinreichend, dass die* n *aus der Schar* (4) *durch Differentiation nach den Parametern abgeleitete Functionensysteme*

$$\frac{\partial Y_1}{\partial b_k}, \frac{\partial Y_2}{\partial b_k}, \ldots, \frac{\partial Y_n}{\partial b_k}; \quad \frac{\partial \Lambda_1}{\partial b_k}, \frac{\partial \Lambda_2}{\partial b_k}, \ldots, \frac{\partial \Lambda_n}{\partial b_k}, \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

in der Terminologie von v. ESCHERICH *ein conjugiertes System* [17]) *von Lösungen des zur Extremalen* $b_1, b_2, \ldots, b_n$ *gehörigen accessorischen Systems linearer Differentialgleichungen bilden.*

Endlich ergibt sich aus Satz III auch unmittelbar die zuerst von A. MAYER gegebene Form für die Gültigkeit des Unabhängigkeitssatzes. Bezeichnet nämlich

$$y_i = \mathfrak{Y}_i(x;\, a^0, b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_n), \qquad \lambda_\beta = \mathfrak{L}_\beta(x;\, a^0, b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_n)$$

das «canonische» System [18]) von Lösungen der Differentialgleichungen (3), welches durch die Anfangsbedingungen

$$\left\{\begin{aligned} &\mathfrak{Y}_i(a^0;\, a^0, b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_n) = b_i, \\ &\quad F_{n+i}(x, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}', \mathfrak{L})\big|^{x=a^0} = c_i \end{aligned}\right. \tag{25}$$

characterisiert ist, so lässt sich jede ein Feld liefernde n-parametrige Schar von Lösungen der Differentialgleichungen (3) durch eine Transformation der Parameter auf die Form bringen [19]):

$$\left\{\begin{aligned} y_i &= \mathfrak{Y}_i(x;\, a^0, b_1, \ldots, b_n, C_1, \ldots, C_n), \\ \lambda_\beta &= \mathfrak{L}_\beta(x;\, a^0, b_1, \ldots, b_n, C_1, \ldots, C_n), \end{aligned}\right. \tag{26}$$

wo die Grössen $C_1, C_2, \ldots, C_n$ Functionen von $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sind.

Nehmen wir an, dass unsere Schar (4) gerade in dieser Normalform gegeben

[16]) Loc. cit. [4]), S. 58.

[17]) Vgl. *Vorlesungen*, loc. cit. [3]), S. 626.

[18]) Vgl. *Vorlesungen*, loc. cit. [3]), S. 594.

[19]) Vgl. *Vorlesungen*, loc. cit. [3]), S. 641, Fussnote.

ist, sodass also:

$$Y_i(x, b_1, \ldots, b_n) \equiv \mathfrak{Y}_i(x; a^0, b_1, \ldots, b_n, C_1, \ldots, C_n)$$
$$\Lambda_\beta(x, b_1, \ldots, b_n) \equiv \mathfrak{L}_\beta(x; a^0, b_1, \ldots, b_n, C_1, \ldots, C_n),$$

so folgt aus (25)

$$\frac{\partial Y_i}{\partial b_k}\Big|^{x=a^0} = \begin{cases} 1, \text{ wenn } i = k, \\ 0, \text{ wenn } i \neq k, \end{cases}$$

und

$$F_{n+i}(x, Y, Y', \Lambda)|^{x=a^0} = C_k.$$

Es wird also

$$S_k(a^0, b_1, \ldots, b_n) = C_k(b_1, \ldots, b_n),$$

und daher ergeben die Gleichungen (21) den Satz von MAYER [20]):

SATZ V. — *Schreibt man die n-parametrige, das Feld liefernde Extremalenschar in der Normalform*

$$y_i = \mathfrak{Y}_i(x; a^0, b_1, \ldots, b_n, C_1, \ldots, C_n),$$

so ist notwendig und hinreichend für die Gültigkeit des Unabhängigkeitssatzes, dass die Functionen $C_1, C_2, \ldots, C_n$ *die partiellen Ableitungen ein und derselben Function von* $b_1, b_2, \ldots, b_n$ *sind:*

$$C_k = \frac{\partial B(b_1, \ldots, b_n)}{\partial b_k}. \tag{27}$$

§ 3.

