

6. Die Faraday-Maxwellschen Spannungen; von G. Bakker.

Die Faradaysche Vorstellung über den Spannungszustand elektrischer, magnetischer oder elektromagnetischer Felder ist bekanntlich durch Maxwell mathematisch formuliert worden. Sehr oft aber werden nun die absoluten Werte dieser Spannungen, welche sich als Vektoren von Flächenintegralen präsentieren, identifiziert mit den Flächenkräften, welche nach der Elastizitätstheorie die Deformationen der Körper bestimmen. Da eine solche Auffassung *im allgemeinen* ganz irrig ist, wünsche ich einige hierauf bezügliche Bemerkungen zu machen.

Maxwell isoliert einen Teil des betrachteten Mediums durch eine geschlossene Fläche und zeigt, daß die Wirkung des übrigen Teiles auf den isolierten Teil in der Form eines Flächenintegrals, genommen über diese Fläche, dargestellt werden kann. Auf diese Weise findet er die bekannten Vektoren:

$$(1) \quad \begin{cases} p_{xx} = \frac{1}{8\pi} \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right\}^{(1)}, & p_{xy} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial x} \\ p_{yy} = \text{etc.} & p_{yz} = \text{etc.} \end{cases}$$

Der x -Komponent X der Kraft auf den isolierten Teil wird nun:

$$(2) \quad X = \int \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} \right) d\tau \quad (d\tau = \text{Raumelement})$$

und dieses Raumintegral kann wieder transformiert werden in ein Flächenintegral:

$$(3) \quad X = \int \left(p_{xx} \cos \lambda + p_{xy} \cos \mu + p_{xz} \cos \nu \right) ds$$

genommen über die Fläche, welche den isolierten Teil ganz einschließt.

Aus (2) folgt, daß die Größen p_{xx} etc., *aufgefaßt als definiert durch* (2), etwas Unbestimmtes haben. Denn wird z. B.

1) Sind die Einheiten nicht festgestellt, so ist mehr allgemein $1/8\pi$ durch $1/8\pi f$ zu ersetzen. Für die Schwere wird f negativ.

die Größe p_{xx} durch den ganzen isolierten Teil des Raumes um eine bestimmte Größe vermehrt, so würde man denselben Wert für X erhalten haben. Ist der isolierte Teil z. B. ein Teil von einem Dielektrikum, so kann man also die Spannungen¹⁾ p_{xx} etc. nicht mehr als die gewöhnlich in der Elektrizitätstheorie betrachteten Flächenkräfte¹⁾ (die inneren Spannungen) auffassen, da diese Größen in jedem Punkte einen bestimmten Wert haben und bestimmte Deformationen hervorrufen. Allein man kann behaupten, daß die Flächenkräfte (1) eine *mögliche* Auflösung geben, um die Kraft X durch ein Flächenintegral darzustellen. Wendet man die Faraday-Maxwellschen Auffassungen auf die Gravitation an und betrachtet man die Kräfte, welche durch die Schwere auf einen isolierten Teil der Erde ausgeübt werden, so sieht man sehr leicht ein, daß die Maxwellschen Flächenkräfte p_{xx} etc., auch was ihre absoluten Werte anbetrifft, ganz etwas anderes sind, als die Spannungen der Elastizität, welche den betrachteten Teil deformieren. (Der betrachtete Körper, *ohne* Gravitation gedacht, wird als im Null-Zustand befindlich aufgefaßt.)

