19.

De compositione numerorum e cubis integris positivis.

(Auctore *Zornow*, in Gymnasio Kneiphofiano Regiomantano magistro superiore.)

Eduardus Waring in *Meditationibus algebraicis* (Cantabrigiae a. 1782, ed. 3.) pag. 349. inter plura theoremata, quae sine demonstratione proponit, hoc habet:

„*Omnis integer numerus vel est cubus; vel e duobus, tribus,* 4, 5, „6, 7, 8 *vel novem cubis compositus: est etiam quadrato-quadra-* „*tus vel e duobus, tribus, etc. usque ad novemdecim compositus,* „*et sic deinceps: consimilia etiam affirmari possunt (exceptis exci-* „*piendis) de eodem numero quantitatum earundem dimensionum.*"

Verba postrema paullo obscuriora significare videntur, (quod ex insequentibus coniicere licet,) idem, quod de cubis et biquadratis, valere de formis generalioribus $a+bx+cx^2+dx^3$, $a+bx+cx^2+dx^3+ex^4$.

Theoremate antecedente communicato, excitavit me Cl. *Jacobi*, ut rem de cubis exemplis comprobarem. Qua de causa tabulam hic annexam calculavi pro compositione numerorum omnium inde a 1 usque ad 3000 e cubus integris positivis. In qua tabula pro singulis tribus millibus designant numeri ante columnas scripti *unitates*, numeri supra columnas scripti *centenarios.* In ipsis columnis invenitur pro unoquoque numero inter 1 et 3000 numerus minimus cuborum positivorum integrorum, e quibus ille additione componi possit. Exempli gratia, ut cognoscas, quinam sit numerus minimus cuborum integrorum positivorum, e quibus 2689 componatur, in tertio mille notas columnam horizontalem, cui praescriptus est 89, et verticalem, cui suprascriptus 6, et invenis in coniunctione duarum columnarum numerum 3, sive 2689 e tribus cubis positivis integris componi posse. Eadem tabula etiam ipsas decompositiones numerorum in numerum minimum cuborum facile suppeditat. A numero enim proposito n, cui in tabula respondeat numerus N, subducantur cubi, usque dum ad numerum $n-a^3$ pervenias, cui in tabula respondet $N-1$; de numero $n-a^3$ rursus subducus cubos, usque dum ad numerum $n-a^3-b^3$ pervenias, cui in tabula respondet numerus $N-2$, et ita pergis, quam diu licet: habebis decompositionem numeri n in N cubos, $n = a^3 + b^3 + c^3 + \ldots$. Exempli causa, si ipsos tres cubos cognoscere placet, quorum summa 2689, subductis a 2689 numeris 1, 8, 27 habes 2688, 2681, 2662, et huic postremo numero 2662 respondet in tabula 2; unde habetur $2689 = 27 + 2662 = 3^3 + 2.11^3$. Apud numerum 2406 invenis in tabula 6; ut ipsos 6 cubos cognoscas, quarum summa 2406, observas,

apud	$2406 - 1 = 2405$	inveniri in tabula	5
-	$2405 - 1 = 2404$	- - - - - -	4
-	$2404 - 1 = 2403$	- - - - - -	3
-	$2403 - 343 = 2060$	- - - - - -	2,

unde habes

$$2406 = 1 + 1 + 1 + 343 + 2060 = 3.1^3 + 7^3 + 7^3 + 11^3.$$

Tabula ea usque tantum uti convenit, sic uti antecc. factum, donec ad numerum pervenias, qui e duobus cubis componitur, quippe qui facilius sine tabula inveniuntur et semper in promptu sunt. Et si plures decompositionis modi dantur, eadem methodo per tabulam omnes invenis.

