

Über orthogonale Systeme analytischer Funktionen.

Von

S. Bochner in Berlin.

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit bezweckt, das allgemeine Orthogonalisierungsverfahren speziell auf analytische Funktionen komplexen Arguments anzuwenden. Die bei der Aufstellung von Orthogonalsystemen auftauchende Frage, ob und inwieweit sich willkürliche Funktionen nach einem derartigen System entwickeln lassen, läßt in diesem Falle recht einfache Teillösungen zu. Die Arbeit entstand aus einem Versuch, die von Ritz¹⁾ und von Herrn Bieberbach²⁾ angestrebte Approximation der Funktion, welche einen einfach zusammenhängenden Bereich auf einen Kreis abbildet, durch einfach zu bildende Funktionen von gewissen Minimaleigenschaften weiter auszubauen. Wie sehr diese Frage mit der unsrigen zusammenhängt, wird die folgende Darstellung ergeben. Auch das Problem, analytische Funktionen nach Systemen gegebener zu entwickeln, wurde bereits von den Herren Faber³⁾ und Fejér⁴⁾ behandelt.

In jüngster Zeit erschien eine Abhandlung von Herrn Szegő⁵⁾, in welcher für schlichte, von einer analytischen Kurve berandete Bereiche ähnliche Resultate erhalten werden. Da aber Herr Szegő von Polynomen

¹⁾ Walter Ritz, Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik, *Crelle's Journal* **135** (1909), S. 1—61.

²⁾ Zur Theorie und Praxis der konformen Abbildung, *Rend. d. Circolo mat. di Palermo*, **38** (1914), S. 98—118.

³⁾ Über polynomische Entwicklungen, *Math. Annalen* **57** (1903), S. 389—408 und **64** (1907), S. 116—135.

⁴⁾ Interpolation und konforme Abbildung, *Nachrichten der kgl. Gesellsch. der Wiss. zu Göttingen, Math.-phys. Klasse* 1918, S. 319—331.

⁵⁾ „Über orthogonale Polynome, die zu einer gegebenen Kurve der komplexen Ebene gehören“, diese Zeitschrift **9** (1921), S. 218—270.

ausgeht, die in bezug auf die Randkurve orthogonal sind, sind seine Ansätze auf allgemeinere, besonders nichtschlichte Bereiche nicht unmittelbar übertragbar.

Die bei uns auftretenden Integrationen und Orthogonalisierungen sind immer in bezug auf die Fläche des Bereiches gemeint, nie etwa auf die Berandung. Eine endliche oder unendliche Folge in einem Bereich \mathfrak{B} analytischer Funktionen

$$\varphi_0(z), \quad \varphi_1(z), \quad \varphi_2(z), \dots$$

bezeichnen wir als Orthogonalsystem, wenn die Relationen

$$(1) \quad \int_{\mathfrak{B}} \varphi_i(z) \overline{\varphi_k(z)} d\omega = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$$

bestehen (Pkt. 8).

Hierbei lassen wir den allgemeinsten auf einer Riemannschen Fläche gelegenen Bereich zu, also eine schlichte oder nichtschlichte nur aus inneren Punkten bestehende zusammenhängende Punktmenge mit Windungspunkten endlicher Ordnung. Die Art des Zusammenhanges und die Beschaffenheit der Grenzpunkte kommen nicht in Frage. Die Funktionen $\varphi(z)$ schränken wir in ihrem Verhalten am Rande nicht ein, sie dürfen sogar innerhalb \mathfrak{B} algebraische Singularitäten aufweisen. Bei einer solchen Allgemeinheit eines Bereiches \mathfrak{B} und einer Funktion $f(z)$ ist aber das Integral $\int_{\mathfrak{B}} f(z) \overline{f(z)} d\omega$ kein eigentliches Integral mehr im Lebesgueschen Sinne. Wir können ihm aber einen eindeutigen Wert beilegen, der endlich oder unendlich ausfallen kann, und der, im Falle, daß die Voraussetzungen für die Integrierbarkeit im Lebesgueschen Sinne vorhanden sind, mit dem entsprechenden Integral übereinstimmt. Hat nun bei vorgegebenem Bereich \mathfrak{B} das Integral $\int_{\mathfrak{B}} f(z) \overline{f(z)} d\omega$ einen endlichen Wert, dann nennen wir $f(z)$ eine Funktion vom endlichen Typus und den Wert dieses Ausdrucks wollen wir kurz als das Integral von $f(z)$ über \mathfrak{B} bezeichnen. Wenn $f(z)$ und $g(z)$ beides Funktionen vom endlichen Typus sind, dann kann der Begriff der Integrierbarkeit auf den Integranden $f(z) \overline{g(z)}$ ausgedehnt werden, und das entsprechende Integral hat immer einen endlichen Wert, gemäß der Schwarzschen Ungleichheit

$$(2) \quad \left| \int_{\mathfrak{B}} f(z) \overline{g(z)} d\omega \right|^2 \leq \int_{\mathfrak{B}} f(z) \overline{f(z)} d\omega \int_{\mathfrak{B}} g(z) \overline{g(z)} d\omega \quad (\S 1).$$

Jetzt erst haben die Orthogonalisierungsbedingungen (1) einen unzweideutigen Sinn. Da für unsere Zwecke nur solche Bereiche Interesse haben, auf denen Orthogonalsysteme existieren, müssen wir von unserem Bereiche verlangen, daß er mindestens eine Funktion vom endlichen Typus aufweist. In diesem Falle kann man durch Normierung dieser Funktion ein Orthogonal-

system erzeugen, das sich auf eine einzige Funktion reduziert. Daß es aber wirklich Bereiche gibt, die für uns ausschalten, überzeugt man sich wenn man etwa die schlichte z -Ebene betrachtet. Das Linienintegral $F(z) = \int_{z_0}^z f(z) dz$ einer Funktion $f(z)$ vom endlichen Typus würde dann die konforme Abbildung der ganzen Ebene auf einen Bereich von endlichem Inhalt liefern, was offenbar unmöglich ist.

Den $(n+1)$ ersten Funktionen

$$\varphi_0(z), \varphi_1(z), \dots, \varphi_n(z)$$

aus einer orthogonalen Folge $\varphi_\nu(z)$ ordnen wir die Funktion zweier Variablen zu:

$$(3) \quad K_{\tau_n}(\zeta, z) = \overline{\varphi_0(\zeta)} \varphi_0(z) + \overline{\varphi_1(\zeta)} \varphi_1(z) + \dots + \overline{\varphi_n(\zeta)} \varphi_n(z).$$

Die nicht negative Funktion $K_{\tau_n}(\zeta, \zeta)$ besitzt nun die Eigenschaft für jedes System $\varphi_\nu(z)$ und jede Zahl n unterhalb einer festen Funktion $F(\zeta)$ zu liegen, welche überall in \mathfrak{B} bis auf die Windungspunkte einen endlichen Wert hat. Letztere ist sogar in jedem abgeschlossenen, windungspunktfreien Teilbereich von \mathfrak{B} beschränkt (§ 2).

Hierauf folgt sofort die Existenz der Funktionen

$$K_\tau(\zeta, \zeta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} |\varphi_\nu(\zeta)|^2$$

und weiterhin von

$$K_\tau(\zeta, z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \overline{\varphi_\nu(\zeta)} \varphi_\nu(z).^{9)}$$

Hieraus kann man schließen, daß eine lineare Verbindung

$$(4) \quad f(z) = c_0 \varphi_0(z) + c_1 \varphi_1(z) + c_2 \varphi_2(z) + \dots$$

in \mathfrak{B} konvergent ist und eine analytische Funktion, sogar vom endlichen Typus liefert, sofern nur die Quadratsumme $\sum_{\nu=0}^{\infty} |c_\nu|^2$ konvergiert. Für die Koeffizienten ergeben sich dann die Relationen

$$(5) \quad c_\nu = \int_{\mathfrak{B}} f(z) \overline{\varphi_\nu(z)} d\omega \quad \text{und} \quad \sum_{\nu} |c_\nu|^2 = \int_{\mathfrak{B}} f(z) \overline{f(z)} d\omega,$$

⁹⁾ Die vorliegende Arbeit steht in engstem Zusammenhang mit der vor kurzem erschienenen Arbeit des Herrn S. Bergmann, Über die Entwicklung der harmonischen Funktionen der Ebene und des Raumes, Math. Ann. 96 (1922), S. 238–279. Ich habe die Bergmannsche Untersuchung in ihren Anfängen kennen gelernt und bin erst durch sie zu den hier entwickelten Verallgemeinerungen angeregt worden.

aus welchen hervorgeht, daß eine derartige Funktion $f(z)$ keine weitere Entwicklung nach den $\varphi_\nu(z)$ mit Koeffizienten endlicher Quadratsumme zulassen kann. Anders ausgedrückt: die Null läßt sich nicht durch Orthogonalfunktionen mit Koeffizienten endlicher Quadratsumme darstellen. Wenn insbesondere ein System $\varphi_\nu(z)$ im Hilbertschen Sinne abgeschlossen ist, d. h. keine weitere Orthogonalfunktion zuläßt, dann kann man jede Funktion $f(z)$ vom endlichen Typus nach diesem System auf Fouriersche Art entwickeln (§ 3, Pkt. 11).

Es existiert zu jedem Bereiche mindestens ein abgeschlossenes Orthogonalsystem. Unter den Funktionen vom endlichen Typus gibt es also eine Folge solcher, aus denen jede andere durch eine lineare Verbindung hervorgeht. Es ist nicht entschieden, ob es nicht Bereiche gibt, für welche es nur endlich viele oder nur eine einzige lineare unabhängige unter diesen Funktionen gibt; d. h. die Anzahl der Funktionen eines abgeschlossenen Systems wäre dann endlich (§ 4, Pkt. 14–15). Für einen einfach zusammenhängenden Bereich gibt es immer unendlich viele unter unseren Funktionen.

