# Über die Schwarzsche Extremaleigenschaft des Kreises unter den Kurven konstanter Krümmung.

Von

Axel Schur in Münster i. W.

---

Die vorliegende Arbeit verdankt ihre Entstehung einem Hinweis von Herrn Hilbert auf einen Satz über Kurven konstanter Krümmung, den Herr H. A. Schwarz im Jahre 1884 gefunden, aber bisher nicht veröffentlicht hat, und den ich so formulieren will:

*Jeder nichtebene Kurvenbogen konstanter Krümmung* $\frac{1}{R}$ *über einer Sehne* $\mathfrak{s} < 2R$ *ist entweder kürzer als der kleinere oder länger als der größere Bogen des Kreises vom Radius R über der gegebenen Sehne.*

Bei dem Versuche, von diesem Satze, von dem mir zunächst nur der Wortlaut bekannt war, einen geometrischen Beweis zu geben, bin ich auf den folgenden allgemeinen Satz geführt worden:

*Verbiegt man eine ebene doppelpunktlose Kurve, die mit ihrer Sehne einen konvexen geschlossenen doppelpunktlosen Linienzug bildet, so wird dabei die Sehne länger,*

von dem sich dann der Schwarzsche Satz auf Grund gewisser elementarer Eigenschaften des Kreises als eine einfache Folge ergibt. Unter Verbiegung einer Kurve wollen wir im Anschluß an die Verbiegung ihrer Tangentenfläche eine Operation verstehen, bei der die Längen und Winkel ihrer Linienelemente erhalten bleiben. Ist die Kurve stetig gekrümmt, so kommt diese Forderung auf die Invarianz der Krümmung hinaus. Die vorstehende Definition läßt jedoch auch Unstetigkeiten der Krümmung zu, wenn nur bei Festlegung eines Durchlaufungssinnes jeder Punkt eine bestimmte Tangente und der Winkel zwischen den benachbarten Tangenten in jedem Punkte der Kurve einen bestimmten Wert hat; so daß auch Ecken als reguläre Punkte im Sinne dieser Definition gelten. Als konvexe Kurve bezeichnen wir dann eine derartige, für die der Winkel zwischen benachbarten Tangenten höchstens gleich $180^0$ ist.

Bei dem Beweise des Satzes, der als einzigen Hilfssatz den folgenden ganz elementaren voraussetzt:

*In einem Dreieck ist jede Seite größer oder mindestens gleich der Differenz und kleiner oder höchstens gleich der Summe der beiden anderen,*
werden wir der Anschaulichkeit halber zunächst Polygone mit endlicher Seitenzahl betrachten und an ihnen ein Rekursionsverfahren ausbilden, das sich auf Polygone mit unendlich vielen Seiten, durch die ja jede stetig gekrümmte Kurve angenähert werden kann, übertragen läßt.

## § 1.
## Beweis des Hauptsatzes.

Es sei ein offenes ebenes doppelpunktloses Polygon $AP_1P_2\ldots P_nB$ vorgelegt. Seine Seiten bezeichnen wir mit $s_i = P_iP_{i+1}$, ihre Schnittpunkte mit der Geraden $AB$, der Sehnengeraden, mit $S_i$. Nun möge voraussetzungsgemäß das geschlossene Polygon $AP_1P_2\ldots P_nBA$ konvex und doppelpunktlos sein. Dann liegen alle Punkte $S_i$ auf den Verlängerungen der Sehne $\overline{AB}$ und verbinden die Punkte $A$ und $B$ durch einen Streckenzug $AS_1S_2\ldots S_{n-1}B$, der ganz auf der Geraden $AB$ liegt und ebenfalls durch die Strecke $\overline{AB}$ geschlossen wird. Nun läßt sich zeigen, daß bei einer Verbiegung des Polygons $AP_1P_2\ldots P_nB$ in ein anderes $A'P_1'P_2'\ldots P_{n-2}'P_{n-1}'P_nB$ der Streckenzug $AS_1S_2\ldots S_{n-2}S_{n-1}B$ in einen Streckenzug $A'S_1'S_2'\ldots S_{n-2}'S_{n-1}B$ übergeht, so daß entsprechende Teilstrecken dieselbe Länge haben, aber nicht mehr alle auf einer Geraden liegen.