Eduardi Waring theorema de cubis tabula perfecte confirmat, simul autem graves eius modificationes affert. Docet enim tabula, *unicum tantum extare numerum* 23, *ad quem e cubis componendum novem cubis opus sit; viz.* $23 = 2.2^3 + 7.1^3$. Unde proponi potest theorema:

„*numerum quemlibet praeter* 23 *aut ex octo cubis aut e minore*
„*cuborum numero componi posse.*"

Deinde docet tabula, *extare unicos numeros* 15, 22, 50, 141, 167, 175, 186, 212, 238, 239, 364, 420, 428, 454, *qui non e minore cuborum numero quam octo componantur;* sive proponi potest theorema:

„*numerum qnemlibet maiorem quam* 454 *aut e septem cubis aut*
„*e minore cuborum numero componi posse.*"

Quae theoremata, pro omnibus numeris usque ad 3000 per tabulam nostram comprobata, sine ullo dubio generaliter valent.

Numerus maximus tabulae, ad cuius compositionem septem cubis indigemus, est 2183, neque inter numeros 917 hunc insequentes, quos calculavimus, ullum invenimus, qui non e sex cubis aut minore cuborum numero componi possit. Qua de re habetur theorema probabile:

„*numerum quemlibet maiorem quam* 2183 *aut e sex cubis aut e*
„*minore cuborum numero componi posse.*"

Numeri ad quorum compositionem septem cubis indiges, cum in secundo mille valde rari existant, curiosum est, inter eos numeros in tabula inveniri tres se proxime insequentes 1452, 1453, 1454.

Schema sequens indicat, quot inter binos cubos se proxime sequentes extent numeri, ad quorem compositionem 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 cubis indiges:

1—8—27—64—125—216—343—512—729—1000—1331—1728—2197—2744

2	1	2	3	3	5	6	6	8	7	9	10	10	13
3	1	3	5	7	12	14	22	26	32	39	45	54	62
4	1	3	7	11	21	24	42	60	78	98	117	141	191
5	1	3	8	14	24	33	48	70	101	126	148	182	216
6	1	2	8	15	15	33	32	44	48	56	71	75	64
7	1	2	4	9	9	14	14	8	4	2	5	6	0
8	0	2	1	1	4	2	4	0	0	0	0	0	0
9	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Docet schema, in magnis numeris rariores fieri etiam eos, ad quorum compositionem sex cubis opus sit; nam hos numeros inter 1728 et 2197 videmus existere 75, inter 2197 et 2744 tantum 64. Unde fieri potest, ut habeatur theorema:

„*certo limite transgresso, numeros omnes e quinque cubis aut mi-*
„*nore cuborum numero componi.*"

D. 25. Apr. 1835.

Primum Mille.