Die Bedingungen für die Gültigkeit des Unabhängigkeitssatzes in geometrischer Formulierung.

Es soll nunmehr der Hauptsatz III noch auf einem andern Weg abgeleitet werden, nämlich mittels der Methode, die ich in § 78 meiner « Vorlesungen » zum Beweis des MAYER'schen Satzes V benutzt habe. Dabei wird sich dann auch am einfachsten der Zusammenhang mit den mehr geometrischen Methoden von HILBERT ergeben.

Zu diesem Zweck ziehen wir quer durch das Feld $\mathfrak{S}$ eine Hyperfläche $\mathfrak{K}$, welche abgesehen von Stetigkeitsbedingungen nur der einen Bedingung unterworfen ist, dass sie jede Extremale des Feldes in einem und nur in einem Punkt schneiden soll. Eine solche Hyperfläche lässt sich darstellen in der Form

$$\mathfrak{K}: x = \xi(b_1, \ldots, b_n), \qquad y_i = Y_i(\xi, b_1, \ldots, b_n) \equiv \eta_i(b_1, \ldots, b_n), \tag{28}$$

wenn $\xi(b_1, \ldots, b_n)$ die Abscisse des Schnittpunktes der Hyperfläche $\mathfrak{K}$ mit der Extremalen [21]) $\mathfrak{E}_b$ der Schar (5) ist. Dabei möge $\xi(b_1, \ldots, b_n)$ eine im Bereich $\mathfrak{B}$ stetig differentiierbare Function von $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sein, welche in $\mathfrak{B}$ der Ungleichung

$$g(b_1, \ldots, b_n) < \xi(b_1, \ldots, b_n) < G(b_1, \ldots, b_n)$$

[20]) Loc. cit. [1]), Bd. LVII (1905), S. 56, 60. Vgl. auch *Vorlesungen*, loc. cit. [3]), S. 643.

[21]) d. h. derjenigen Extremalen, deren Parameter $b_1, \ldots, b_n$ sind.

genügt. Wir betrachten dann das Integral J, genommen entlang der Extremalen $\mathfrak{E}_b$ von deren Schnittpunkt mit der Hyperfläche $\mathfrak{K}$ bis zu dem Punkt P mit der Abscisse x, d. h. also das Integral

$$U(x, b_1, \ldots, b_n) = \int_{\xi(b_1, \ldots, b_n)}^{x} f(x, Y, Y')\,dx,$$

das wir wegen $\varphi_\beta(x, Y, Y') = 0$ auch schreiben können

$$U(x, b_1, \ldots, b_n) = \int_{\xi(b_1, \ldots, b_n)}^{x} F(x, Y, Y', \Lambda)\,dx.$$

Dasselbe Integral als Function der Coordinaten $x, y_1, \ldots, y_n$ des Punktes P bezeichnen wir mit $W(x, y_1, \ldots, y_n)$, sodass also

$$W(x, y_1, \ldots, y_n) = U(x, \mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n).$$

Die Hyperfläche $\mathfrak{K}$ nennen wir die « Ausgangshyperfläche » für das « Feldintegral » W.

Man erhält dann in bekannter Weise, indem man von der LAGRANGE'schen partiellen Integration und von den von den Functionen Y_i, Λ_β befriedigten Differentialgleichungen (3) Gebrauch macht, für die partiellen Ableitungen von U die Werte

$$(29)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = f(x, Y, Y') \equiv F(x, Y, Y', \Lambda), \\[2mm] \dfrac{\partial U}{\partial b_k} = \sum\limits_i F_{n+i}(x, Y, Y', \Lambda)\dfrac{\partial Y_i}{\partial b_k} - T_k, \end{cases}$$

wo T_k die durch

$$(30)\qquad T_k = f(x, Y, Y')\Big|^{\xi}\frac{\partial \xi}{\partial b_k} + \sum_i F_{n+i}(x, Y, Y', \Lambda)\frac{\partial Y_i}{\partial b_k}\Big|^{\xi}$$