Wenn man sich die Aufgabe stellt, unter allen Funktionen, die sich nach einem System $\varphi_\nu(z)$ ableiten lassen und die im Punkte ζ den Wert eins annehmen, diejenige ausfindig zu machen, welche das kleinste Integral über \mathfrak{B} besitzt, dann erhält man als Lösung der Funktion

$$w_\varphi(\zeta, z) = \frac{K_\varphi(\zeta, z)}{K_\varphi(\zeta, \zeta)}$$

Ihr Integral über \mathfrak{B} beträgt $\frac{1}{K_\varphi(\zeta, \zeta)}$. Selbstverständlich hat das Problem nur dann einen Sinn, wenn $K_\varphi(\zeta, \zeta)$ von Null verschieden ist. Sonst gibt es nämlich gar keine lineare Verbindung der $\varphi_\nu(z)$, die in ζ von Null verschieden wäre, also insbesondere den Wert eins annähme. Solche Ausnahmepunkte dürfen sich aber, wie man leicht einsieht, nirgends im Innern von \mathfrak{B} häufen. ζ darf aber auch unter Umständen kein Windungspunkt sein, weil in solchen $K_\varphi(\zeta, \zeta)$ unendlich werden kann. Die Minimalfunktionen $w_\varphi(\zeta, z)$ und $\lambda_\varphi(\zeta) = 1 : K_\varphi(\zeta, \zeta)$ werden approximiert durch die Funktion $w_{\varphi_n}(\zeta, z)$ und $\lambda_{\varphi_n}(\zeta) = 1 : K_{\varphi_n}(\zeta, \zeta)$, welche die erwünschten Minimaleigenschaften in bezug auf das reduzierte System: $\varphi_0(z), \varphi_1(z), \dots, \varphi_n(z)$ besitzen. Nimmt man ein abgeschlossenes System, dann liefern die Funktionen $w_\varphi(\zeta, z)$ und $\lambda_\varphi(\zeta)$ die Lösung unseres Minimumproblems, wenn man alle möglichen Funktionen vom endlichen Typus, die in ζ den Wert eins annehmen, zuläßt. Folglich sind die Minimalfunktionen eindeutig, also unabhängig von der Wahl des Systems. Alle abgeschlossenen Systeme haben demnach einen gemeinsamen Kern, den wir mit $K(\zeta, z)$ bezeichnen (Pkt. 10, 12, 16).

Im Falle eines einfach zusammenhängenden Bereiches liefert $w(\zeta, z)$ die Ableitung derjenigen Funktion, welcher unter allen im Punkte ζ winkeltreuen, im weiteren Sinne konformen Abbildungen (ζ darf nicht Windungspunkt sein!) diejenige mit kleinstem Flächeninhalt entspricht. Aus der Möglichkeit der Kreisuniformisierung eines einfach zusammenhängenden Bereiches folgt aber, wie Bieberbach bemerkt hat (l. c.), daß die Minimalabbildung mit eben der Kreisabbildung identisch ist, indes ist es mir nicht gelungen, aus der Minimalabbildung der Kreisuniformisierung aufs neue herzuleiten.

In § 5 werden einige Beziehungen von Orthogonalsystemen zueinander besprochen.

Zum Schluß werden im § 6 alle vorausgehenden Betrachtungen noch einmal durchgegangen, aber nur in bezug auf solche Funktionen vom endlichen Typus, welche keine algebraischen Singularitäten in \mathfrak{B} aufweisen, also durchweg innerhalb \mathfrak{B} endlich sind. Die Ergebnisse sind ganz analog, auch das Minimumproblem läßt eine ähnliche Lösung zu.

Hervorzuheben ist, daß die Kernfunktion $K_{\gamma_n}(\zeta, \zeta)$ auch in den Windungspunkten endlich und sogar für alle Systeme beschränkt bleibt. Zur Frage der konformen Abbildung einfach zusammenhängender Bereiche ist noch zu bemerken, daß die durch die jetzigen Funktionen vermittelten Abbildungen im engeren Sinne konform sind, also einen Windungspunkt in einen Windungspunkt von nicht niederer Ordnung überführen. Und das so gestellte Problem der Abbildung auf einen Bereich von minimalem Inhalt läßt eben eine eindeutige Lösung zu.

Es sei noch erwähnt, daß man andererseits die angeführten Resultate nach einer anderen Richtung hin sehr erweitern kann. Denkt man daran, daß die analytischen (eigentlich harmonischen) Funktionen aus den Lösungen der Laplaceschen Differentialgleichung $\Delta u = 0$ bestehen, dann kann man die Entwicklungssätze dahin deuten, daß zu jedem vorgegebenen Bereich, die Lösungen, der Laplaceschen Differentialgleichung ein „Fundamentalsystem“ besitzen. Dieses Resultat kann auf die allgemeinsten linearen, homogenen, partiellen Differentialgleichungen übertragen werden. Näheres darüber soll eine weitere Arbeit bringen.

§ 1.

Einführung eines uneigentlichen Integrals.

Es sei ein zusammenhängender, offener Bereich und eine daselbst definierte stetige nicht negative Funktion des Ortes vorgegeben; dann wollen wir in eindeutiger Weise festlegen, was unter dem Flächenintegral dieser Funktion über den Bereich zu verstehen ist.

1. Vorerst eine Hilfsbetrachtung. In der x, y -Ebene sei eine ganz im Endlichen gelegene offene Punktmenge \mathfrak{B} gegeben. Eine gegen \mathfrak{B} konvergierende Folge abgeschlossener Teilmengen von \mathfrak{B} :

$$\overline{\mathfrak{B}}_1, \overline{\mathfrak{B}}_2, \overline{\mathfrak{B}}_3, \dots,$$

von denen jede ganz innerhalb aller folgenden gelegen ist — von denen also je zwei eine von Null verschiedene Ränderentfernung haben —, nennen wir eine Ausschöpfungsfolge von \mathfrak{B} . Ausschöpfungsfolgen lassen sich immer herstellen ($\overline{\mathfrak{B}}_k$ bestehe etwa aus allen Punkten von \mathfrak{B} , welche vom Rande eine Entfernung $\geq e_k$ haben, und $e_1 > e_2 > e_3 \dots \rightarrow 0$).

Läßt man einen Punkt P den Rand von $\overline{\mathfrak{B}}_k$ durchlaufen, dann hat seine Entfernung vom Rande von \mathfrak{B} : $E_1(P)$ ein Maximum und ein Minimum

$$(6) \quad P_k \text{ und } e_k, \quad P_k \geq e_k.$$

Es ergibt sich

$$(7) \quad e_1 > e_2 > e_3 \dots \rightarrow e.$$

Wir behaupten nun:

$$(8) \quad \lim_{v \rightarrow \infty} P_v = 0,$$

mithin auch $\lim_{v \rightarrow \infty} P_v = 0$, und um so mehr $e = 0$.

Wir ziehen jetzt die Komplementärmengen aller unserer Punktmenngen in bezug auf ein genügend großes Quadrat hinzu:

$$(9) \quad C\overline{\mathfrak{B}}_1 > C\overline{\mathfrak{B}}_2 > C\overline{\mathfrak{B}}_3 \dots \rightarrow C\mathfrak{B}.$$

Die $C\overline{\mathfrak{B}}_k$ sind offen und je zwei unter ihnen haben eine positive Ränderentfernung. Nach Voraussetzung gibt es auf dem Rande von $C\overline{\mathfrak{B}}_k$ einen Punkt P_k , der vom Rande von \mathfrak{B} eine Entfernung P_k hat. Hieraus kann man auf die Existenz eines Punktes Q_k schließen, der sowohl in \mathfrak{B} als auch in $C\overline{\mathfrak{B}}_k$ gelegen ist und vom Rande eine Entfernung $\geq \frac{P_k}{2}$ hat. Diese Punkte häufen sich in mindestens einem Punkte. Wäre nun $\lim P > 0$, dann läge mindestens einer dieser Häufungspunkte innerhalb \mathfrak{B} — wir nennen ihn Q — für den gälte

$$(10) \quad E(Q) \geq \frac{\lim P_v}{2}.$$

Wir suchen jetzt aus der Folge Q_k eine gegen Q konvergierende Teilfolge Q'_k heraus,

$$(11) \quad Q'_k \rightarrow Q.$$

Die entsprechenden Größen

$$\mathfrak{B}'_k, C\mathfrak{B}'_k, P'_k, e'_k$$

erfüllen auch sämtliche Gleichungen (6) bis (9). Die Punkte $Q'_2, Q'_3, Q'_4 \dots$ liegen sämtlich in $C\overline{B}'_2$, ihr Häufungspunkt Q ist demnach ein Punkt aus $C\overline{B}'_1$. Ähnlich schließt man, daß der Punkt Q in jeder Menge $C\overline{B}'_k$ gelegen ist. Q ist also Punkt von $C\mathfrak{B}$; kann also insbesondere nicht innerhalb \mathfrak{B} liegen und Ungleichung (10) erfüllen. Die Annahme $\lim P_n > 0$ führt also zu einem Widerspruch.

2. Es sei jetzt innerhalb \mathfrak{B} eine stetige nicht negative Funktion $p(x, y) \geq 0$ definiert. Die Integrale

$$\int_{\overline{B}_n} p(x, y) d\omega$$

existieren, wachsen ihrem Zahlenwerte nach monoton mit n , streben also einem endlichen oder unendlichen Limeswert λ zu.

