SOPRA UN NUOVO PUNTO DI CORRELAZIONE

FRA LE FORME BINARIE DEL QUARTO GRADO E LE TERNARIE CUBICHE.

(*Da una lettera del prof.* BRIOSCHI *al prof.* CREMONA.)

. . . . Voi avrete certamente al pari di me dovuto meditare più volte sulle singolari analogie o correlazioni esistenti fra le forme binarie del quarto grado e le cubiche ternarie. Alcuni anni ora sono in una Nota pubblicata nei *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* (6 aprile 1863) mi era prefisso di porre in evidenza quella analogia considerando le trasformazioni che le due forme indicate possono subire mediante la teorica dei covarianti associati. La lettura di un recente lavoro del sig. CAYLEY (*The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics*, novembre 1874; *A Geometrical Illustration of the cubic Transformation in Elliptic Functions*, pag. 211) ha richiamato la mia attenzione sopra l'argomento della mia Nota del 1863, e parendomi che il nuovo punto di correlazione a cui sono giunto possa portare luce nelle ricerche tanto analitiche quanto geometriche che a quelle forme si legano, mi affretto a comunicarvelo, esprimendovi insieme il desiderio che questa lettera sia pubblicata nel prossimo numero dei nostri *Annali di Matematica.*

1. Indicando con $f(\xi, \eta)$ una forma binaria del quarto grado, rappresento con $h(\xi, \eta)$ il suo hessiano, con $\theta(\xi, \eta)$ il covariante di sesto grado; ossia:

$$h = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} = \tfrac{1}{2}(ff)^2, \qquad \theta = 2\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ h_1 & h_2 \end{vmatrix} = 2(fh)$$

essendo $f_1 = \frac{1}{4}\frac{df}{d\xi}$, $f_{11} = \frac{1}{3\cdot 4}\frac{d^2f}{d\xi^2}$, ecc....; infine con g_2, g_3 gli invarianti quadratico e cubico. Si ha come è noto la relazione:

$$\theta^2 = -(4h^3 - g_2 hf^2 + g_3 f^3). \tag{1}$$

Pongo ora nella $f(\xi, \eta)$ in luogo di ξ, η i binomj:

$$\xi = \xi_1 X - \tfrac{1}{4}\frac{dh}{d\eta_1} Y; \qquad \eta = \eta_1 X + \tfrac{1}{4}\frac{dh}{d\xi_1} Y \tag{2}$$

si avrà:

$$f(\xi, \eta) = (f, f', f'', f''', f^{\text{IV}})(X, Y)^4 \tag{3}$$

essendo f', f'',... covarianti di f nei quali siensi sostituiti alle ξ, η le ξ_1, η_1. Ma dalla teoria dei covarianti associati si hanno per f', f'',... i valori:

$$f' = -\tfrac{1}{2}\theta, \qquad f'' = \tfrac{1}{4}f(g_2 h - g_3 f), \qquad f''' = -\tfrac{1}{8}\theta(g_2 h - g_3 f)$$
$$f^{\text{IV}} = \tfrac{1}{16}f(g_2 h - g_3 f)^2 + g_3 h^3$$

ossia per la relazione (1)

$$f^{\text{IV}} = \tfrac{1}{16}f(g_2 h - g_3 f)(g_2 h + 3g_3 f) - \tfrac{1}{4}g_3\theta^2$$

quindi se supponesi che le ξ_1, η_1 annullino la $f(\xi_1, \eta_1)$, si avranno pei coefficienti della (3) i valori seguenti:

$$f = 0, \quad f' = -\tfrac{1}{2}\theta, \quad f'' = 0, \quad f''' = -\tfrac{1}{8}g_2 h\theta, \quad f^{\text{IV}} = -\tfrac{1}{4}g_3\theta^2$$

e la (3) stessa diverrà:

$$f(\xi, \eta) = -2\theta Y[X^3 + \tfrac{1}{4}g_2 hXY^2 + \tfrac{1}{8}g_3\theta Y^3]. \tag{4}$$