Betrachten wir z. B. eine ruhende, homogene flüssige, gravitierende Kugel mit einer konstanten Dichte ρ und nennen wir für einen Punkt im Innern des Körpers die Beschleunigung ihrer Schwere g , so wird die Kraft auf die Volumeneinheit ρg ; ist weiter der Abstand vom Mittelpunkt r , so gibt die bekannte Gleichung der Hydrostatik:

$$dp = -\rho g dr.$$

Ist f die Gravitationskonstante, so ist weiter:

$$g = \frac{4}{3} \pi f \rho r.$$

Deshalb:

$$dp = -\frac{4}{3} \pi f \rho^2 r dr.$$

Ist R der Radius der Kugel und wirken auf sie keine äußeren Kräfte, so hat man:

$$(4a) \quad p = \frac{2}{3} \pi f \rho^2 (R^2 - r^2).$$

Im Mittelpunkt wird also der Druck:

$$(4b) \quad p_M = \frac{2}{3} \pi f \rho^2 R^2.$$

1) Was ihre absoluten Werte anbetrifft.

Nennt man die Gravitationsbeschleunigung an der Oberfläche der Kugel g_0 , so wird auch:

$$(5) \quad p_M = \frac{3}{8\pi f} g_0^2.$$

Da f sehr klein ist, würde für eine Wasserkugel von der Größe unserer Erde der innere Druck im Mittelpunkt *sehr groß* ausfallen. *Die Maxwellschen Flächenkräfte p_{xx} etc. werden hingegen im Mittelpunkt gleich Null*, denn die Differentialausdrücke:

$$\frac{\partial V}{\partial x} \text{ etc. (Kräfte auf die Masseneinheit bezogen)}$$

haben im Mittelpunkt den Wert Null.

Aus diesen Betrachtungen geht genügend hervor, daß die absoluten Werte der Maxwellschen Flächenkräfte nicht identifiziert werden dürfen mit denen der Spannungen (Drucke) der Elastizitätstheorie. Wenn also C. Christiansen und J. C. Müller in ihren „Elementen der theoretischen Physik“ (p. 105, § 31, zweite Auflage 1903) die Formeln (6) von § 31 vergleichen mit denen von § 29 (6), so soll das nicht in absolutem Sinne aufgefaßt werden.

In seiner „Theorie des Potentials“ (p. 259, § 6, II. Teil, III. Kapitel) bemerkt Emile Mathieu, daß die Deformationen eines dielektrischen Mittels nicht mit denjenigen eines isotropen festen Körpers verglichen werden können. Er schließt, *daß die Moleküle der Substanz, in welcher sich elastische Kräfte entwickeln, eine endliche Veränderung in ihrer Lagerung erleiden, indem sie sich nach den Kraftlinien richten.*

Unzweifelhaft sollen die elektrischen Kräfte die Beschaffenheit des Körpers ändern; *ich bin aber der Meinung, daß man nicht so weit zu gehen braucht*, um zu erklären, *weshalb* die Maxwellschen Flächenkräfte die Gleichungen der Elastizitätstheorie nicht befriedigen, aber daß schon aus obigen Auseinandersetzungen genügend hervorgeht, daß die Spannungen der Elastizitätstheorie, welche die Deformationen der Körper bestimmen, ganz etwas anderes sind, als die Flächenkräfte der Maxwellschen Theorie.

Mathematisch kommt die Sache auf das Folgende hinaus: Die Spannungen X_x X_y etc. der Elastizitätstheorie und die Vo-

lumenkräfte (X, Y, Z) genügen für das Gleichgewicht der Beziehungen:

$$(6) \quad \rho X + \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = 0 \text{ etc.}$$

Nun darf für die elektrostatischen Kräfte der Komponent ρX nach Maxwell ersetzt werden durch:

$$\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z}.$$

Also wird (6):

$$(7) \quad \frac{\partial (p_{xx} + X_x)}{\partial x} + \frac{\partial (p_{xy} + X_y)}{\partial y} + \frac{\partial (p_{xz} + X_z)}{\partial z} = 0.$$