Nach der in der Einleitung gegebenen Definition der Verbiegung als einer Operation, bei der die Seiten und Winkel des Polygons erhalten bleiben sollen, kann nämlich eine Verbiegung nur bestehen in einer Anzahl von Drehungen der starren Ebenen $P_{i-1}P_iP_{i+1}$ durch je drei aufeinanderfolgende Ecken gegen die Ebenen $P_iP_{i+1}P_{i+2}$ um die gemeinsamen Seiten $P_iP_{i+1}$ durch vorgeschriebene Winkel $\vartheta_i$, die Torsionswinkel. Die Gestalt des verbogenen Polygons, d. h. die relative Lage seiner Teile zueinander ohne Rücksicht auf die absolute Lage gegen ein festes Bezugssystem, ist unabhängig von der Reihenfolge, in der wir die verschiedenen Drehungen nacheinander ausführen. Wir können also diese Drehungen in der Reihenfolge vornehmen, wie ihre Drehachsen bei der von uns gewählten Umlaufungsrichtung des Polygons aufeinanderfolgen.

Gemäß dieser Festsetzung besteht die erste Teiloperation in einer Drehung der Ebene $AP_1P_2$ um $P_1P_2$ gegen die Ebene $P_1P_2\ldots P_nB$ durch den Winkel $\vartheta_1$. Dabei bleiben alle Abstände in der Ebene $AP_1P_2$ unverändert. Der Punkt $A$ wird also in einen Punkt $A'$ übergeführt, der vom Punkte $S_1$ auf $P_1 P_2$ den Abstand $\overline{S_1 A'} = \overline{S_1 A}$ hat, aber nicht mehr auf der Geraden $S_1 B$ liegt. Dann folgt aus der ersten Aussage des Hilfssatzes:

$$\overline{A'B} > \overline{S_1 B} - \overline{S_1 A'} = \overline{S_1 B} - \overline{S_1 A} = \overline{AB}. \tag{1}$$

Bei der zweiten Drehung wird die Ebene $P_1 P_2 P_3$ gegen die Ebene $P_2 P_3 \ldots P_n B$ durch einen Winkel $\vartheta_2$ um die Gerade $P_2 P_3$ gedreht, während die Ebene $A' P_1 P_2$ in ihrer Lage gegen die Ebene $P_1 P_2 P_3$ bleibt. Also behalten auch die Punkte der beiden Ebenen ihre gegenseitigen Abstände und der Punkt $A'$ geht in einen Punkt $A''$ über, der von dem Punkte $S_2$ auf $P_2 P_3$ den Abstand $\overline{S_2 A''} = \overline{S_2 A'}$ hat. Nun ist aber nach der zweiten Aussage des Hilfssatzes, wenn $S_2$ auf der gleichen Seite von $A$ liegt wie $S_1$:

$$\overline{S_2 A'} < \overline{S_2 S_1} + \overline{S_1 A'} = \overline{S_2 S_1} + \overline{S_1 A} = \overline{S_2 A}, \tag{2}$$

da $\overline{S_2 S_1}$ und $\overline{S_1 A'}$ nicht mehr auf einer Geraden liegen. Aus dieser Formel folgt im Verein mit der ersten Aussage des Hilfssatzes:

$$\overline{A''B} \geqq \overline{S_2 B} - \overline{S_2 A''} = \overline{S_2 B} - \overline{S_2 A'} > \overline{S_2 B} - \overline{S_2 A} = \overline{AB}. \tag{3}$$