definierte Function von $b_1, b_2, \ldots, b_n$ bedeutet, die sich wegen

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial b_k} = Y'_i\Big|^{\xi}\frac{\partial \xi}{\partial b_k} + \frac{\partial Y_i}{\partial b_k}\Big|^{\xi}$$

auch schreiben lässt

$$(31)\quad T_k = \{f(x, Y, Y') - \sum_i Y'_i F_{n+i}(x, Y, Y', \Lambda)\}\Big|^{\xi}\frac{\partial \xi}{\partial b_k} + \sum_i F_{n+i}(x, Y, Y', \Lambda)\Big|^{\xi}\frac{\partial \eta_i}{\partial b_k}.$$

Wir werden die n Functionen $T_1, T_2, \ldots, T_n$ die n *Transversalitätsausdrücke* für die Hyperfläche $\mathfrak{K}$ nennen, da ihr gleichzeitiges Verschwinden ausdrückt, dass die Hyperfläche $\mathfrak{K}$ die Extremalenschar (5) transversal [22]) schneidet. Indem man durch die Transformation (7) von den Variabeln $x, b_1, \ldots, b_n$ zu den Variabeln $x, y_1, \ldots, y_n$ übergeht, erhält man aus (29) für die partiellen Ableitungen der Function W die Ausdrücke

$$(32)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial x} = f(x, y, p) - \sum\limits_i p_i F_{n+i}(x, y, p, \mu) - \sum\limits_i (T_i)\dfrac{\partial \mathfrak{b}_i}{\partial x}, \\[2mm] \dfrac{\partial W}{\partial y_k} = F_{n+k}(x, y, p, \mu) - \sum\limits_i (T_i)\dfrac{\partial \mathfrak{b}_i}{\partial y_k}, \end{cases}$$

wo die Klammer ( ) dieselbe Bedeutung hat wie in § 2.

---

[22]) Vgl. *Vorlesungen,* loc. cit. [3]), S. 648.

Hieraus folgt: Soll der Differentialausdruck (14) ein vollständiges Differential sein, so ist notwendig und hinreichend, dass auch der Ausdruck

$$\sum_i (T_i)\left\{\frac{\partial \mathfrak{b}_i}{\partial x} dx + \sum_k \frac{\partial \mathfrak{b}_i}{\partial y_k} dy_k\right\}$$

ein vollständiges Differential ist. Das ist aber, indem man mittels der Transformation (5) zu den Variabeln $x, b_1, \ldots, b_n$ zurückkehrt, gleichbedeutend damit, dass der Ausdruck mit den unabhängigen Variabeln $b_1, \ldots, b_n$

$$\sum_i T_i \, d b_i$$

seinerseits ein vollständiges Differential ist. Wir erhalten also den:

SATZ VI. — *Für die Gültigkeit des Unabhängigkeitssatzes ist notwendig, dass für* JEDE *Hyperfläche* $\mathfrak{K}$, *welche jede Extremale des Feldes in einem Punkte schneidet, die n Transversalitätsausdrücke*

$$T_k = \{f(x, Y, Y') - \sum_i Y'_i F_{n+i}(x, Y, Y', \Lambda)\}|^{\xi} \frac{\partial \xi}{\partial b_k} + \sum_i F_{n+i}(x, Y, Y', \Lambda)|^{\xi} \frac{\partial \eta_i}{\partial b_k}$$

die partiellen Ableitungen nach den b_k *ein und derselben Function* $T(b_1, \ldots, b_n)$ *sind:*

$$T_k = \frac{\partial T}{\partial b_k}, \tag{33}$$

während es umgekehrt schon hinreichend ist, wenn diese Bedingung für eine EINZIGE *Hyperfläche von den angegebenen Eigenschaften erfüllt ist.*