Nimmt man jetzt dieselben Integrale über eine andere Ausschöpfungsfolge \overline{B}_n , und bezeichnet man den entsprechenden Limes mit l , dann besteht die Gleichung

$$(12) \quad \lambda = l.$$

Man greife die Punktmenge \overline{B}_k heraus. Die den Zahlen q_n und P_n entsprechenden Größen wollen wir mit r_n und R_n bezeichnen. Aus $R_n \rightarrow 0$ folgt, daß man bei festgehaltenem k eine Zahl n wählen kann, für welche

$$r_k \geq P_n.$$

Hieraus folgt sofort

$$\overline{B}_n > \overline{B}_k, \quad \int_{\overline{B}_n} p(x, y) d\omega \geq \int_{\overline{B}_k} p(x, y) d\omega,$$

also umsomehr:

$$\lambda \geq \int_{\overline{B}_k} p(x, y) d\omega.$$

Weil aber diese Ungleichung für jedes k richtig ist, folgt

$$\lambda \geq l.$$

Ebenso schließt man aber

$$\lambda \leq l, \quad \text{also} \quad l = \lambda.$$

Wenn die so erhaltene, von der Wahl der Ausschöpfungsfolge unabhängige Zahl λ endlich ist, nennen wir $p(x, y)$ integrierbar, und diese Zahl ist dann der Wert des Integrals. Da es immer Ausschöpfungsfolgen gibt (Pkt. 1), läßt sich die Integrierbarkeit immer entscheiden. Ist $p(x, y)$ auch am Rande von \mathfrak{B} stetig, dann haben wir es mit einem einfachen Lebesgueschen Integral zu tun.

Für die Integrierbarkeit ist insbesondere notwendig und hinreichend, daß das Integral von $p(x, y)$ über jede abgeschlossene Teilmenge von \mathfrak{B} nach oben beschränkt ist. Hieraus können wir schließen, daß eine über \mathfrak{B} integrierbare Funktion auch über jede Teilmenge von \mathfrak{B} integrierbar ist,

und daß eine über \mathfrak{B} und \mathfrak{B}' integrierbare Funktion auch über $\mathfrak{B} + \mathfrak{B}'$ integrierbar ist, und das Integral sich aus der Summe der beiden Integrale über \mathfrak{B} und \mathfrak{B}' zusammensetzt.

3. In Punkt 1 und 2 war es wesentlich, daß die betrachteten Punktmengen ganz im Endlichen gelegen waren. Diese Einschränkung wollen wir jetzt fallen lassen. Die Ausschöpfungsfolgen definieren wir wie in Punkt 1, wir verlangen nur noch, daß jede einzelne Ausschöpfungsmenge beschränkt bleibt. Die Integrale

$$\int_{\mathfrak{B}_n} p(x, y) d\omega$$

haben wiederum einen endlichen oder unendlichen Limes.

Um die Unabhängigkeit dieser Zahl von der speziellen Wahl der Ausschöpfungsfolge darzutun, führen wir eine Folge konzentrischer Quadrate

$$Q_1, Q_2, Q_3, \dots$$

mit den Seitenlängen

$$1, 2, 3, \dots$$

ein. Die Punktmengen

$$(12_1) \quad D_{r,s} = \mathfrak{B}_r Q_s, \quad D_s = \mathfrak{B} Q_s,$$

erfüllen die Voraussetzungen von Punkt 1 und 2, für sie läßt sich also die Integrierbarkeit von $p(x, y)$ entscheiden. Wenn wir nachweisen, daß

$$(13) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathfrak{B}_n} p(x, y) d\omega = \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{D_s} p(x, y) d\omega,$$

dann sind wir fertig, weil doch die rechte Seite von (13) von der Ausschöpfungsfolge unabhängig ist. Alle in Punkt 2 entwickelten Sätze über den Kalkül mit unserem Integral gelten dann auch für die allgemeinsten offenen Punktmengen.

Wir haben noch Gleichung (13) zu beweisen.

Bei festgehaltenem s konvergiert $D_{r,s}$ gegen D_s , und durch Verkleinerung jeder der Punktmengen $D_{r,s}$ kann man eine Ausschöpfungsfolge von D_s herstellen. Weil aber jedenfalls $D_{r,s} < D_s$, können wir schließen

$$(14) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{D_{r,s}} p(x, y) d\omega = \int_{D_s} p(x, y) d\omega.$$

Weil ja jedes $D_{r,s}$ in \mathfrak{B}_r gelegen, ist nach Hinzuziehung von (14)

$$(15) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\mathfrak{B}_r} p(x, y) d\omega \geq \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{D_s} p(x, y) d\omega.$$

Jede Menge \mathfrak{B}_r ist aber wegen ihrer Beschränktheit in einem gewissen Q_n , also auch D_n enthalten. Hieraus

$$(16) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\mathfrak{B}_r} p(x, y) d\omega \leq \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{D_s} p(x, y) d\omega.$$

Aus (15) und (16) folgt dann Gleichung (13).

4. Wir wollen jetzt endlich in unserer Definition des uneigentlichen Integrals denjenigen Schritt vornehmen, auf den es uns wesentlich ankommt. Wir wollen nämlich den allgemeinsten Bereich, wie er in der Funktionentheorie vorkommt, betrachten. So ein Bereich liegt in einer abzählbaren Folge von Riemannschen Blättern und besitzt im Innern Windungspunkte endlicher, aber beliebig hoher Ordnung, die notwendigerweise in höchstens abzählbarer Anzahl auftreten können. Um das Integral von $p(x, y)$ über \mathfrak{B} zu bestimmen, zerlegen wir den Bereich in eine Folge von Punktmengen, von denen jede den Durchschnitt des Bereiches mit einem einzigen Riemannschen Blatt ausmacht. Diese Zerlegung ist eindeutig. Jede dieser Punktmengen kann durch eventuelle Fortlassung einer Nullmenge innerer Punkte des Bereiches — was an dem Werte des Integrals von $p(x, y)$ über \mathfrak{B} nichts ändern kann — zu einer offenen Punktmenge gemacht werden, die unter Punkt 3 fällt. Die Summe der Integrale von $p(x, y)$ über jede einzelne Punktmenge bezeichnen wir als das Integral von $p(x, y)$ über \mathfrak{B} . Man kann nun nach verschiedenen Methoden (Poincaré, Koebe) jeden Bereich durch Bereiche ausschöpfen, von denen jeder ganz im Endlichen und in nur endlich vielen Blättern gelegen ist. Über jedem Bereich einer solchen Ausschöpfungsfolge existiert das Lebesguesche Integral und man kann ganz ähnlich wie in 3 nachweisen, daß der Limes der Integrale über eine Ausschöpfungsfolge mit dem eben festgesetzten Wert des Integrals übereinstimmt. Beim Beweise spielt die Vereinigungsmenge der n ersten Riemannschen Blätter dieselbe Rolle wie das Quadrat Q_n in 3.

5. Wir wollen noch eines bemerken. Wir haben bisher stets vorausgesetzt, daß die Funktion $p(x, y)$ durchweg in \mathfrak{B} stetig ist. Die sämtlichen Betrachtungen übertragen sich aber sofort, wenn $p(x, y)$ in einem Punkte unendlich groß wird und das uneigentliche Integral der Funktion $p(x, y)$ über eine kleine Umgebung des Punktes im Cauchyschen Sinne existiert.

6. Es haben für uns im folgenden nur solche Funktionen $p(x, y)$ Interesse, welche das Quadrat des absoluten Betrages einer in \mathfrak{B} analytischen Funktion

$$(17) \quad f(z) = f_1(x, y) + i f_2(x, y)$$

sind. Im allgemeinen werden wir für $f(z)$ sogar isolierte Singularitäten in \mathfrak{B} zulassen, wenn nicht das Gegenteil hervorgehoben ist. Bei festgehaltenem Bereich \mathfrak{B} nennen wir die Funktion $f(z)$ vom endlichen Typus, wenn das Integral

$$\int_{\mathfrak{B}} f(z) \overline{f(z)} d\omega$$

einen endlichen Wert hat, und den Betrag dieses Integrals wollen wir kurz das Integral von $f(z)$ über \mathfrak{B} nennen.

Wir wollen noch gleich feststellen, welche von den zugelassenen Singularitäten mit der Forderung nach der Integrierbarkeit von $f(z)\overline{f(z)}$ verträglich sind. P sei ein Punkt in \mathfrak{B} , etwa $k-1$ -ter Ordnung. Wenn $f(z)$ vom endlichen Typus sein soll, muß das Integral von $|f(z)|^2$, genommen über eine genügend kleine kreisförmige Umgebung K des Punktes P existieren. Im Punkte P lasse $f(z)$ die Entwicklung

$$(18) \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - \zeta)^{\frac{n}{k}}$$

zu. Für das Integral

$$(19) \quad \int f(z) \overline{f(z)} dx dy$$

kann, wenn man die Substitution

$$(20) \quad z - \zeta = z'^k, \quad z' = r \cos \varphi + i r \sin \varphi$$

macht, schreiben:

$$(21) \quad k^2 \cdot \int_{r_1}^{r_0} dr \int_0^{2\pi} d\varphi \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (r^n \cos n\varphi + i r^n \sin n\varphi) \right|^2 r^{2k-1},$$

sofern man sich das Integral in (19) in der ursprünglichen Windungsfläche über einen Kreisring mit den Radien $r_1^{\frac{1}{k}}$ und $r_0^{\frac{1}{k}}$ erstreckt denkt. Für (21) können wir schreiben:

$$(22) \quad k^2 \pi \sum_{n=-k}^{\infty} |a_n|^2 \frac{r_0^{2k+2n}}{2k+2n} - k^2 \pi \sum_{n=-k}^{\infty} |a_n|^2 \frac{r_1^{2k+2n}}{2k+2n} + k^2 \pi |a_k|^2 \log \frac{r_0}{r_1}.$$

Wir lassen r_1 gegen Null abnehmen. Wir erkennen, daß das Integral nur dann im Cauchyschen Sinne existiert, wenn die Koeffizienten a_n , deren Indizes $\leq -k$ sind, verschwinden. Es kommen demnach von den negativen Potenzen nur die $k-1$ ersten in Betracht. Die Funktion kann also höchstens in den Windungspunkten Singularitäten besitzen und zwar in einem Windungspunkt $k-1$ -ter Ordnung einen Pol höchstens $k-1$ -ter Ordnung. Solche Pole können aber auch wirklich auftreten.