Ora siccome dalle relazioni (2) si deducono le:

$$\xi\frac{df}{d\xi_1} + \eta\frac{df}{d\eta_1} = -2\theta Y; \qquad \xi\frac{dh}{d\xi_1} + \eta\frac{dh}{d\eta_1} = 4hX$$

se poniamo:

$$x = -\frac{\xi\frac{dh}{d\xi_1} + \eta\frac{dh}{d\eta_1}}{\xi\frac{df}{d\xi_1} + \eta\frac{df}{d\eta_1}} = 2\frac{hX}{\theta Y} \tag{5}$$

si avrà $X = \frac{1}{2}\frac{\theta}{h}xY$, il quale valore sostituito nella (4), rammentando essere per la (1) $\theta^2 = -4h^3$ condurrà alla:

$$f(\xi, \eta) = \tfrac{1}{4}\theta^2 Y^4(4x^3 - g_2 x - g_3). \tag{6}$$

Finalmente se in quest'ultima poniamo $x = -\frac{1}{2}z$ e:

$$g_2 = 3s, \qquad g_3 = -t \tag{7}$$

si avrà:

$$f(\xi, \eta) = \tfrac{1}{8}\theta^2 Y^4(2t + 3sz - z^3). \tag{8}$$

2. Considero ora la forma ternaria cubica:

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6\,l x_1 x_2 x_3$$

ed indico con s, t i suoi invarianti di quarto e di sesto grado, ossia:

$$s = 4l(l^3 - 1) \qquad t = 8l^6 + 20l^3 - 1$$

con H, K, Θ i suoi covarianti di grado terzo, sesto e nono rispetto alla x_1, x_2, x_3; cioè:

$$H = 6\sum(\pm F_{11}F_{22}F_{33}), \quad K = \sum(FH)^{rs}F_r H_s, \quad \Theta = \begin{vmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \\ H_1 & H_2 & H_3 \\ K_1 & K_2 & K_3 \end{vmatrix}$$

nelle quali

$$F_1 = \frac{1}{3}\frac{dF}{dx_1}, \qquad F_{11} = \frac{1}{2\cdot 3}\frac{d^2F}{dx_1^2}, \ldots$$

ed

$$(FH)^{rs} = F_{tr}H_{ts} + F_{ts}H_{tr} - F_{tt}H_{rs} - E_{rs}H_{tt}.$$

I valori delle H, K sono i seguenti:

$$H = 6\,[(1 + 8l^3)x_1x_2x_3 - l^2F]$$
$$K = -4(1 + 8l^3)^2Q + 4l^3(l^3 + 2)F^2 - \tfrac{2}{3}l(2l^3 + 1)FH + \tfrac{1}{3}l^2H^2$$

essendo $Q = x_2^3x_3^3 + x_3^3x_1^3 + x_1^3x_2^3$. È noto d'altronde che il quadrato del covariante Θ si esprime in funzione razionale, intera degli altri covarianti e degli invarianti di F. Pel caso in cui le x_1, x_2, x_3 annullino la F si hanno le:

$$\left.\begin{aligned} H = 6(1 + 8l^3)x_1x_2x_3; \qquad K = \tfrac{1}{3}l^2H^2 - 4(1 + 8l^3)^2Q \\ 54\,\Theta^2 = 6^3K^3 - 3\ 6\cdot sKH^4 + 2tH^6. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