Hieraus folgt nun aber nicht a priori:

$$p_{xx} = -X_x \text{ etc.}$$

Betrachten wir wieder z. B. eine homogene, ruhende, flüssige, gravitierende Kugel mit der Dichte ρ , frei von äußeren Kräften, so ist bekanntlich das Potential für einen inneren Punkt:

$$V = \frac{2}{3} \pi f \rho (x^2 + y^2 + z^2) - 2 \pi f \rho R^2. {}^1)$$

Hieraus findet man unmittelbar:

$$p_{xx} = \frac{2}{3} \pi f \rho^2 (x^2 - y^2 - z^2), \quad p_{xy} = \frac{4}{3} \pi f \rho^2 xy, \quad p_{xz} = \frac{4}{3} \pi f \rho^2 xz$$

und (4a) gibt:

$$X_x = Y_y = Z_z = p = \frac{2}{3} \pi f \rho^2 (R^2 - x^2 - y^2 - z^2),$$

während:

$$X_y = Y_z = Z_x = 0.$$

Deshalb:

$$\frac{\partial (p_{xx} + X_x)}{\partial x} = \frac{4}{3} \pi f \rho^2 x - \frac{4}{3} \pi f \rho^2 x,$$

$$\frac{\partial (p_{xy} + X_y)}{\partial y} = \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} = \frac{4}{3} \pi f \rho^2 x,$$

und

$$\frac{\partial (p_{xz} + X_z)}{\partial z} = \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} = \frac{4}{3} \pi f \rho^2 x.$$

Also notwendigerweise:

$$\frac{\partial (p_{xx} + X_x)}{\partial x} + \frac{\partial (p_{xy} + X_y)}{\partial y} + \frac{\partial (p_{xz} + X_z)}{\partial z} = 0.$$

1) Vgl. z. B. Vorlesungen über die im umgekehrten Verhältnis des Quadrates der Entfernung wirkenden Kräfte von P. G. Lejeune Dirichlet, p. 17.

Als ein anderes Beispiel betrachte ich eine elektrisierte Hohlkugel. Die Kugel soll ein Leiter sein und auf ihrer Oberfläche die Ladung $+e$ besitzen. *Die Flächenkräfte p_{xx} etc. von Maxwell sind im Innern der Kugel gleich Null*, denn das Potential ist im Innern eine Konstante. Die Spannungen X_x etc. hingegen findet man auf folgende Weise.

Wenn der Kugelmittelpunkt der Koordinatenanfangspunkt ist und für einen Punkt die Größe ε nur eine Funktion des Abstandes r zum Mittelpunkt ist, so ergibt sich für die Verrückung dieses Punktes:

$$\xi = \varepsilon x, \quad \eta = \varepsilon y, \quad \zeta = \varepsilon z.$$

Ist φ eine neue Funktion von r , so können wir also setzen:

$$\xi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \eta = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \zeta = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Im Innern der Kugel wirken keine Volumenkräfte, denn dort ist $\rho = 0$ und die dielektrische Konstante ist eine Konstante.¹⁾ Also:

$$(8) \quad \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = 0 \text{ etc.}$$

Hieraus folgt mit Hilfe der bekannten Gleichungen:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \mu \nabla^2 \xi = 0 \text{ etc. } \{ \Theta = \text{Dilatation} \},$$

oder:

$$\nabla^2 \varphi = \text{Konstante} = a.$$

Die Beziehungen zwischen Verrückungen und Spannungen werden nun:

$$X_x = \lambda a + 2\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \text{ etc.}, \quad Z_y = 2\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} \text{ etc.}$$

und hieraus mit Hilfe der Formel für die Spannung auf einem Flächenelement:

$$P = X_x \cos \alpha + X_y \cos \beta + X_z \cos \gamma,$$

$$P = \left(\lambda a + \mu 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right) \frac{x}{r}.$$

1) Vgl. z. B. C. Christiansen, Elemente der Theor. Physik p. 108. Erste Auflage.