Wir können dies Resultat auch anders ableiten. In einer kreisförmigen Umgebung K von P können wir jedenfalls eine Funktion

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(z) dz$$

eindeutig festlegen. Die Funktion $F(z)$ liefert eine (im weiteren Sinne) konforme Abbildung der kreisförmigen Umgebung und das Integral

$$\int_K f(z) \overline{f(z)} d\omega$$

liefert den Flächeninhalt dieser Abbildung. Damit dieser Inhalt endlich wird, muß $F(z)$ auch in P selbst analytisch sein, und

$$f(z) = \frac{dF(z)}{dz}$$

darf nur von besagter Art unendlich werden. Wir lassen aber deswegen diese Singularitäten zu, um alle Fälle konformer Abbildungen miteinzubegreifen.

7. $f(z)$ und $g(z)$ mögen zwei Funktionen vom endlichen Typus sein. Dann existiert auch das Integral

$$\int_{\mathfrak{B}} f(z) \overline{g(z)} d\omega$$

in dem Sinne, daß der Wert dieses Integrals über eine Folge von Ausschöpfungsbereichen einem von der Ausschöpfung unabhängigen Limes zustrebt. Denn in Anlehnung an (17) können wir, falls \mathfrak{B}' ein abgeschlossener Teilbereich von \mathfrak{B} ist, schreiben:

$$\int_{\mathfrak{B}'} f(z) \overline{g(z)} d\omega = \int_{\mathfrak{B}'} f_1(x, y) g_1(x, y) d\omega + \int_{\mathfrak{B}'} f_2 g_2 d\omega + i \int_{\mathfrak{B}'} f_2 g_1 d\omega - i \int_{\mathfrak{B}'} f_1 g_2 d\omega$$

Jedes dieser Insegrale kann als Differenz zweier Integrale positiver Funktionen geschrieben werden:

$$\int_{\mathfrak{B}'} f_m g_n d\omega = \frac{1}{4} \int_{\mathfrak{B}'} (f_m + g_n)^2 d\omega - \frac{1}{4} \int_{\mathfrak{B}'} (f_m - g_n)^2 d\omega,$$

von denen jede gemäß der Schwarzschen Ungleichheit

$$\int_{\mathfrak{B}'} (f_m + g_n)^2 d\omega \leq 2 \int_{\mathfrak{B}'} f_m^2 d\omega + 2 \int_{\mathfrak{B}'} g_n^2 d\omega$$

integrierbar ist.

Es besteht die Schwarzsche Ungleichheit:

$$(23) \quad \left| \int_{\mathfrak{B}'} f(z) \overline{g(z)} d\omega \right|^2 \leq \int_{\mathfrak{B}'} f(z) \overline{f(z)} d\omega \int_{\mathfrak{B}'} g(z) \overline{g(z)} d\omega.$$

Wir können jetzt den Satz beweisen:

Satz I. Eine lineare Verbindung endlich vieler Funktionen vom endlichen Typus liefert eine Funktion desselben Typus.

Es sei nämlich

$$(25) \quad f(z) = c_0 f_0(z) + c_1 f_1(z) + \dots + c_k f_k(z)$$

und $\mathfrak{B}' \prec \mathfrak{B}$, dann ist

$$(25) \quad \int_{\mathfrak{B}'} f(z) \overline{f(z)} d\omega = \sum_{m, n=0}^k c_m \overline{c_n} \int_{\mathfrak{B}'} f_m(z) \overline{f_n(z)} d\omega.$$

Rechts kann man für jeden Summanden zum Limes $\mathfrak{B}' \rightarrow \mathfrak{B}$ übergehen; hieraus folgt, daß $f(z)$ vom endlichen Typus ist und die Gleichung

$$(26) \quad \int_{\mathfrak{B}} f(z) \overline{f(z)} d\omega = \sum_{m, n=0}^k c_m \bar{c}_n \int_{\mathfrak{B}} f_m(z) \overline{f_n(z)} d\omega$$

richtig ist.

§ 2.

Der Hauptsatz über Orthogonalfunktionen.

8. Wir legen einen Bereich \mathfrak{B} zugrunde, von dem wir nur verlangen, daß er mindestens eine Funktion $w(z)$ vom endlichen Typus aufweist. \mathfrak{B}_n bedeute ein für allemal den n -ten Bereich einer Ausschöpfungsfolge.

Es sei jetzt eine endliche oder unendliche Folge von Funktionen vom endlichen Typus:

$$(27) \quad \varphi_0(z), \varphi_1(z), \varphi_2(z), \dots$$

gegeben, und zwar möge genau

$$\int_{\mathfrak{B}} \varphi_i(z) \overline{\varphi_i(z)} d\omega = 1$$

sein. Nach Punkt 7 hat dann das Integral

$$\int_{\mathfrak{B}} \varphi_i(z) \overline{\varphi_k(z)} d\omega \quad (i \neq k)$$

einen Sinn, und zwar soll es genau den Wert Null haben, also

$$(28) \quad \int_{\mathfrak{B}} \varphi_i(z) \overline{\varphi_k(z)} d\omega = \varepsilon_{ik}.$$

Dann wollen wir das System $\varphi_\nu(z)$ ein Orthogonalsystem nennen. Aus der Voraussetzung folgt die Existenz mindestens eines Orthogonalsystems.

9. Wir greifen aus (27) die $n+1$ ersten Funktionen heraus und bilden aus ihnen die Funktion zweier Variablen:

$$(29) \quad K_{\varphi_n}(\zeta, z) = \overline{\varphi_0(\zeta)} \varphi_0(z) + \overline{\varphi_1(\zeta)} \varphi_1(z) + \dots + \overline{\varphi_n(\zeta)} \varphi_n(z)$$

Insbesondere wird uns die nicht negative Funktion

$$K_{\varphi_n}(\zeta, \zeta) = \sum_{i=0}^n |\varphi_i(\zeta)|^2$$

interessieren.

Satz II. Die Funktion $K_{\varphi_n}(\zeta, \zeta)$ liegt bei jeder Wahl des Systems $\varphi_\nu(z)$ und jeder Zahl n unterhalb einer festen Funktion $F(\zeta)$,

$$(30) \quad K_{\varphi_n}(\zeta, \zeta) \leq F(\zeta),$$

welche in allen Punkten ζ , die keine Windungspunkte sind, einen endlichen Wert annimmt.

Die Funktion $F(\zeta)$ ist sogar in jeder Teilmenge von \mathfrak{B} , welche von allen Rand- und Windungspunkten eine von Null verschiedene Entfernung hat, beschränkt.

Sind an der Stelle ζ (kein Windungspunkt!) die Funktionen $\varphi_0(z)$, $\varphi_1(z)$, ..., $\varphi_n(z)$ sämtlich gleich Null, dann ist $K_{\varphi_n}(\zeta, \zeta) = 0$, also sicherlich beschränkt. Sonst betrachte man die Funktion

$$(31) \quad w_{\varphi_n}(\zeta, z) = \frac{K_{\varphi_n}(\zeta, z)}{K_{\varphi_n}(\zeta, \zeta)}.$$

Nach Satz I ist sie vom endlichen Typus und nach (26) beträgt ihr Integral

$$(32) \quad \lambda_{\varphi_n}(\zeta) = \frac{1}{K_{\varphi_n}(\zeta, \zeta)}.$$

Wir sind mit dem Beweis fertig, wenn wir nachweisen, daß $\lambda_{\varphi_n}(\zeta)$ nach unten beschränkt ist.

$\lambda_{\varphi_n}(\zeta)$ ist das Integral einer Funktion, die an der Stelle ζ den Wert 1 annimmt. Man bezeichne mit K_ζ den größten schlichten Kreis in \mathfrak{B} um den Punkt ζ herum. $w(z)$ sei irgendeine Funktion, die im Punkte ζ den Wert 1 hat, also dort eine Entwicklung

$$(33) \quad w(z) = 1 + a_1(z - \zeta) + a_2(z - \zeta)^2 \dots$$

zuläßt. Dann ist

$$(34) \quad \int_{K_\zeta} w(z) \overline{w(z)} d\omega \geq \int_{K_\zeta} w(z) \overline{w(z)} d\omega = \pi \sum_{r=0}^{\infty} |a_r|^2 \frac{r_\zeta^{2r+2}}{2r+2} \geq \pi \cdot r_\zeta^2,$$

wobei r_ζ den Radius des Kreises K_ζ bedeutet. Es besteht also insbesondere die Relation

$$(35) \quad \lambda_{\varphi_n}(\zeta) \geq \pi r_\zeta^2,$$

es genügt also für $F(\zeta)$ die Funktion $1: \pi r_\zeta^2$ zu wählen.