Ehe wir weitere Folgerungen aus diesem Satze ziehen, wollen wir noch zeigen, wie derselbe auch direct aus Satz III abgeleitet werden kann. Hat a^0 dieselbe Bedeutung wie in § 2, und definiert man

$$U_0(x, b_1, \ldots, b_n) = \int_{a^0}^{x} f(x, Y, Y')\, dx \equiv \int_{a^0}^{x} F(x, Y, Y', \Lambda)\, dx,$$

so ergibt eine einfache Rechnung

$$T_k(b_1, \ldots, b_n) = \frac{\partial U_0(\xi, b_1, \ldots, b_n)}{\partial b_k} + S_k(a^0, b_1, \ldots, b_n). \tag{34}$$

Dies zeigt, dass Satz VI mit den Gleichungen (21) äquivalent ist. Man kann daher auch den Satz III unabhängig von den Entwicklungen von §§ 1 und 2 aus Satz VI mittels der Formel (34) ableiten.

Satz VI hat nun eine einfache geometrische Bedeutung. Nimmt man nämlich das HILBERT'sche Linienintegral J^*, d. h. das Integral des Differentialausdrucks (14), entlang einer ganz auf der Hyperfläche $\mathfrak{K}$ gelegenen Curve $\mathfrak{C}$, so erhält man

$$J^*_{\mathfrak{C}} = \int \sum_k T_k \, d b_k,$$

wenn man beachtet, dass wegen (28) und (11)

$$p_i(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n) = Y'_i(\xi, b_1, \ldots, b_n),$$
$$\mu_\beta(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n) = \Lambda_\beta(\xi, b_1, \ldots, b_n).$$

Wir können den Satz VI also auch in der folgenden, von HILBERT [23]) herrührenden Form aussprechen:

SATZ VI_a. — *Das* HILBERT'*sche Integral* J^* *ist vom Wege unabhängig für jede ganz im Felde gelegene Curve, sobald dies für jede ganz auf der Hyperfläche* $\mathfrak{K}$ *und zugleich ganz im Felde gelegene Curve der Fall ist.*

Diese auf den ersten Blick überraschende Tatsache findet ihre (geometrische) Erklärung in dem HILBERT'schen Satz über Extremalenflächen. Um denselben zu formulieren, greifen wir aus der n-parametrigen Extremalenschar (5), von der wir es dahingestellt sein lassen, ob sie eine MAYER'sche Schar ist oder nicht, eine beliebige ein-parametrige Schar (ein « Extremalenbüschel ») heraus, indem wir setzen

$$b_i = B_i(c). \tag{35}$$

Dabei sollen die Functionen $B_i(c)$ stetig differentiierbar sein in dem Intervall

$$c_0 \leqq c \leqq c_1, \tag{36}$$

und überdies soll die durch die Gleichungen (35) mit der Ungleichung (36) definierte Curve im Gebiet der Grössen $b_1, \ldots, b_n$ ganz im Bereich $\mathfrak{B}$ liegen.

Alsdann stellen die Gleichungen

$$y_i = Y_i(x, B_1, \ldots, B_n) \equiv \mathfrak{y}_i(x, c), \tag{37}$$

verbunden mit den Ungleichungen

$$c_0 \leqq c \leqq c_1, \qquad g(B_1, \ldots, B_n) \leqq x \leqq G(B_1, \ldots, B_n) \tag{38}$$

ein Büschel von Extremalenbogen dar, welche sämtlich dem Felde $\mathfrak{S}$ angehören, oder, anders aufgefasst, eine aus Extremalenbogen gebildete Fläche, die wir eine *Extremalenfläche* nennen und mit $\mathfrak{F}$ bezeichnen.

Jeder stetigen geschlossenen Curve im Bereich (38) der x, c-Ebene entspricht dann auf der Fläche $\mathfrak{F}$ ebenfalls eine stetige geschlossene Curve, die wir eine geschlossene Curve « erster Art » nennen. Daneben kann es dann auf $\mathfrak{F}$ möglicherweise auch noch geschlossene Curven « zweiter Art » geben, d. h. solche, deren Originale in der x, c-Ebene nicht geschlossen sind.