Bei der nächsten Drehung der Ebene $P_2 P_3 P_4$ gegen die Ebene $P_3 P_4 \ldots P_n B$ um die Gerade $P_3 P_4$ durch einen Winkel $\vartheta_3$ werden gleichzeitig die beiden Ebenen $A'' P_1' P_2$ und $P_1' P_2 P_3$ in ihrer relativen Lage zur Ebene $P_2 P_3 P_4$ mitgeführt. Es bleiben also die Abstände ihrer Punkte erhalten und $A''$ geht in einen Punkt $A'''$ über, dessen Abstand von dem Punkte $S_3$ auf $P_3 P_4$ $\overline{S_3 A'''} = \overline{S_3 A''}$ ist. Dann folgt aus (2) und der zweiten Aussage des Hilfssatzes, wenn wieder $S_2$ und $S_3$ auf der gleichen Seite von $A$ liegen:

$$\overline{S_3 A''} \leqq \overline{S_3 S_2} + \overline{S_2 A''} < \overline{S_3 S_2} + \overline{S_2 A} = \overline{S_3 A}, \tag{4}$$

und hieraus nach der ersten Aussage des Hilfssatzes:

$$\overline{A'''B} \geqq \overline{S_3 B} - \overline{S_3 A'''} = \overline{S_3 B} - \overline{S_3 A''} > \overline{S_3 B} - \overline{S_3 A} = \overline{AB}. \tag{5}$$

Dies Schlußverfahren kann man nun schrittweise fortsetzen, solange die Punkte $S_i$ auf der Verlängerung $\overleftarrow{AB}$ von $\overline{AB}$ über $A$ hinaus liegen, und erhält die folgenden Rekursionsformeln:

$$\overline{S_i A^{(i)}} = \overline{S_i A^{(i-1)}}, \tag{A}$$

$$\overline{S_i A^{(i-1)}} \leqq \overline{S_i S_{i-1}} + \overline{S_{i-1} A^{(i-1)}} < \overline{S_i S_{i-1}} + \overline{S_{i-1} A} = \overline{S_i A}, \tag{B}$$

$$\overline{A^{(i)} B} \geqq \overline{S_i B} - \overline{S_i A^{(i)}} = \overline{S_i B} - \overline{S_i A^{(i-1)}} > \overline{S_i B} - \overline{S_i A} = \overline{AB}. \tag{C}$$

Denn dann sind alle Strecken zwischen Buchstaben ohne oberen Index gleichgerichtet.

Nun sei $S_k$ der letzte Punkt $S_i$ auf $\overleftarrow{AB}$, so daß also $S_{k+1}$ auf $\overrightarrow{AB}$, der Verlängerung von $\overline{AB}$ über $B$ hinaus, liegt. Da die Beziehung (C) nun für jeden Punkt der Geraden $AB$ gilt, der durch $A$ von $S_k$ getrennt ist, so folgt aus ihr auch:

$$\overline{A^{(k)}S_{k+1}} > \overline{AS_{k+1}}. \tag{6}$$

Dann ist:

$$\overline{A^{(k+1)}S_{k+1}} = \overline{A^{(k)}S_{k+1}}, \tag{7}$$

und nach der ersten Aussage des Hilfssatzes:

$$\begin{aligned} \overline{A^{(k+1)}B} &\geqq \overline{A^{(k+1)}S_{k+1}} - \overline{BS_{k+1}} \\ &= \overline{A^{(k)}S_{k+1}} - \overline{BS_{k+1}} > \overline{AS_{k+1}} - \overline{BS_{k+1}} = \overline{AB}. \end{aligned} \tag{8}$$