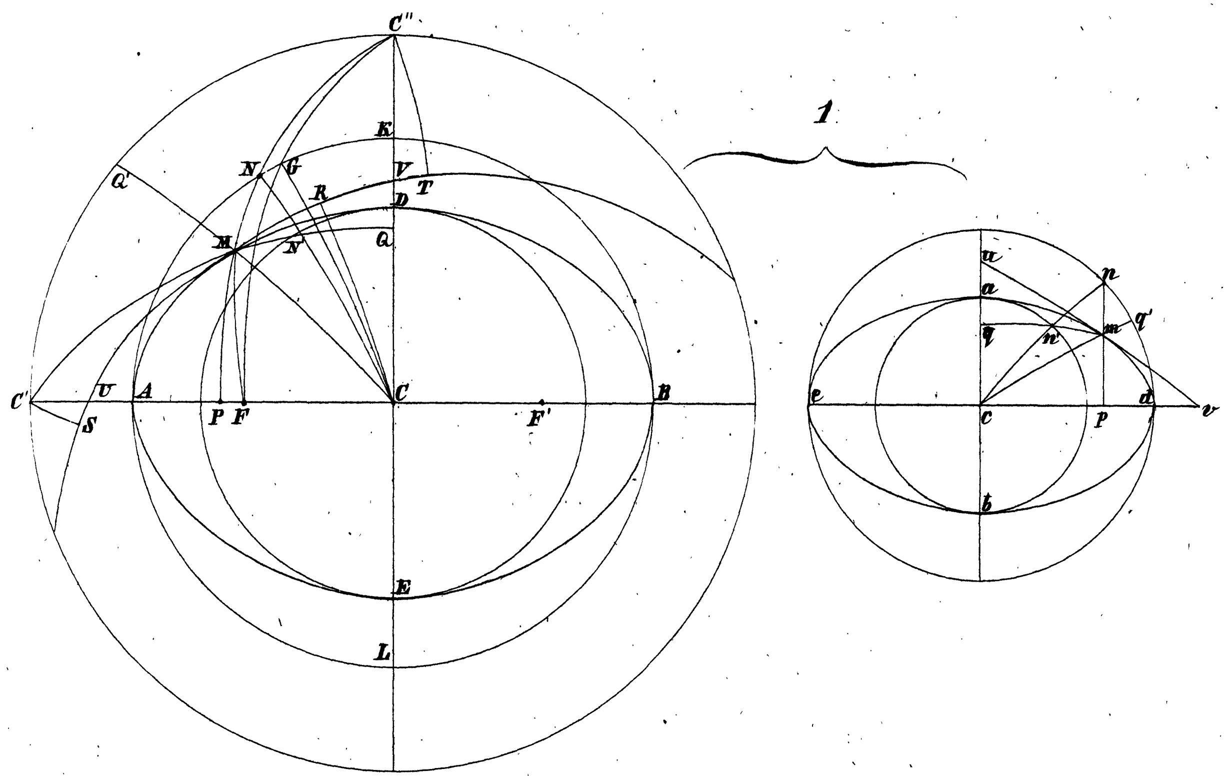
	01234	56789		01234	56789
1	15567	54335	51	46325	55465
2	26674	65443	52	52436	66564
3	37675	43554	53	63347	74433
4	46746	44455	54	24458	65524
5	56453	55566	55	33566	45325
6	67464	56666	56	44475	54234
7	74532	66655	57	55546	34335
8	14543	56654	58	66356	45446
9	25554	65444	59	57433	26556
10	36665	76544	60	63544	35665
11	47776	54435	61	74454	45544
12	57857	15446	62	35565	56335
13	67564	24356	63	44676	56435
14	78535	35445	64	15586	53345
15	85643	46556	65	26657	44446
16	25154	57555	66	37463	35554
17	36245	66554	67	48544	34565
18	43356	75453	68	54632	45564
19	54467	65543	69	65543	56655
20	65558	24534	70	46324	67446
21	76665	34444	71	55433	67544
22	87645	45555	72	25544	64453
23	96754	43666	73	36655	55454
24	36254	54666	74	47564	46555
25	41355	55665	75	58635	44346
26	52466	66544	76	65643	25455
27	13577	56654	77	76354	34466
28	22668	35245	78	57435	45554
29	33775	44144	79	63544	56653
30	44756	44255	80	34255	65543
31	55755	54366	81	35356	66534
32	46362	35445	82	44465	54434
33	52463	47556	83	55546	55344
34	63543	57655	84	66654	33445
35	24654	67765	85	77465	44555
36	33665	46354	86	68544	32665
37	44776	52255	87	74655	43744
38	55867	53346	88	45365	54554
39	66864	24445	89	42466	65445
40	57473	33456	90	53576	65545
41	63524	44556	91	24657	44454
42	74634	55666	92	33665	44355
43	35215	56556	93	44574	35255
44	44326	57463	94	55655	43366
45	54436	63352	95	65743	54455
46	65547	64453	96	56453	45555
47	76655	35544	97	53434	56556
48	67564	43455	98	64544	66555
49	74635	54566	99	35655	55564
50	85245	54377	100	44764	55441
	01234	56789		01234	56789

Secundum Mille.