3. Rammentate queste formole relative alla teorica delle due forme che qui consideriamo, passo alla ricerca dei rapporti $x_1 : x_2 : x_3$ che soddisfano alle due equazioni:

$$\xi(x_1 + x_2) - \eta x_3 = 0; \qquad F(x_1, x_2, x_3) = 0$$

od in linguaggio geometrico (Vedi la Nota citata del sig. Cayley), alla ricerca dei punti di intersezione di una retta che passa pel punto di inflessione $x_1 + x_2 = 0$, $x_3 = 0$ e della cubica $F = 0$. Eliminando dalle due ultime equazioni la x_3, si ottiene:

$$\eta^3(x_1^3 + x_2^3) + \xi^3(x_1 + x_2)^3 + 6\,l\xi\eta^2 x_1x_2(x_1 + x_2) = 0;$$

nella quale ponendo:

$$x_1 = p + q; \qquad x_2 = p - q \text{ e quindi } x_3 = 2p\frac{\xi}{\eta} \tag{10}$$

si deduce la relazione:

$$p^2(4\xi^3 + \eta^3 + 6l\xi\eta^2) = 3q^2\eta^2(2l\xi - \eta)$$

od anche:

$$p^2 f(\xi, \eta) = 3q^2\eta^2(2l\xi - \eta)^2 \tag{11}$$

posto:

$$f(\xi, \eta) = (2l\xi - \eta)(4\xi^3 + \eta^3 + 6l\xi\eta^2).$$

La f è una forma binaria del quarto grado, di cui gli invarianti hanno i valori seguenti:

$$g_2 = 12l(l^3 - 1), \qquad g_3 = 1 - 20l^3 - 8l^6$$

ossia indicando come sopra con s, t gli invarianti della ternaria cubica F:

$$g_2 = 3s, \qquad g_3 = -t$$

come si è supposto nelle relazioni (7). La formola di trasformazione (5) ossia la:

$$z = 2\frac{\xi\frac{dh}{d\xi_1} + \eta\frac{dh}{d\eta_1}}{\xi\frac{df}{d\xi_1} + \eta\frac{df}{d\eta_1}}$$

condurrà quindi alla formola (8). Ma evidentemente la $f(\xi, \eta)$ è annullata ponendo $\xi_1 = 1$, $\eta_1 = 2l$, perciò essendo:

$$h(\xi_1, \eta_1) = -(1 + 8l^3)^2, \qquad \theta(\xi_1, \eta_1) = -2(1 + 8l^3)^3, \qquad \frac{df}{d\xi_1} = 8l(1 + 8l^3)$$

$$\frac{1}{4}\frac{dh}{d\xi_1} = -(1 + 2l^3)(1 + 8l^3), \quad \frac{1}{4}\frac{dh}{d\eta_1} = -3l^2(1 + 8l^3), \qquad \frac{df}{d\eta_1} = -4(1 + 8l^3)$$

si avranno le:

$$\xi = -\tfrac{1}{2}(1 + 8l^3)Y(z - 6l^2), \qquad \eta = -(1 + 8l^3)Y(lz + 1 + 2l^3)$$

e la formola di trasformazione sarà la:

$$z = 2\frac{(1 + 2l^3)\xi + 3l^2\eta}{\eta - 2l\xi}. \tag{12}$$

Per questi valori e per la (8) la formola (11) si muta nella:

$$\tfrac{1}{6}p^2(2t + 3sz - z^3) = q^2(lz + 1 + 2l^3)^2$$

per la quale:

$$p=\frac{1}{\rho}(lz+1+2l^3),\qquad q=\frac{1}{\rho}\sqrt{\phi(z)}$$

posto

$$\phi(z)=\tfrac{1}{6}(2t+3sz-z^3).$$

Le (10) daranno quindi i valori richiesti dei rapporti $x_1:x_2:x_3$ e cioè:

$$\rho x_1=lz+1+2l^3+\sqrt{\phi(z)},\quad \rho x_2=lz+1+2l^3-\sqrt{\phi(z)},\quad \rho x_3=z-6l^2 \qquad (13)$$

essendo ρ una indeterminata; il doppio segno del radicale corrispondendo ad un' altra serie di valori, od all' altro punto di intersezione.