Hiernach können wir nun den HILBERT'*schen Satz* [24]) *über Extremalenflächen* folgendermassen aussprechen:

SATZ VII. — *Das* HILBERT'*sche Linienintegral* J^*, *genommen über irgend eine gewöhnliche* [25]) *geschlossene Curve erster Art auf einer einem beliebigen Extremalenfeld angehörigen Extremalenfläche, hat stets den Wert Null.*

Für diesen Satz ergibt sich aus unsern Formeln (32) ein einfacher Beweis. Ist nämlich

$$\mathfrak{C}_0: \qquad x = \bar{x}(t), \qquad c = \bar{c}(t), \qquad t_0 \leqq t_1$$

[23]) Loc. cit. [2]).

[24]) HILBERT, loc. cit. [2]); einen zweiten Beweis gibt HAHN, loc. cit. [4]), S. 53.

[25]) Nach der Definition auf S. 192 meiner *Vorlesungen*, loc. cit. [3]).

irgend eine gewöhnliche geschlossene Curve im Bereich (38) der x, c-Ebene, sodass also

$$\bar{x}(t_0) = \bar{x}(t_1), \qquad \bar{c}(t_0) = \bar{c}(t_1), \tag{39}$$

so ist das Bild $\mathfrak{C}$ derselben auf der Fläche $\mathfrak{F}$ gegeben durch die Gleichungen

$$\mathfrak{C}: \quad x = \bar{x}(t), \qquad y_i = \mathfrak{y}_i(\bar{x}, \bar{c}) \equiv \bar{y}_i(t),$$

$$t_0 \leqq t \leqq t_1.$$

Da die Curve $\mathfrak{C}$ geschlossen ist, so folgt nach den Gleichungen (32), die für ein beliebiges Feld gelten, gleichgültig, ob dasselbe ein MAYER'sches ist oder nicht, dass das Integral J^*, genommen entlang $\mathfrak{C}$, den Wert hat

$$J^*_{\mathfrak{C}} = \int_{t_0}^{t_1} \sum_i (T_i) \left\{ \frac{\partial \mathfrak{b}_i}{\partial x} dx + \sum_k \frac{\partial \mathfrak{b}_i}{\partial y_k} dy_k \right\} \Bigg|_{y_i = \bar{y}_i}^{x = \bar{x}}.$$

Nun ist aber nach der Definition der Functionen $\bar{y}_i$ und $\mathfrak{y}_i(x, c)$ wegen (8)

$$\mathfrak{b}_i(\bar{x}, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n) = B_i(\bar{c}),$$

weshalb sich der Ausdruck für das Integral auf

$$J^*_{\mathfrak{C}} = \int_{t_0}^{t_1} \sum_i T_i(B_1(\bar{c}), \ldots, B_n(\bar{c}))\, B'_i(\bar{c}) \frac{d\bar{c}}{dt} dt$$

reduciert. Bezeichnen wir daher mit $\Phi(c)$ ein unbestimmtes Integral der Function

$$\sum_i T_i(B_1(c), \ldots, B_n(c))\, B'_i(c),$$

so folgt

$$J^*_{\mathfrak{C}} = [\Phi(\bar{c})]_{t_0}^{t_1}$$

und dies ist wegen (39) gleich Null, womit der Satz bewiesen ist.