	01234	56789		01234	56789
1	25555	54336	51	35436	66535
2	36665	55444	52	43547	56443
3	45553	54555	53	54457	35324
4	54544	45565	54	34567	46434
5	54434	55555	55	44646	35234
6	45445	56465	56	45552	45335
7	44543	65543	57	54453	45446
8	25554	64444	58	65422	55456
9	36655	65445	59	45533	36546
10	46766	44455	60	54544	46554
11	56654	53546	61	53455	44435
12	55654	24556	62	44466	55445
13	65444	35466	63	54556	46345
14	56544	46554	64	25563	54446
15	54543	56554	65	35544	55447
16	35254	65545	66	46533	45555
17	46355	64543	64	56434	45656
18	54466	55554	68	65343	56663
19	65565	54634	69	44444	55444
20	55555	35544	70	35435	66533
21	66555	45555	71	35544	56443
22	65543	36655	72	25544	63554
23	65544	44665	73	36655	64555
24	25355	55654	74	47444	32565
25	32456	65554	75	55545	43456
26	43556	66544	76	44454	34564
27	24566	65644	77	55445	45555
28	33666	45145	78	46544	54443
29	34565	55255	79	44554	65544
30	45554	45366	80	35355	44434
31	55614	54456	81	45466	35544
32	35423	45555	82	55555	43345
33	43534	56555	83	56653	34445
34	54644	66654	84	55564	34555
35	34655	55555	85	66533	45565
36	43665	36255	86	56444	43554
37	44676	43366	87	55455	54645
38	55655	54357	88	34366	55545
39	66625	35456	89	43467	46355
40	45334	44566	90	54565	54435
41	54235	45665	91	35664	45535
42	55344	56555	92	44554	45246
43	45325	56625	93	45644	46356
44	44436	45332	94	55545	54455
45	55446	54443	95	44424	65554
46	56556	65444	96	44434	56545
47	56635	24555	97	43545	55444
48	56445	34566	98	43655	65544
49	63344	45666	99	34555	54345
50	64355	55466	100	44665	45352
	01234	56789		01234	56789

Tertium Mille.

	01234	56789		01234	56789
1	35544	55445	51	44345	66646
2	46554	64555	52	54446	66254
3	54543	45556	53	55545	45333
4	55434	43654	54	45655	55444
5	45245	54554	55	55634	45345
6	54356	65545	56	56443	44346
7	54454	55454	57	65542	55446
8	35565	65425	58	66533	65556
9	46654	54235	59	35444	45654
10	57645	54344	60	23445	56362
11	65544	44455	61	34256	45443
12	55444	34564	62	44366	52544
13	55342	45555	63	55445	53455
14	64443	56644	64	36554	54446
15	45544	65554	65	46433	43556
16	46355	65434	66	57544	54666
17	37465	55344	67	45344	35645
18	45556	45455	68	34444	44453
19	56654	54545	69	35355	55523
20	65555	44545	70	45444	63634
21	55443	35655	71	25555	44244
22	55524	46655	72	36645	34334
23	54435	55654	73	45544	43345
24	33245	66545	74	56554	43455
25	43336	65443	75	56455	44556
26	54445	55352	76	45345	45564
27	35555	55443	77	46453	56534
28	44555	45254	78	55454	64534
29	45554	43365	79	35555	55345
30	55534	44466	80	46454	45444
31	65525	54565	81	46555	44445
32	44334	55555	82	56444	34455
33	54445	66553	83	67554	35436
34	45455	56433	84	54453	45545
35	43565	65534	85	53444	46645
36	54665	44344	86	43535	54545
37	55655	54445	87	33345	65353
38	66645	35456	88	44355	54454
39	56535	45565	89	54446	53344
40	55243	25666	90	65554	44443
41	65344	36554	91	46655	45544
42	44455	46544	92	55544	54355
43	54434	55535	93	44555	54456
44	44545	55143	94	54445	45553
45	55536	55244	95	44435	55464
46	66644	44355	96	43445	65534
47	66643	34454	97	51555	64444
48	46354	34565	98	32565	54344
49	54435	45665	99	43566	44445
50	55444	56555	100	54655	54353
	01234	56789		01234	56789


1
C″
K
V
T
D
N
G
R
Q′
M
N′
Q
C′
U
A
P
F
C
F′
B
S
E
L
u
n
a
m
q′
q
n′
e
c
p
d
v
b