10. Es ist bemerkenswert, daß die Funktion $w_{\varphi_n}(\zeta, z)$ unter allen Funktionen

$$(36) \quad x_0 \varphi_0(z) + x_1 \varphi_1(z) + \dots + x_n \varphi_n(z)$$

die an der Stelle ζ den Wert 1 annehmen, das kleinste Integral aufweist. Denn das Integral der Funktion (36) beträgt

$$(37) \quad |x_0|^2 + |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2$$

und aus den Beziehungen

$$(38) \quad |x_0 \varphi_0(\zeta) + x_1 \varphi_1(\zeta) + \dots + x_n \varphi_n(\zeta)|^2 \leq (|x_0|^2 + \dots + |x_n|^2) K_{\varphi_n}(\zeta, \zeta)$$

und

$$(39) \quad x_0 \varphi_0(\zeta) + x_1 \varphi_1(\zeta) + \dots + x_n \varphi_n(\zeta) = 1$$

folgt

$$(40) \int_{\mathfrak{B}} |x_0 \varphi_0(z) \dots + x_n \varphi_n(z)|^2 d\omega = |x_0|^2 \dots + |\widehat{x_n}|^2 \geq \overline{K_{\varphi_n}(\zeta, \zeta)} = \lambda_{\varphi_n}(\zeta).$$

In der Relation (38) kann aber das Gleichheitszeichen im wesentlichen nur für einen einzigen Wertekomplex x , richtig sein, folglich ist $w_{\varphi_n}(\zeta, z)$ sogar die einzige Minimalfunktion.

§ 3.

Entwicklungen nach Orthogonalsystemen.

11. Aus der Beschränktheit von $K_{\varphi_n}(\zeta, \zeta)$ für alle n folgt die Existenz der Funktionen:

$$(41) \quad K_{\varphi}(\zeta, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} |\varphi_n(\zeta)|^2 \leq F(\zeta)$$

und

$$(42) \quad K_{\varphi}(\zeta, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\varphi_n(\zeta)} \varphi_n'(z).$$

Hieraus schließen wir nach Schwarz, daß jede lineare Verbindung

$$(43) \quad f(z) = c_0 \varphi_0(z) + c_1 \varphi_1(z) + \dots$$

in jedem, von den Windungspunkten verschiedenen Punkte konvergiert, sofern nur

$$(44) \quad \sum_{v=0}^{\infty} |c_v|^2$$

endlich ist.

Die Konvergenz ist überdies in der Umgebung jedes Nichtwindungspunktes gleichmäßig. Diese lineare Verbindung stellt also eine in \mathfrak{B} bis auf die Windungspunkte analytische Funktion dar.

Diese Funktion ist sogar vom endlichen Typus. Um dies einzusehen, fassen wir den Bereich \mathfrak{B}' ins Auge, der aus \mathfrak{B} durch Fortlassung der Windungspunkte entsteht. Jede über \mathfrak{B} integrierbare Funktion ist auch über \mathfrak{B}' integrierbar und umgekehrt, und die entsprechenden Integrale sind einander gleich. Wir approximieren jetzt \mathfrak{B}' durch die Ausschöpfungsfolge \mathfrak{B}'_n . In jedem Bereich \mathfrak{B}'_n konvergiert die Reihe (43) gleichmäßig. Wir können also ansetzen

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{B}'_n} f(z) \overline{f(z)} d\omega &= \lim_{v \rightarrow \infty} \int_{\mathfrak{B}'_n} |c_0 \varphi_0(z) \dots + c_v \varphi_v(z)|^2 d\omega \\ &\leq \lim_{v \rightarrow \infty} \int_{\mathfrak{B}'} |c_0 \varphi_0(z) \dots + c_v \varphi_v(z)|^2 d\omega \\ &= |c_0|^2 + |c_1|^2 + |c_2|^2 + \dots \end{aligned}$$

Also auch

$$(45) \quad \int_{\mathfrak{B}} f(z) \overline{f(z)} d\omega \leq \sum |c_r|^2.$$

Hiermit ist dieser Punkt bewiesen.

Wir setzen jetzt den Ausdruck

$$(46) \quad f(z) \overline{\varphi_k(z)} = c_0 \varphi_0(z) \overline{\varphi_k(z)} + c_1 \varphi_1(z) \overline{\varphi_k(z)} + \dots$$

an. Wir machen jetzt wieder von den Bereichen \mathfrak{B}' und \mathfrak{B}'_n Gebrauch. Wir können schreiben

$$(47) \quad \int_{\mathfrak{B}'_n} f(z) \overline{\varphi_k(z)} d\omega = \sum_{r=0}^{\infty} c_r \int_{\mathfrak{B}'_n} \varphi_r(z) \overline{\varphi_k(z)} d\omega.$$

Die rechte Seite von (47) wollen wir schreiben

$$\sum_{r=0}^{\infty} c_r y_r^{(n)}$$

wobei

$$(49) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_r^{(n)} = y_r = \int_{\mathfrak{B}} \varphi_r(z) \overline{\varphi_k(z)} d\omega.$$

Überdies ist $\sum_{r=0}^{\infty} |c_r|^2$ endlich. Wenn wir noch nachweisen können, daß die Quadratsumme

$$(50) \quad \sum_{r=0}^{\infty} |y_r^{(n)}|^2$$

für alle n unterhalb einer festen Zahl bleibt, dann folgt hieraus nach einem bekannten Satz über lineare Formen:

$$(51) \quad \sum_{r=0}^{\infty} c_r y_r^{(n)} \rightarrow \sum_{r=0}^{\infty} c_r y_r.$$

Für uns würde sich daraus ergeben

$$(52) \quad c_k = \int_{\mathfrak{B}} f(z) \overline{\varphi_k(z)} d\omega.$$

Aus (45) ersieht man die Relation:

$$(53) \quad \sum_{i,k=0}^{\infty} c_i \bar{c}_k \int_{\mathfrak{B}'_n} \varphi_i(z) \overline{\varphi_k(z)} d\omega \leq |c_0|^2 + |c_1|^2 + \dots$$

Setzt man hierin

$$a_{ik}^{(n)} = \int_{\mathfrak{B}'_n} \varphi_i(z) \overline{\varphi_k(z)} du$$

dann besagt (53), daß die quadratische Form

$$\sum_{i,k} a_{i,k}^{(n)} x_i \bar{x}_k$$

beschränkt ist und die obere Schranke 1 besitzt. Hieraus folgt aber

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_{0k}^{(n)}|^2 \leq 1.$$

Da aber

$$a_{0k}^{(n)} = y_k^{(n)},$$

ist die Relation (51) berechtigt.

Aus (52) kann man schließen: Die Null läßt keine Entwicklung nach den $\varphi_\nu(z)$ mit Koeffizienten von endlicher Quadratsumme zu, es sei denn, daß die Koeffizienten sämtlich verschwinden.

Aus (52) und der Besselschen Ungleichung:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \left| \int_{\mathfrak{G}} f(z) \overline{\varphi_\nu(z)} d\omega \right| \leq \int_{\mathfrak{G}} f(z) \overline{f(z)} d\omega$$

folgt unter Hinzurechnung von (45) die Gleichung:

$$(54) \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} |c_\nu|^2 = \int_{\mathfrak{G}} f(z) \overline{f(z)} d\omega$$

Wir fassen diese Resultate zusammen im folgenden:

Satz III. *Es sei ein Orthogonalsystem*

$$\varphi_0(z), \varphi_1(z), \varphi_2(z), \dots$$

gegeben und die Zahlen c_ν mögen eine endliche Summe der Quadrate der absoluten Beträge aufweisen, dann stellt die lineare Verbindung

$$(43) \quad f(z) = c_0 \varphi_0(z) + c_1 \varphi_1(z) + \dots$$

eine Funktion vom endlichen Typus dar und zwar beträgt ihr Integral

$$(54) \quad \int_{\mathfrak{G}} f(z) \overline{f(z)} d\omega = |c_0|^2 + |c_1|^2 + \dots$$

Für die Koeffizienten c_ν hat man die eindeutige Darstellung

$$(52) \quad c_\nu = \int_{\mathfrak{G}} f(z) \overline{\varphi_\nu(z)} d\omega.$$

12. Unter Berücksichtigung des eben ausgesprochenen Satzes können wir die im Punkt 10 angestellten Betrachtungen sofort auf unendliche Orthogonalsysteme übertragen. Wenn im Nichtwindungspunkte ζ nicht sämtliche Funktionen $\varphi_\nu(z)$ verschwinden, dann bilde man die Funktion:

$$(55) \quad w_\varphi(\zeta, z) = \frac{K_\varphi(\zeta, z)}{K_\infty(\zeta, \zeta)}.$$