Gehen wir nun zur nächsten Drehung um $P_{k+2}P_{k+3}$ über, so ergibt sich zunächst wieder $\overline{A^{(k+2)}S_{k+2}} = \overline{A^{(k+1)}S_{k+2}}$ und:

$$\overline{A^{(k+1)}S_{k+2}} \geqq \overline{A^{(k+1)}S_{k+1}} - \overline{S_{k+2}S_{k+1}} > \overline{AS_{k+1}} - \overline{S_{k+2}S_{k+1}} = \overline{AS_{k+2}}, \tag{9}$$

wo wieder die Strecken zwischen Punkten ohne obere Indizes gleichgerichtet sind. Hieraus folgt dann:

$$\begin{aligned} \overline{A^{(k+2)}B} &\geqq \overline{A^{(k+2)}S_{k+2}} - \overline{BS_{k+2}} \\ &= \overline{A^{(k+1)}S_{k+2}} - \overline{BS_{k+2}} > \overline{AS_{k+2}} - \overline{BS_{k+2}} = \overline{AB}. \end{aligned} \tag{10}$$

Nach dem Schema (9), (10) kann man nun für alle weiteren Punkte $S_i$ auf $\overrightarrow{AB}$ schrittweise weiter schließen und erhält so die Rekursionsformeln:

$$\overline{A^{(i)}S_i} = \overline{A^{(i-1)}S_i}, \tag{A$'$}$$

$$\overline{A^{(i-1)}S_i} \geqq \overline{A^{(i-1)}S_{i-1}} - \overline{S_iS_{i-1}} > \overline{AS_{i-1}} - \overline{S_iS_{i-1}} = \overline{AS_i}, \tag{B$'$}$$

$$\overline{A^{(i)}B} \geqq \overline{A^{(i)}S_i} - \overline{BS_i} = \overline{A^{(i-1)}S_i} - \overline{BS_i} > \overline{AS_i} - \overline{BS_i} = \overline{AB}. \tag{C$'$}$$

Aus den Relationen (A), (B), (C) und (A′), (B′), (C′) folgt dann für jede Verbiegung eines konvexen Polygons, durch die $A$ in einen Punkt $A^{(i)}$ übergeht, die Beziehung:

$$\overline{A^{(i)}B} > \overline{AB}.$$

Da man nun den Beweis mit Hilfe der Rekursionsformeln (A) — (C) und (A′) — (C′) auf Polygone mit beliebig vielen Seiten und Biegungen, die aus beliebig vielen Drehungen um diese bestehen, ausdehnen kann und jede stetig gekrümmte Kurve durch derartige Polygone angenähert werden kann, ergibt sich der Satz:

*Verbiegt man eine ebene konvexe doppelpunktlose Kurve, die mit ihrer Sehne einen konvexen geschlossenen doppelpunktlosen Linienzug bildet, so wird ihre Sehne länger.*

Die wesentliche Grundlage des Beweises bildet die Formel (2). Aus ihr ergeben sich schrittweise alle weiteren Ungleichungen, ohne daß ein wesentlich neues Element in die Beweisführung eintritt. Darin kommt die Tatsache zum Ausdruck, daß die durch eine erste Drehung herbeigeführte Verlängerung der Sehne durch keine Drehung um eine andere Seite des Polygons wieder völlig rückgängig gemacht werden kann, sondern nur durch vollständige Ausbreitung in die Ebene.

## § 2.

## Der Schwarzsche Satz.

In dem in der Einleitung erwähnten Satz von H. A. Schwarz über Kurven konstanter Krümmung ist nun die Fragestellung gewissermaßen umgekehrt zu unserer bisherigen. Schwarz vergleicht nicht die Sehnenlängen verschiedener Kurven von gleicher Bogenlänge und Krümmung, sondern die Bogenlängen von Kurven derselben Krümmung über gegebener Sehne. Stellt man das hierhergehörige Extremalproblem für den Fall konstanter Krümmung, so findet man zunächst durch Ansetzen der Lagrangeschen Gleichungen, daß, wenn man die Kurve keinen weiteren Bedingungen unterwirft, die Extremalbögen über einer gegebenen Sehne ebene Kurven, also Kreisbögen sind. Schwieriger ist die Frage, was für ein Extremum vorliegt. Und diese wird eben durch den Schwarzschen Satz dahin entschieden, daß von den beiden Bögen, in die der Kreis durch eine Sehne zerlegt wird, der kürzere ein relatives Maximum und der größere ein relatives Minimum darstellt.