Mit Hilfe dieses Satzes lässt sich nun nach HILBERT Satz VI$_a$ folgendermassen beweisen: Sei A ein Punkt der Hyperfläche $\mathfrak{K}$, B irgend ein Punkt des Feldes, $\mathfrak{L}$ eine gewöhnliche, ganz im Feld gelegene Curve, welche von A nach B führt. Durch jeden Punkt P von $\mathfrak{L}$ geht eine Feldextremale; dieselbe schneidet die Hyperfläche $\mathfrak{K}$ in einem Punkt Q. Beschreibt P die Curve $\mathfrak{L}$, so erzeugt diese Extremale eine Extremalenfläche $\mathfrak{F}$ und gleichzeitig beschreibt Q den Schnitt $\mathfrak{L}'$ derselben mit der Hyperfläche $\mathfrak{K}$; insbesondere möge der Schnittpunkt der durch B gehenden Extremalen mit der Hyperfläche $\mathfrak{K}$ mit C bezeichnet werden. Dann ist nach Satz VII das Integral J^*, genommen entlang $\mathfrak{L}$ von A nach B gleich dem Integral J^* genommen von A entlang $\mathfrak{L}'$ nach C und von C entlang der Feld-Extremalen bis B. Führen wir dasselbe für eine zweite von A nach B gehende Curve $\mathfrak{L}_1$ durch, so ergibt sich hieraus, dass $J^*_{\mathfrak{L}} = J^*_{\mathfrak{L}_1}$, vorausgesetzt, dass $J^*_{\mathfrak{L}'} = J^*_{\mathfrak{L}'_1}$. Damit ist Satz VI zunächst für Curven bewiesen, deren einer Endpunkt auf $\mathfrak{K}$ liegt; die Ausdehnung auf den allgemeinen Fall liegt dann auf der Hand.

Unser Beweis des Satzes VII enthält zugleich den Beweis eines von HAHN herrührenden Satzes. Wir wollen annehmen, die Extremalenfläche $\mathfrak{F}$ sei geschlossen in der

Weise, dass die Anfangs- und Endextremale zusammenfallen, d. h. dass

$$B_i(c_1) = B_i(c_0).$$

Wir wollen in diesem Fall die Extremalenfläche $\mathfrak{F}$ eine *Extremalenröhre* nennen.

Wenn dann die Curve $\mathfrak{C}_0$ in der x, c-Ebene statt den Bedingungen (39) den Bedingungen

$$\text{(40)} \qquad \bar{x}(t_0) = \bar{x}(t_1), \qquad \bar{c}(t_0) = c_0, \qquad \bar{c}(t_1) = c_1$$

genügt, so ist ihr Bild $\mathfrak{C}$ auf der Fläche $\mathfrak{F}$ ebenfalls eine geschlossene Curve, diesmal aber eine geschlossene Curve «zweiter Art»; wir wollen von ihr sagen, sie umkreise die Extremalenröhre einmal. Dann ergibt das obige Beweisverfahren das Resultat

$$J^*_{\mathfrak{C}} = \Phi(c_1) - \Phi(c_0).$$

Dasselbe Resultat erhalten wir aber, wenn wir statt $\mathfrak{C}$ eine andere Curve $\bar{\mathfrak{C}}$ nehmen, welche ebenfalls die Extremalenröhre einmal umkreist, d. h. ebenfalls den Bedingungen (40) genügt. Wir erhalten also den HAHN'*schen Satz über Extremalenröhren: Das* HILBERT'*sche Linienintegral J^* hat denselben Wert für alle dieselbe Extremalenröhre einmal umkreisenden Curven.*

Mit Hilfe dieses Satzes beweist HAHN [26]) den CLEBSCH'schen Satz (23) sowie den Satz IV, indem er die Extremalenröhre auf eine einzige Extremale zusammenschrumpfen lässt.

§ 4.

Die Transversalhyperflächen.

Zum Schluss soll noch die Lösung der Aufgabe gegeben werden [27]): *Eine Hyperfläche $\mathfrak{K}$ zu construieren, welche die sämtlichen Extremalen eines gegebenen Extremalenfeldes transversal schneidet.*

Eine solche Hyperfläche nennen wir, falls sie existiert, eine *Transversalhyperfläche* des Feldes.

Wir wollen die Aufgabe noch dahin näher präcisieren, dass die gesuchte Hyperfläche durch einen gegebenen Punkt $P_0(x^0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ im Innern des Feldes gehen soll.

Ist die Hyperfläche $\mathfrak{K}$ wieder durch die Gleichungen (28) dargestellt, so lautet die Aufgabe in analytischer Fassung: Die Function $\xi(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ so zu bestimmen, dass sie gleichzeitig den n partiellen Differentialgleichungen

$$\text{(41)} \qquad T_1 = 0, \qquad T_2 = 0, \ldots, T_n = 0$$

---

[26]) Loc. cit. [4]), S. 53.