Diese Funktion hat unter allen Funktionen

$$x_0 \varphi_0(z) + x_1 \varphi_1(z) + \dots \quad \sum |x_r|^2 \text{ endlich,}$$

welche an der Stelle ζ den Wert 1 annehmen, das kleinste Integral. Dies Integral beträgt

$$(56) \quad \lambda_{\varphi}(\zeta) = \frac{1}{K_{\varphi}(\zeta, \zeta)}.$$

$w_{\varphi}(\zeta, z)$ liefert auch die einzige Lösung der Minimumaufgabe. Aus den Eigenschaften der Kernfunktion $K_{\varphi_n}(\zeta, z)$ folgt leicht, daß man die Funktion $w_{\varphi}(\zeta, z)$ gleichmäßig approximieren kann durch die Funktionen $w_{\varphi_n}(\zeta, z)$. Also die Minimalfunktion $w_{\varphi}(\zeta, z)$ für das ganze System $\varphi_r(z)$ kann approximiert werden durch die Minimalfunktionen für die reduzierten Systeme

$$\varphi_0(z), \varphi_1(z), \dots, \varphi_n(z).$$

Wir formulieren den

Satz IV. *Wenn die Funktionen $\varphi_r(z)$ eines Orthogonalsystems nicht alle zugleich an dem Punkte ζ , der kein Windungspunkt sein soll, verschwinden, dann besitzen die Integrale aller linearen Verbindungen*

$$x_0 \varphi_0(z) + x_1 \varphi_1(z) + x_2 \varphi_2(z), \dots,$$

für welche $\sum |c_r|^2$ konvergent ist, und die in ζ den Wert annehmen, ein Minimum. Es beträgt

$$(56) \quad \lambda_{\varphi}(\zeta) = \frac{1}{K_{\varphi}(\zeta, \zeta)}.$$

Die dazugehörige Minimalfunktion ist eindeutig:

$$(57) \quad w_{\varphi}(\zeta, z) = \frac{K_{\varphi}(\zeta, z)}{K_{\varphi}(\zeta, \zeta)}.$$

Die Funktionen (56) und (57) können durch die Funktionen

$$(58) \quad \lambda_{\varphi_n}(\zeta) = \frac{1}{K_{\varphi_n}(\zeta, \zeta)}$$

und

$$(59) \quad w_{\varphi_n}(\zeta, z) = \frac{K_{\varphi_n}(\zeta, z)}{K_{\varphi_n}(\zeta, \zeta)}$$

approximiert werden, welche dieselben Minimaleigenschaften in bezug auf die reduzierten Systeme

$$\varphi_0(z), \varphi_1(z), \dots, \varphi_n(z)$$

aufweisen.

13. Von einem Orthogonalsystem $\varphi_r(z)$ wollen wir sagen, daß es in ζ abgeschlossen ist, wenn jede zu allen Funktionen $\varphi_r(z)$ orthogonale Funk-

tion im Punkte ζ verschwindet. Wenn ein System in einer Folge von Punkten abgeschlossen ist, welche sich im Innern von \mathfrak{B} häufen, dann muß eine zum System orthogonale Funktion identisch verschwinden. Ein derartiges System wollen wir kurz als abgeschlossen bezeichnen.

Satz V. *Jede Funktion vom endlichen Typus läßt sich nach den Funktionen eines abgeschlossenen Systems entwickeln und zwar in der Fourierschen Gestalt:*

$$(60) \quad f(\mathfrak{B}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_{\nu}(z) \int_{\mathfrak{B}} f(z) \overline{\varphi_{\nu}(z)} d\omega.$$

Als Entwicklung mit Koeffizienten mit konvergenter Quadsumme ihrer absoluten Beträge ist die Darstellung (60) sogar eindeutig.

Man bilde die Differenz

$$(61) \quad R(z) = f(z) - \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_{\nu}(z) \int_{\mathfrak{B}} f(z) \overline{\varphi_{\nu}(z)} d\omega.$$

Diese Funktion ist nach der Besselschen Ungleichung, nach Satz 3 (Punkt 11) und Satz 1 (Punkt 7) vom endlichen Typus. Das Integral

$$\int_{\mathfrak{B}} R(z) \overline{\varphi_k(z)} d\omega$$

hat demnach einen Sinn, und zwar kann man für $R(z)$ den Ausdruck aus der Gleichung (61) einsetzen und gliedweise integrieren, wie wir im Punkt 11 festgestellt haben. Hieraus

$$(62) \quad \int_{\mathfrak{B}} R(z) \overline{\varphi_k(z)} d\omega = 0.$$

Aus der Abgeschlossenheit des Systems folgt danach, daß die Funktion $R(z)$ identisch verschwinden muß, daß also

$$(60) \quad f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_{\nu}(z) \int_{\mathfrak{B}} f(z) \overline{\varphi_{\nu}(z)} d\omega.$$

Über den Zusammenhang der Abgeschlossenheit mit der Vollständigkeit im Hilbertschen Sinne wird an einer späteren Stelle die Rede sein (§ 5).

§ 4.

Beweis für die Existenz abgeschlossener Systeme.

Wir wenden uns jetzt der Frage zu, ob es zu jedem Bereiche ein abgeschlossenes System gibt.

14. Zu diesem Zweck wollen wir zuvor etwas auf die Frage der Orthogonalisierung von Funktionen eingehen.

Es sei eine Folge von Funktionen vom endlichen Typus gegeben:

$$F_0(z), F_1(z), F_2(z), \dots$$

von denen nicht endlich viele linear abhängen. Man bilde aus ihnen nach dem Schmidtschen Verfahren das Orthogonalsystem

$$(63) \quad \varphi_n(z) = c_{n0} F_0(z) + c_{n1} F_1(z) + \dots + c_{nn} F_n(z) \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Dabei ist c_{kk} immer von Null verschieden. Hieraus sieht man sofort, daß die $n+1$ ersten Funktionen $\varphi_\nu(z)$ dann und nur dann an einer Stelle ζ verschwinden können, wenn es die $n+1$ ersten Funktionen $F_\nu(z)$ tun, und umgekehrt. Die Funktionen

$$F_0(z), F_1(z), \dots, F_n(z)$$

mögen nun in ζ (kein Windungspunkt!) nicht zugleich verschwinden. Dann suche man unter allen Funktionen

$$x_0 F_0(z) + x_1 F_1(z) + \dots + x_n F_n(z),$$

welche an der Stelle ζ den Wert 1 annehmen, diejenige heraus, welche das kleinste Integral aufweist. Man kommt dann offenbar auf die Funktion

$$(64) \quad w_{F_n}(\zeta, z) = w_{\varphi_n}(\zeta, z) = \frac{K_{\varphi_n}(\zeta, z)}{K_{\varphi_n}(\zeta, \zeta)}$$

und das Minimum

$$(65) \quad \lambda_{F_n}(\zeta) = \lambda_{\varphi_n}(\zeta) = \frac{1}{K_{\varphi_n}(\zeta, \zeta)}.$$

Hieraus können wir ableiten den

Satz VI. *Es mögen zwei Folgen von Funktionen vom endlichen Typus gegeben sein:*

$$F_0(z), F_1(z), F_2(z), \dots$$

und

$$G_0(z), G_1(z), G_2(z), \dots$$

und es möge jede Funktion $F(z)$ in der $G(z)$ -Folge vorkommen. Man streiche jetzt in jeder der Folgen alle solche Funktionen, die sich als lineare Verbindung vorausgehender Funktionen darstellen lassen. Die zurückgebliebenen Funktionen bringe man durch Orthogonalisierung in die Gestalt:

$$\varphi_0(z), \varphi_1(z), \dots,$$

$$\psi_1(z), \psi_2(z), \dots,$$

dann besteht die Relation:

$$(66) \quad K_\varphi(\zeta, \zeta) \leq K_\psi(\zeta, \zeta).$$

Man greife einen Punkt ζ heraus. Wenn $K_\varphi(\zeta, \zeta)$ verschwindet, dann ist (66) offenbar richtig. Sonst gibt es eine Zahl n , so daß $K_{\varphi_n}(\zeta, \zeta)$ von Null verschieden ist, wenn $n \geq N$. Man greife eine solche Zahl n heraus. Der reziproke Wert von $K_{\varphi_n}(\zeta, \zeta)$ bedeutet aber nach (65) ein gewisses Minimum, in welches n Funktionen $F(z)$ eingehen. Dann kann man aber einen genügend großen Index n_1 angeben, von der Art, daß unter den Funktionen $G(z)$, welche in $K_{\varphi_{n_1}}(\zeta, \zeta)$ eingehen, sich alle fraglichen Funktionen F befinden, oder gewisse gleichwertige Funktionen $G(z)$ [wenn nämlich in der $G(z)$ -Folge die eine oder andere Funktion $F(z)$ nicht mehr vorhanden sein sollte, weil sie als lineare Verbindung vorausgehender $F(z)$ und $G(z)$ gestrichen wurde]. Das entsprechende Minimum ist jedenfalls nicht größer als

$$\frac{1}{K_{\varphi_n}(\zeta, \zeta)},$$

also

$$K_{\varphi_n}(\zeta, \zeta) \leq K_{\varphi_{n_1}}(\zeta, \zeta).$$

Hieraus folgt aber:

$$(66) \quad K_\varphi(\zeta, \zeta) \leq K_{\varphi_{n_1}}(\zeta, \zeta),$$

womit unser Satz bewiesen ist.

15. Wir fassen jetzt einen Nichtwindungspunkt ζ ins Auge. Wir bilden alle möglichen Orthogonalsysteme und die dazugehörigen Funktionen

$$K_\varphi(\zeta, \zeta).$$

Da doch diese Zahlen für alle Systeme $\varphi(z)$ beschränkt sind, besitzen sie eine obere Grenze, die wir mit

$$K(\zeta, \zeta)$$

bezeichnen.