4. I valori (13) annullano quindi la $F(x_1, x_2, x_3)$, i loro rapporti sono cioè coordinate di un punto situato sulla cubica $F=0$. Sostituendo i valori (13) di x_1, x_2, x_3 nelle espressioni (9) si hanno pei valori dei covarianti H, K in funzione di z:

$$H=\frac{1+8l^3}{\rho^3}\alpha,\qquad K=-\frac{(1+8l^3)^2}{54\rho^6}(9z\alpha^2-72\alpha\beta\gamma+64\beta^3) \qquad (14)$$

essendo:

$$\alpha=z^4-6sz^2-8tz-3s^2,\quad \beta=z^3-3sz-2t=-6\phi,\quad \gamma=z^2-s$$

e la terza delle (9) dà:

$$\Theta=\frac{(1+8l^3)^3}{81\rho^3}(27\alpha^3+4\cdot81\alpha^2\gamma^2-32\;27\alpha\beta^2\gamma+8^3\beta^4)\sqrt{\phi(z)}.$$

Ora ponendo $\lambda=-\frac{6K}{H^2}$ si deduce dai valori (14) di H, K la equazione seguente del nono grado in z:

$$9(\lambda-z)\alpha^2+72\alpha\beta\gamma-64\beta^3=0 \qquad (15)$$

mentre dall' ultima delle (9) si ottiene la:

$$3\frac{\Theta}{H^3}=\sqrt{\phi(\lambda)} \qquad (16)$$

e quindi la:

$$27\alpha^3\sqrt{\phi(\lambda)}=(27\alpha^3+4\cdot81\alpha^2\gamma^2-32\;27\alpha\beta^2\gamma+8^3\beta^4)\sqrt{\phi(z)}$$

e siccome dalla derivazione della (15) si ottiene:

$$9\alpha^3 d\lambda+(27\alpha^3+4\cdot81\cdot\alpha^2\gamma^2-32\;27\cdot\alpha\beta^2\gamma+8^3\beta^4)dz$$

si avrà evidentemente dal confronto di queste ultime la equazione trascendente:

$$3\sqrt{\phi(\lambda)}dz+\sqrt{\phi(z)}d\lambda=0$$

vale a dire la equazione corrispondente alla triplicazione delle funzioni elittiche, e la (15) è la equazione algebrica del nono grado la quale, come è noto, è il suo integrale (*). I valori (13) delle x_1, x_2, x_3 nei quali pongasi per z una radice della equazione (15) saranno perciò le coordinate dei punti di flesso della cubica $F=0$.

5.° Indicando con ω una radice cubica immaginaria dell'unità, essendo:

$$(\omega^2 x_1^3 + \omega x_2^3 + x)(\ x_1^3 + \omega^2 x_2^3 + x\ ) = (x_1^3 + x_2^3 + x\ ) \ - 3(x_2^3 x_3^3 + x_3^3 x_1^3 + x_1^3 x_2^3)$$

supponendo che le x_1, x_2, x_3 rendano $F=0$, si ha dalle relazioni (9) che:

$$(\omega^2 x_1^3 + \omega x_2^3 + x)(\ x_1^3 + \omega^2 x_2^3 + x_3^3) = 3(l\ H^2 + K)\nu^2 \tag{17}$$

essendo $\nu = \dfrac{1}{2(1+8l^3)}$ Ma si ha facilmente per la terza delle (9):

$$6^3(l^2 H^2 + K)^3 = 2\,[18lK + (10l^3 - 1)H^2]^2 H^2 + 54\Theta^2$$

od anche:

$$108(l^2 H^2 + K)^3 =$$

$$= \{H[18lK + (10l^3 - 1)H\ ] + 3\Theta\sqrt{-3}\}\{H[18lK + (10l^3 - 1)H\ ] - 3\Theta\sqrt{-3}\}$$

quindi ponendo:

$$y_1 = \omega^2 x_1^3 + \omega x_2^3 + x_3^3, \quad y_2 = \omega x_1^3 + \omega^2 x_2^3 + x_3^3, \quad -2my_3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \tag{18}$$