Mit Hilfe des im vorigen Paragraphen bewiesenen Satzes gelangen wir durch die folgenden Überlegungen zum Schwarzschen Satz. Da der Kreis die einzige ebene Kurve konstanter Krümmung ist[1]), so kann jede nichtebene Kurve konstanter Krümmung durch Verbiegung aus einem ein- oder mehrfach überdeckten Kreis abgeleitet werden. Nun können wir zunächst Bögen konstanter Krümmung, die länger als der Kreisumfang sind, von der weiteren Betrachtung ausschließen, da diese jedenfalls länger sind als jeder Teilbogen des Kreises, also der zweiten Aussage des Schwarzschen Satzes entsprechen. Aus dem Satze des vorigen Paragraphen folgt dann zunächst, daß nur solche Bögen des Kreises durch Verbiegung in

[1]) Vgl. etwa Cesàro-Kowalewski, Vorlesungen über natürliche Geometrie (1901), S. 4; oder: Scheffers, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, 2. Auflage (1910), Bd. 1, S. 51 u. S. 391.

nichtebene Bögen konstanter Krümmung $\frac{1}{R}$ über einer Sehne $\mathfrak{s} < 2R$ übergeführt werden können, denen eine Sehne $\mathfrak{s}' < \mathfrak{s}$ zugehört, da jeder Kreisbogen eine Kurve von der in dem Hilfssatz betrachteten Art ist und also bei einer Verbiegung seine Sehne verlängert. Nun wächst für $0 < S < R\pi$ die Sehne $\mathfrak{s}'$ des Kreises mit dem Bogen $s$, während sie für $R\pi < s < 2R\pi$ mit wachsendem Bogen abnimmt. Daraus ergibt sich, daß Sehnen kleiner als $\mathfrak{s}$ nur zu derartigen Bögen des Kreises gehören können, die entweder kürzer als der kleinere Kreisbogen $s_1 < R\pi$ oder länger als der größere Kreisbogen $s_2 > R\pi$ über der gegebenen Sehne $\mathfrak{s} < 2R$ sind. Dies besagt aber gerade der Schwarzsche Satz:

*Jeder nichtebene Kurvenbogen konstanter Krümmung $\frac{1}{R}$ über einer Sehne $\mathfrak{s} < 2R$ ist entweder kürzer als der kleinere oder länger als der größere Bogen des Kreises vom Radius $R$ über der gegebenen Sehne.*

Es mag noch hinzugefügt werden, daß der Halbkreis unter den Bögen konstanter Krümmung über dem Durchmesser keinen Extremwert darstellt. Denn es gibt unter den unendlich benachbarten Kreisbögen sowohl längere als kürzere, denen eine kürzere Sehne als der Durchmesser zugehört.

Aus dem Schwarzschen Satze und unserem allgemeinen Satze kann man endlich noch die folgenden Sätze über die Unverbiegbarkeit einer Ebene ableiten:

*Gibt man in einer Ebene einen Kreisbogen vor und fordert, daß derselbe seine Krümmung und seine Sehnenlänge bewahren soll, so ist die Ebene starr.*

Und allgemein:

*Gibt man in einer Ebene eine doppelpunktlose Kurve vor, die mit ihrer Sehne einen geschlossenen konvexen doppelpunktlosen Linienzug bildet, und fordert, daß diese ihre Krümmung und Sehnenlänge behalten soll, so ist die Ebene starr.*

Der innere Grund für diese Sätze ebenso wie für den zunächst überraschenden Schwarzschen Satz dürfte in der in unserm Hauptsatze ausgesprochenen Minimaleigenschaft der ebenen konvexen Kurven bezüglich der Sehne liegen.

(Eingegangen am 4. 10. 1920.)