Wir beweisen nun in erster Linie, daß diese obere Grenze ein Maximum ist, d. h. daß es mindestens ein Orthogonalsystem gibt, dessen Kern an der Stelle ζ den Wert $K(\zeta, \zeta)$ annimmt. Der Fall $K(\zeta, \zeta) = 0$ erledigt sich sofort; wir schließen ihn daher aus. Man wähle nun eine Folge von Kernzahlen

$$K_{\varphi^{(1)}}(\zeta, \zeta), \quad K_{\varphi^{(2)}}(\zeta, \zeta),$$

welche gegen $K_\varphi(\zeta, \zeta)$ konvergieren. Die dazugehörigen Orthogonalsysteme mögen lauten:

$$\begin{array}{cccc} \varphi_0^{(1)}(z), & \varphi_1^{(1)}(z), & \varphi_2^{(1)}(z), & \dots \\ \varphi_0^{(2)}(z), & \varphi_1^{(2)}(z), & \varphi_2^{(2)}(z), & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

Wenn man jetzt alle diese Funktionen in eine Reihe ordnet, die linear

abhängigen nach unserer Vorschrift streicht und den Rest orthogonalisiert, dann erhält man ein System der gewünschten Art. Denn berechnet man seinen Kern mit

$$K_{\varphi}(\zeta, z),$$

dann bestehen nach Satz VI die Ungleichungen:

$$K_{\varphi}(\zeta, \zeta) \geq K_{\varphi^{(n)}}(\zeta, \zeta).$$

Aus der Definition von $K(\zeta, \zeta)$ schließt man sofort auf

$$K_{\varphi}(\zeta, \zeta) \geq K(\zeta, \zeta),$$

da aber $K(\zeta, \zeta)$ die obere Grenze aller Kernwerte in ζ bedeutet, ist es nur möglich, daß

$$(67) \quad K_{\varphi}(\zeta, \zeta) = K(\zeta, \zeta).$$

Das so erhaltene System ist offenbar in ζ abgeschlossen, denn jede weitere in ζ nicht verschwindende Orthogonalfunktion würde den Kern vergrößern, was aber unmöglich ist.

Nimmt man jetzt eine Folge von Punkten ζ_n , die gegen einen inneren Punkt des Bereiches konvergieren, bestimmt dann dazugehörige abgeschlossene Systeme und bildet aus all diesen Systemen ein neues Orthogonalsystem, dann muß nach Satz VI dieses System in jedem Punkte ζ_n abgeschlossen, also auch im ganzen Bereich \mathfrak{B} abgeschlossen sein.

Satz VII. *Es gibt mindestens ein abgeschlossenes Orthogonalsystem.*

16. Man überzeugt sich leicht, daß der Kern des Bereiches — so wollen wir die Funktion $K_{\varphi}(\zeta, \zeta)$ bezeichnen — nur in Punkten verschwinden kann, die sich nirgends im Inneren häufen.

Satz VIII. *ζ sei ein Punkt, in welchem $K(\zeta, \zeta)$ nicht verschwindet. Dann liefert*

$$(68) \quad w(\zeta, z) = \frac{K(\zeta, z)}{K(\zeta, \zeta)}$$

in eindeutiger Weise diejenige Funktion, welche von allen Funktionen, die in ζ den Wert 1 annehmen, das kleinste Integral hat.

Denn jede Funktion vom endlichen Typus läßt sich nach einem bestimmten abgeschlossenen System entwickeln. Jetzt brauchen wir nur noch Satz IV (Punkt 12) anzuwenden.

Als interessante Folgerung möchten wir festhalten, daß für alle abgeschlossenen Systeme nicht nur $K_{\varphi}(\zeta, \zeta)$, sondern auch die Funktion $K_{\varphi}(\zeta, z)$ dieselbe ist.

Beschränken wir uns für den Augenblick auf einfach zusammenhängende

Bereiche. Wenn $f(z)$ in \mathfrak{B} eindeutig und analytisch ist, dann ist es auch die Funktion

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(z) dz.$$

$F(z)$ liefert dann eine (im weiteren Sinne) konforme Abbildung von \mathfrak{B} auf einen Bereich vom Inhalt

$$\int_{\mathfrak{B}} f(z) \overline{f(z)} d\omega.$$

Satz VIII besagt dann, daß es unter allen solchen Abbildungen, die im Punkte ζ flächentreu sind, eine und nur eine gibt, für welche der Inhalt des Bildbereiches ein Minimum hat.

Nach Bieberbach (l. c.) liefert das Linienintegral von $w(\zeta, z)$ eine Funktion, welche den Bereich auf einen Kreis abbildet. Und wegen der Wichtigkeit dieser Funktion ist es von Belang, daß man die Funktion $w(\zeta, z)$ gleichmäßig approximieren kann durch die Funktionen $w_{\varphi_n}(\zeta, z)$ irgendeines abgeschlossenen Systems. Besonders dann, wenn man ein abgeschlossenes System auf einfache Art herstellen kann.

Wir führen hier ohne Beweis an, daß man z. B. für einen schlichten, von einer Jordanschen Kurve eingeschlossenen Bereich ein abgeschlossenes System durch Orthogonalisierung der Funktionen

$$1, z, z^2, z^3, \dots$$

erreichen kann. Die Kreisabbildungsfunktion läßt sich dann approximieren durch Polynome, von denen jedes unter den Polynomen desselben Grades die Minimaleigenschaft besitzt (Bieberbach, l. c.).

§ 5.

Gegenseitige Beziehungen von Orthogonalsystemen.

17. Es liege ein abgeschlossenes System $\varphi_n(z)$ vor. $\psi_n(z)$ sei ein anderes System, über das wir nichts weiter voraussetzen. Nach Satz V können wir entwickeln:

$$(69) \quad \psi_i(z) = \alpha_{i0} \varphi_0(z) + \alpha_{i1} \varphi_1(z) + \dots \quad (i = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Nach Satz III folgern wir die Relationen

$$(70) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{in} \bar{\alpha}_{kn} = \begin{cases} 1 & i = k, \\ 0 & i \neq k. \end{cases}$$

Hieraus ist ersichtlich, daß die lineare Substitution

$$(71) \quad y_i = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{in} x_n, \quad \alpha_{ik} = \int_{\mathfrak{B}} \psi_i(z) \overline{\psi_k(z)} d\omega$$

zeilenweis normiert und orthogonal, also jedenfalls beschränkt ist. Ein derartiges Zeilensystem kann man aber auf alle Fälle zu einem solchen vervollständigenden, welches auch kolonnenweis normiert und orthogonal ist. Die hinzukommenden Zeilen seien

$$\beta_{i0}, \beta_{i1}, \beta_{i2}, \dots,$$

und die entsprechenden Funktionen:

$$(72) \quad \psi'_i(z) = \beta_{i0} \varphi_0(z) + \beta_{i1} \varphi_1(z) + \beta_{i2} \varphi_2(z) + \dots$$

Die Funktionen $\varphi(z)$ und $\psi'(z)$ bilden zusammengenommen ein Orthogonalsystem, und aus den Relationen

$$(73) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{ni} \bar{a}_{nk} + \sum_n \beta_{ni} \bar{\beta}_{nk} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

schließt man auf:

$$(74) \quad \sum_i |\psi_i(\zeta)|^2 + \sum_i |\psi'_i(\zeta)|^2 = \sum_i |\varphi_i(\zeta)|^2.$$

Daraus ersieht man, daß dann und nur dann die Gleichung

$$K_\varphi(\zeta, \zeta) = K_\psi(\zeta, \zeta)$$

bestehen kann, wenn sämtliche Funktionen $\psi'(z)$, also nach Satz III sämtliche Koeffizienten β verschwinden. Also:

Satz IX. *Aus einem abgeschlossenen System geht jedes andere abgeschlossene System durch eine vollständige orthogonale Substitution hervor; umgekehrt liefert jede vollständige orthogonale Substitution eines abgeschlossenen Systems wiederum ein System derselben Art.*

Jedes Orthogonalsystem kann durch Hinzufügung von Funktionen abgeschlossen werden.

18. Aus der Relation

$$(75) \quad \int_{\mathfrak{B}} \left| f(z) - \sum_r \varphi_r(z) \int_{\mathfrak{B}} f(z) \overline{\varphi_r(z)} \right|^2 \\ = \int_{\mathfrak{B}} f(z) \overline{f(z)} d\omega - \sum_r \left| \int_{\mathfrak{B}} f(z) \overline{\varphi_r(z)} d\omega \right|^2$$

ersehen wir sofort den

Satz X. *Jedes abgeschlossene System ist im Hilbertschen Sinne vollständig⁷⁾ und umgekehrt.*

⁷⁾ Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Teubner, 1912, Seite IX.

19. Wir gehen jetzt auf eine Verallgemeinerung des Satzes IX (Pkt. 17) aus. Um diese abzuleiten, schicken wir eine andere Betrachtung voraus:

Satz XI. *Es sei eine beschränkte quadratische Form*

$$\sum_{i,k} a_{ik} \bar{x}_i x_k$$

und ein beliebiges Orthogonalsystem $\varphi_r(z)$ gegeben. Die Funktion

$$(76) \quad M(\zeta, \zeta) = \sum_{i,k} a_{ik} \overline{\varphi_i(\zeta)} \varphi_k(\zeta)$$

verschwindet dann und nur dann identisch in ζ , wenn alle Koeffizienten a_{ik} identisch verschwinden.

Zuerst weisen wir nach, wie nach den Voraussetzungen des Satzes auch die Funktion zweier Variablen

$$(77) \quad M(\zeta, z) = \sum_{i,k} a_{ik} \overline{\varphi_i(\zeta)} \varphi_k(z)$$

identisch verschwinden muß. Denn man greife einen Nichtwindungspunkt heraus und verlege ihn, der Einfachheit wegen, in den Anfangspunkt. Um diesen Punkt herum können wir entwickeln:

$$(78) \quad M(\zeta, z) = \sum_{l,k \geq 0} c_{lk} \bar{\zeta}^l z^k = \sum_{s=0}^{\infty} \left(\sum_{l+k=s} c_{lk} \bar{\zeta}^l z^k \right).$$

Wir betrachten speziell die Funktion

$$(79) \quad M(\zeta, \zeta) = \sum_{s=0}^{\infty} \left(\sum_{l+k=s} c_{lk} \bar{\zeta}^l \zeta^k \right).$$

Man setze hierin

$$\zeta = r e^{\vartheta i},$$

also

$$(80) \quad M(\zeta, \zeta) = \sum_{s=0}^{\infty} r^s \left(\sum_{l+k=s} c_{lk} e^{(l-k)\vartheta i} \right);$$

lassen wir in (80) ϑ fest und lassen r variieren und bedenken, daß $M(\zeta, \zeta)$ identisch verschwinden soll, dann kommen wir auf die Gleichung

$$(81) \quad \sum_{l+k=s} c_{lk} e^{(l-k)\vartheta i} = 0.$$

Der linksstehende Ausdruck in der letzten Gleichung kann aber als Polynom in $e^{\vartheta i}$ nur dann identisch verschwinden, wenn jeder Koeffizient c_{lk} identisch verschwindet. Folglich verschwindet $M(\zeta, z)$ identisch in ζ und z .