Auf diese Weise findet man in der Theorie der Elastizität eine Hauptspannung:

$$A = \lambda a + 2 \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}$$

in der Richtung des Radius und für ein Flächenelement, das r enthält, eine Hauptspannung:

$$B = \lambda a + \frac{2 \mu}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r}.$$

Die Beziehung $\Delta^2 \varphi = a$ wird hier:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 r \varphi}{\partial r^2} = a,$$

woraus

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{3} a r \frac{b}{r^2}$$

und

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = \frac{1}{3} a - \frac{2 b}{r^3}.$$

Demnach:

$$(9a) \quad A = (\lambda + \frac{2}{3} \mu) a - \frac{4 \mu b}{r^3}$$

und

$$(9b) \quad A = (\lambda + \frac{2}{3} \mu) a + \frac{2 \mu b}{r^3}.$$

Hat die betrachtete Hohlkugel nur eine Ladung e auf ihrer äußeren Oberfläche und sind R_1 und R_2 der innere bez. der äußere Radius, so ist für R_1 : $A = 0$ und für R_2 :

$$A = \frac{K}{8 \pi} E^2,$$

wenn E die „elektrische Kraft“ und K die dielektrische Konstante des umgebenden Mittels ist. Hieraus findet man:

$$a = \frac{3}{3 \lambda + 2 \mu} \frac{K}{8 \pi} E^2 \cdot \frac{R_2^3}{R_2^3 - R_1^3}$$

und

$$b = \frac{K}{32 \mu \pi} \cdot E^2 \cdot \frac{R_1^3 - R_2^3}{R_2^3 - R_1^3}$$

und die Hauptspannungen werden:

$$A = \frac{K E^2}{8 \pi} \left\{ \frac{R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} - \frac{R_1^3 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} \cdot \frac{1}{r^3} \right\}$$

und

$$B = \frac{K E^2}{8 \pi} \left\{ \frac{R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} + \frac{1}{2} \frac{R_1^3 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} \cdot \frac{1}{r^3} \right\}.$$

Da

$$E^2 = \frac{e^2}{K^2 R_2^4},$$

sieht man, daß die Spannungen für einen bestimmten inneren Punkt der Hohlkugel proportional dem Quadrat der Ladung wächst. *Die Maxwell'schen Spannungen hingegen sind gleich Null*

Räumliche Dilatation.

Für die räumliche Dilatation eines isotropen Körpers fand C. Chree¹⁾:

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta v = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \int (Xx + Yy + Zz) d\tau \\ \quad + \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \int (Fx + Gy + Hz) ds, \end{array} \right.$$

wo X, Y, Z die Komponenten der *Volumenkräfte* und F, G, H die Komponenten der Kräfte an der Oberfläche des Körpers darstellen. Sind nun die Volumenkräfte eine Folge von im umgekehrten Verhältnis des Quadrates der Entfernung wirkenden Kräften, so kann man nach Maxwell für die Komponenten X, Y, Z bez. substituieren:

$$X = \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} \text{ etc. ,}$$

wo p_{xx} etc. die bekannten Bedeutungen haben.

Nach einer leichten Umformung erhält man:

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int (Xx + Yy + Zz) d\tau = \int \{x(p_{xx}l + p_{xy}m + p_{xz}n) \\ \quad + y(p_{yx}l + p_{yy}m + p_{yz}n) + z(p_{zx}l + p_{zy}m + p_{zz}n)\} ds \\ \quad - \int (p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}) d\tau. \end{array} \right.$$

Nun ist der Ausdruck:

$$p_{xx}l + p_{xy}m + p_{xz}n$$

nichts anderes als der x -Komponent der Maxwell'schen Flächenkraft für das Flächenelement ds . Nennen wir also ihre drei Komponenten P, Q und R , so wird das Flächenintegral in der Gleichung (11)

$$\int (Px + Qy + Rz) ds$$

1) C. Chree, Trans. of the Cambridge philos. Soc. 15. p. 318. 1892.

und ist also das zweifache Varial (mit entgegengesetztem Zeichen) der Maxwellschen Flächenkräfte an der Oberfläche des Körpers. Weiter wird die Summe $p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}$ (welche gleich ist der Summe der Hauptspannungen) für Schwere, elektrostatische Kräfte und magnetische Kräfte bez.

$$\frac{g^2}{8\pi f}, \quad -\frac{\varepsilon E^2}{8\pi} \quad \text{und} \quad -\frac{\mu H^2}{8\pi},$$

wenn g = Beschleunigung der Schwere, f = Gravitationskonstante, ε = dielektrische Konstante und μ = magnetische Permeabilität darstellen.