[27]) Vgl. *Vorlesungen,* loc. cit. [3]), S. 650.

genügt und ausserdem der Anfangsbedingung

(42) $$\xi(b_1^0, b_2^0, \ldots, b_n) = x^0,$$
wobei
$$b_i^0 = \mathfrak{b}_i(x^0, y_1^0, \ldots, y_n^0).$$

Da die Gleichungen (41) als specieller Fall in (33) enthalten sind, so folgt zunächst, dass die Aufgabe überhaupt nur lösbar sein kann, wenn die gegebene Extremalenschar eine MAYER'sche Schar ist. Wir setzen diese Bedingung als erfüllt voraus. Dann können wir, da in diesem Fall die Gleichungen (19_a) gelten, nach (34) die Bedingungen (41) auch schreiben

$$\frac{\partial}{\partial b_k}\{U_0(\xi, b_1, \ldots, b_n) + S(a^0, b_1, \ldots, b_n)\} = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$
oder

(43) $$U_0(\xi, b_1, \ldots, b_n) + S(a^0, b_1, \ldots, b_n) = c$$

wo c eine von $b_1, \ldots, b_n$ unabhängige Constante ist, deren Wert sich aus der Anfangsbedingung (42) bestimmt:

$$c = U_0(x^0, b_1^0, \ldots, b_n^0) + S(a^0, b_1^0, \ldots, b_n^0).$$

Unsere Aufgabe ist also darauf zurückgeführt, die Gleichung (43) nach ξ aufzulösen, wobei wesentlich ist, dass die Function $S(a^0, b_1, \ldots, b_n)$ von der Wahl der Function ξ unabhängig ist. Schreibt man

$$U_0(x, b_1, \ldots, b_n) + S(a^0, b_1, \ldots, b_n) = H(x, b_1, \ldots, b_n),$$
so ist
$$\frac{\partial H}{\partial x} = f(x, Y, Y').$$

Wir machen nun die *Annahme*, dass

(44) $$f(x, Y, Y') \neq 0 \quad \text{in} \quad \mathfrak{A}.$$

Dann ergibt die Discussion der Gleichung (43) leicht das folgende Resultat: Bezeichnet $\mathfrak{B}_c$ diejenige Teilmenge [28]) der Menge $\mathfrak{B}$, für welche die Ungleichung

$$H(g(b_1, \ldots, b_n), b_1, \ldots, b_n) \lesseqgtr c \lesseqgtr H(G(b_1, \ldots, b_n), b_1, \ldots, b_n)$$

besteht, so hat die Gleichung (43) für jedes der Menge $\mathfrak{B}_c$ angehörige Wertsystem $b_1, \ldots, b_n$ eine und nur eine der Ungleichung

$$g(b_1, \ldots, b_n) \lesseqgtr \xi \lesseqgtr G(b_1, \ldots, b_n)$$
genügende Lösung
$$\xi(b_1, b_2, \ldots, b_n; c),$$
und die Gleichungen

$$x = \xi(b_1, \ldots, b_n; c), \qquad y_i = Y_i(\xi, b_1, \ldots, b_n)$$

stellen dann die gesuchte durch den Punkt P_0 gehende Transversalhyperfläche des Feldes dar. Wir haben also den folgenden Satz gewonnen, der wiederum eine andere Form

---

[28]) Zur Menge $\mathfrak{B}_c$ gehören mindestens alle Punkte in einer gewissen Umgebung von $b_1^0, \ldots, b_n^0$.

der notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Gültigkeit des Unabhängigkeitssatzes ausspricht:

SATZ VIII. — *Durch jeden Punkt im Innern eines* MAYER'*schen Feldes geht unter der Voraussetzung* (44) *eine und nur eine Transversalhyperfläche. Umgekehrt: Jede Extremalenschar, zu welcher es eine Transversalhyperfläche gibt, ist eine* MAYER'*sche Schar.*

Freiburg i. B., den 21. Januar 1911.

OSKAR BOLZA.