Hält man jetzt einen Punkt ζ fest, dann ist $M(\zeta, z)$ als Funktion der Variablen z vom endlichen Typus, weil die Form $\sum a_{ik} \bar{x}_i x_k$ beschränkt

ist. Wenn sie aber identisch verschwindet, dann müssen nach Satz III die Gleichungen:

$$(82) \quad \sum_i a_{ik} \overline{\varphi_i(\zeta)} = 0$$

bestehen. Aus demselben Satze folgt dann aber

$$a_{ik} = 0,$$

was zu beweisen war.

20. Es mögen jetzt zwei Orthogonalsysteme: $\varphi_\nu(z)$ und $\psi_\nu(z)$ gegeben sein. Wir vervollständigen das $\varphi(z)$ -System durch die Funktionen $\varphi'(z)$ [Satz X] und entwickeln

$$\psi_i(z) = \alpha_{i0} \varphi_0(z) + \alpha_{i1} \varphi_1(z) + \dots + \alpha_{i0} \varphi'_0(z) + \alpha'_{i1} \varphi'_1(z) + \dots;$$

hieraus bilden wir

$$(83) \quad \begin{aligned} \sum |\psi_i(\zeta)|^2 &= \sum_{i,k} a_{ik} \varphi_i(\zeta) \overline{\varphi_k(\zeta)} + 2\Re \sum_{i,k} b_{ik} \varphi_i(\zeta) \overline{\varphi'_k(\zeta)} \\ &\quad + \sum c_{ik} \varphi'_i(\zeta) \overline{\varphi'_k(\zeta)}, \end{aligned}$$

wobei wir gesetzt haben:

$$a_{ik} = \sum_n \alpha_{ni} \overline{\alpha_{nk}}, \quad b_{ik} = \sum_n \alpha_{ni} \overline{\alpha'_{nk}}, \quad c_{ik} = \sum_n \alpha'_{ni} \overline{\alpha'_{nk}}.$$

Die Form (83) ist, als quadratische Form in $\varphi(z)$ und $\varphi'(z)$ betrachtet, beschränkt. Wenn wir noch voraussetzen, daß

$$K_\varphi(\zeta, \zeta) = K_\psi(\zeta, \zeta),$$

dann ergibt sich aus (83) unter Hinzuziehung von Satz XI

$$c_{ii} = 0,$$

daß also jeder Koeffizient α' verschwindet und

$$\psi_i(\zeta) = \alpha_{i0} \varphi_0 + \alpha_{i1} \varphi_1 + \dots$$

Satz XII. Wenn für zwei Orthogonalsysteme $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ die Gleichung

$$K_\psi(\zeta, \zeta) = K_\varphi(\zeta, \zeta)$$

besteht, dann geht das eine System aus dem andern durch eine vollständige orthogonale Substitution hervor.

§ 6.

Über eine spezielle Art von Orthogonalsystemen.

Den bisherigen Entwicklungen lagen die allgemeinsten Funktionen vom endlichen Typus zugrunde; wir ließen insbesondere Pole in den Windungspunkten zu. In diesem Paragraphen wollen wir uns auf Funktionen

beschränken, die auch in den Windungspunkten endlich sind, in deren Potenzreihenentwicklungen also nie Potenzen mit negativen Exponenten vorkommen; und nur solche Funktionen wollen wir als vom endlichen Typus auszeichnen. Es ist möglich, daß jetzt noch mehr Bereiche als im allgemeinen Falle ausschalten, für die es also keine Funktion vom endlichen Typus gibt. Während wir sonst die Windungspunkte immer ausnehmen mußten, können wir sie jetzt den sonstigen inneren Punkten gleichstellen; sie verlieren jede Ausnahmestellung.

21. Wir weisen zuerst nach, daß der Kern eines beliebigen Orthogonalsystems in jedem abgeschlossenen Teilbereich von \mathfrak{B} beschränkt ist, und zwar gleichmäßig für alle Systeme.

ζ_1 sei ein Windungspunkt $k-1$ -ter Ordnung, den wir der Einfachheit halber in den Anfangspunkt verlegen. Wir fassen die größte k -blättrige Kreisumgebung \mathfrak{K} von ζ_1 ins Auge und bezeichnen ihren Radius mit $(2r)^k$. Eine Funktion vom endlichen Typus läßt dann die in \mathfrak{K} konvergierende Entwicklung

$$f(z) = a_0 + a_1 z^{\frac{1}{k}} + a_2 z^{\frac{2}{k}} + a_3 z^{\frac{3}{k}} + \dots$$

zu. Um den Wert des Integrals von $f(z)$ über \mathfrak{K} nach unten einzuschränken, führen wir die Funktion

$$F(z) = \int_0^z f(z) dz = a_0 z^{\frac{k}{k}} + \frac{a_1}{1 + \frac{1}{k}} z^{1 + \frac{1}{k}} + \frac{a_2}{1 + \frac{2}{k}} z^{1 + \frac{2}{k}} + \dots$$

ein. Dann lautet das Integral

$$J = \int_{\mathfrak{K}} \left| \frac{dF}{dz} \right|^2 dx dy.$$

Wir führen jetzt die Transformation

$$z = z'^k$$

ein, durch welche \mathfrak{K} in einen Kreis K mit dem Radius $2r$ übergeht. Das Integral lautet:

$$J = \int_K \left| \frac{dF}{dz'} \right|^2 dx' dy'.$$

In

$$\frac{dF}{dz'} = k (a_0 z'^{k-1} + a_1 z'^k + a_2 z'^{k+1} + \dots)$$

setze man

$$x + iy = \varrho e^{i\vartheta}, \quad 0 \leq \varrho \leq 2r, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi;$$

dann ist

$$J = \text{konst.} \sum_{i=0}^{\infty} |a_i|^2 \frac{(2r)^{2k+2i}}{k+i}.$$

Dafür schreiben wir

$$J = \text{konst.} \sum |x_i|^2$$

und denken an die Substitution:

$$x_i = a_i \frac{(2r)^{k+i}}{\sqrt{k+i}}.$$

Wenn nun die Funktion $f(z)$ in einem innerhalb \mathfrak{K} gelegenen Punkte ζ den Wert 1 annimmt, einem Punkte, dem in K der Punkt

$$\zeta' = \zeta^{\frac{1}{k}}$$

entspricht, dann haben wir die Bedingung

$$a_0 + a_1 \zeta' + a_2 \zeta'^2 + \dots = 1.$$

Wir schreiben sie

$$x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots = 1,$$

wobei

$$y_i = \frac{\zeta'^i}{(2r)^{k+i}} \sqrt{k+i}.$$

Man überzeugt sich leicht, daß die Summe

$$\sum_{i=0}^{\infty} |y_i|^2$$

konvergent ist. Der Ausdruck

$$\sum |x_i|^2$$

hat aber unter der Nebenbedingung

$$\sum_{i=0}^{\infty} x_i y_i = 1$$

das Minimum

$$\frac{1}{\sum_{i=0}^{\infty} |y_i|^2}.$$

Folglich ist

$$J \geq \text{konst.} \frac{1}{\sum |y_i|^2},$$

und zwar kann man für alle Punkte $|\zeta'| \leq r$, oder

$$|\zeta| \leq r^k$$

eine gleichmäßige Schranke angeben:

$$J \geq \text{konst.} \frac{1}{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{k+i}{2^{k+i}}}.$$

Es liege jetzt ein abgeschlossener Teilbereich \mathfrak{B}_1 von \mathfrak{B} vor. In Anschluß an § 2, Punkt 9 wollen wir beweisen, daß für jedes System $\varphi_r(z)$ die Minimalzahl

$$\lambda_r(\zeta)$$

in allen Punkten von \mathfrak{B}_1 gleichmäßig beschränkt ist.

Man bedenke, daß \mathfrak{B}_1 als geschlossene Teilmenge von \mathfrak{B} nur endlich viele Windungspunkte enthalten kann. Man schneide aus \mathfrak{B}_1 jeden Windungspunkt ζ_r mitsamt der kreisförmigen Umgebung vom Radius r_r^k heraus. Für jede dieser, in endlicher Zahl vorhandener Punktmengen haben wir den Satz eben bewiesen. Für den übrigen Teil von \mathfrak{B} folgt unsere Behauptung aus Satz II.

Alle übrigen Sätze, die sich auf die allgemeinen Funktionen vom endlichen Typus bezogen, gelten auch jetzt, und zwar mit Einschluß der Windungspunkte. Die so erhaltenen abgeschlossenen Systeme werden selbstverständlich im allgemeinen Falle nicht dieselben sein wie im jetzigen spezielleren Falle. Ähnliches gilt von den Minimalfunktionen $w_r(\zeta, z)$.

(Eingegangen am 7. Juni 1921.)