Für die räumliche Dilatation des Körpers erhält man also z. B. in dem zweiten Fall:

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta v &= \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \left\{ \int (Px + Qy + Rz) ds \right. \\ &\quad \left. + \int (Fx + Gy + Hy) ds + \frac{1}{8\pi} \int \varepsilon E^2 d\tau \right\}. \end{aligned} \right.$$

Das zweite Integral verschwindet, wenn keine anderen Kräfte betrachtet werden als solche, welche im umgekehrten Verhältnis des Quadrates der Entfernung wirken. Ist der Körper ein Leiter, so verschwindet auch das letzte Integral und man erhält nur:

$$(13) \quad \delta v = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \int (Px + Qy + Rz) ds.$$

Dieses letzte Resultat ist im Einklang mit der gewöhnlichen Betrachtung, wo die Maxwellsche Spannung als „elastische“ Spannung betrachtet wird. Der Ausdruck (12) für δv lehrt aber, daß die Berechnung von δv *im allgemeinen* nicht so einfach ist.

Emile Mathieu¹⁾ setzt die Maxwellschen Flächenkräfte unmittelbar in die bekannten Kirchhoffschen Gleichungen ein, welche die Beziehungen zwischen Spannungen und Verückungen geben und findet als Ausdruck der räumlichen Dilatation das letzte Glied von (12). Wie schon bemerkt, sagt er, daß dieser Ausdruck unmöglich gelten kann, gibt aber den exakten Ausdruck nicht an.

1) Emile Mathieu, *Theorie des Potentiales*, p. 259. 1890.

Für die räumliche Kontraktion einer homogenen isotropen Kugel zufolge ihrer eigenen Schwere würden die Flächenkräfte geben:

$$-\delta v = -\frac{1}{3\lambda + 2\mu} \int (Px + Qy + Rz) ds.$$

Ist die Beschleunigung der Schwere an der Oberfläche der Kugel g_0 , so wird die Flächenkraft:

$$-\frac{g_0^2}{8\pi f}$$

und der bekannte Ausdruck für das Virial eines auswendigen Druckes, $\frac{3}{2}pv$, gibt unmittelbar:

$$(14) \quad -\delta v = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \cdot \frac{3g_0^2}{8\pi f} v \quad (v = \text{Volumen des Körpers}).$$

Die gewöhnliche Betrachtung nach der Elastizitätstheorie würde gegeben haben¹⁾:

$$(15) \quad -\delta v = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \cdot \frac{9g_0^2}{20\pi f} v.$$

Fügen wir weiter bei dem Ausdrucke (14) das Raumintegral hinzu, welches bei der Schwere das letzte Glied von (12) ersetzen muß, das heißt das Integral:

$$\begin{aligned} \frac{1}{8\pi(3\lambda + 2\mu)f} \int q^2 d\tau &= \frac{4\pi g_0^2}{R^3} \int r^4 dr \\ &= \frac{4}{5} \pi g_0^2 R^3 = \frac{3}{40\pi f} \frac{g_0^2}{3\lambda + 2\mu} v \end{aligned}$$

$$\left(R = \text{Kugelradius und } g = g_0 \frac{r}{R} \right),$$

so erhält man:

$$-\delta v = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \frac{g_0^2}{\pi f} v \left(\frac{3}{40} + \frac{3}{8} \right) = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \frac{9g_0^2}{20\pi f} v$$

und das ist notwendigerweise der Ausdruck (15).

Für einen Leiter hat man für die räumliche Dilatation zufolge einer Ladung auf seiner Oberfläche Formel (13), oder wenn U das Virial der äußeren Kräfte darstellt:

$$(16) \quad \delta v = -\frac{2U}{3\lambda + 2\mu}.$$

Berechnen wir nun als ein anderes Beispiel die räumliche Dilatation eines homogenen isotropen leitenden Ellipsoids.

1) C. Chree, Trans. of the Cambridge phil. Soc. 15. p. 331. 1892.

Ist σ die Flächendichte, e die ganze Ladung und p das Lot, welches vom Mittelpunkt auf die in dem betrachteten Punkt an das Ellipsoid gelegte Ebene gefällt ist, so hat man:

$$\sigma = \frac{e}{4\pi abc} \times p.$$

Die elektrische Spannung wird deshalb

$$\frac{e^2}{8\pi a^2 b^2 c^2} p^2,$$

wenn wir die dielektrische Konstante des umgebenden Mediums gleich 1 setzen.

Ist ds ein Element der Oberfläche des Ellipsoids, und r sein Radiusvektor, so wird bekanntlich der Ausdruck für das Virial der elektrischen Spannungen:

$$U = -\frac{1}{2} \int R r \cos(R, r) ds,$$

wenn R diese Spannungen darstellt.

Weiter ist

$$\cos(R, r) = \frac{p}{r}$$

und also:

$$U = -\frac{e^2}{16\pi a^2 b^2 c^2} \int p^3 ds.$$

Die ganze Vergrößerung des Ellipsoids wird deshalb:

$$(17) \quad \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \frac{e^2}{8\pi a^2 b^2 c^2} \int p^3 ds.$$

Wenn $a > b > c$, so setzen wir:

$$l^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}; \quad l'^2 = \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}$$

und weiter:

$$\Delta = \sqrt{1 - l^2 \sin^2 u}, \quad \Delta' = \sqrt{1 - l'^2 \sin^2 v}.$$

Das Flächenelement ds kann auf diese Weise ausgedrückt werden durch:

$$ds = \frac{l^2 \cos^2 u + l'^2 \cos^2 v}{\Delta \cdot \Delta'} \sqrt{(a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u)(c^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v)} \cdot du dv.$$

Weiter ist:

$$p = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}$$

und

$$x = a \sin u \cdot \Delta, \quad y = b \cos u \cos v, \quad z = c \sin v \cdot \Delta.$$

Demnach:

$$p = \frac{a b c}{\sqrt{(a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u)(c^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v)}}.$$

Durch Substitution in (17) wird also die Frage zurückgeführt auf die Berechnung von elliptischen Integralen.

Ist $a = b$, so erhält man leicht:

$$\int p^3 ds = a^4 c \int \int \frac{du \cdot d(\sin v)}{1 + \left(\frac{a^2}{c^2} - 1\right) \sin^2 u}.$$

Setzen wir:

$$\frac{a^2}{c^2} - 1 = h^2 \quad (a > c),$$

so wird:

$$\int p^3 ds = \frac{a^4 c}{h} \arccos(h \sin v) \int du.$$

Für einen Oktant des Ellipsoids müssen u und v zwischen 0 und $\pi/2$ genommen werden, und:

$$\frac{1}{8} \int p^3 ds = \frac{\pi}{2} \frac{a^4 c}{h} \arccos h.$$

Die Vergrößerung des Volumens des Ellipsoids wird deshalb:

$$\frac{1}{3\lambda + 2\mu} \frac{e^2}{2a \sqrt{1 - \frac{e^2}{a^2}}} \arccos \frac{e}{a}.$$

Für eine bestimmte Ladung und für gleichförmige Ellipsoide sind also die Dilatationen den Dimensionen umgekehrt proportional.

's Gravenhage, November 1903.

(Eingegangen 17. November 1903).