essendo m una indeterminata, facendo come sopra $-\dfrac{6K}{H^2} = \lambda$ e rammentando la equazione (16) si ha:

$$y_1^3 y_2^3 = \tfrac{1}{4}\nu^6 H^6 \{3l\lambda + 1 - 10l^3 - \sqrt{-3\phi(\lambda)}\}\{3l\lambda + 1 - 10l^3 + \sqrt{-3\phi(\lambda)}\}$$

dalla quale:

$$\left.\begin{aligned} y_1^3 &= \tfrac{1}{2}\nu^3 H^3\,[3l\lambda + 1 - 10l^3 - \sqrt{-3\phi(\lambda)}] \\ y_2^3 &= \tfrac{1}{2}\nu^3 H^3\,[3l\lambda + 1 - 10l^3 + \sqrt{-3\phi(\lambda)}] \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

e per la terza delle (18)

$$my_3 = lH\nu. \tag{20}$$

(*) Le formole generali per la moltiplicazione delle funzioni elittiche poste sotto questa forma furono date da me fino dal 1864 (*Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, n.° 19) deducendole dal teorema d'ABEL. Recentemente il sig. KIEPERT in una Memoria pubblicata nel *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Band. 75, 1873, pag. 21 ha ottenuto alcune fra quelle formole, partendo dalle funzioni doppiamente periodiche corrispondenti a quella forma di funzioni elittiche.

Le ultime relazioni danno:

$$y_1^3+y_2^3+y_3^3=\nu^3H^3\left[3l\lambda+1-10l^3+\frac{l^3}{m^3}\right]$$

e per le (17) (18) essendo:

$$y_1y_2 \quad = -\tfrac{1}{2}H^2\nu^2(\lambda-6l) \qquad (21)$$

si avrà:

$$y_1y_2y_3=-\tfrac{1}{2}H^3\nu^3(\lambda-6l)\frac{l}{m}$$

la quale moltiplicata per $6m$ ed aggiunta alla superiore dà:

$$y_1^3+y_2^3+y_3^3+6my_1y_2y_3=H^3\nu^3\left(1+8l^3+\frac{l^3}{m^3}\right)$$

ossia:

$$\Phi=y_1^3+y_2^3+y_3^3+6my_1y_2y_3=0$$

determinando m per modo che sia:

$$8l^3m^3+l^3+m^3=0.$$

Le cubiche $F=0$, $\Phi=0$ hanno fra loro la corrispondenza considerata dal sig. Cayley nel suo recente lavoro, cioè ad un dato punto sulla curva $F=0$ corrisponde un punto sulla $\Phi=0$, ma ad un dato punto sopra quest'ultima ne corrispondono tre sulla prima.

Indicando con v un nuovo parametro ed r una indeterminata, si avrà analogamente (13) che i valori:

$$ry_1=mv+1+2m^3+\sqrt{\psi(v)},\quad ry_2=mv+1+2m^3-\sqrt{\psi(v)},\quad ry_3=v-6m^2, \qquad (22)$$

nei quali:

$$\psi(v)=\tfrac{1}{6}(2\tau+3\sigma v-v^3),\quad \sigma=4m(m^3-1),\quad \tau=8m^6+20m^3-1,$$

soddisfano la $\Phi(y_1, y_2, y_3)=0$. La relazione algebrica esistente fra i parametri λ, v trovasi facilmente dalle quattro relazioni che si deducono dalle (22) e dalle (20) (21), ossia:

$$r^2y_1y_2=(mv+1+2m^3)^2-\psi(v),\qquad y_1y_2=-\tfrac{1}{2}H^2\nu^2(\lambda-6l^2)$$

$$r^2y_3^2=(v-6m^2)^2,\qquad y_3^2=\frac{l^2}{m^2}H^2\nu^2$$

per le quali:

$$\lambda=2\frac{l^2}{m^2}\frac{\psi(v)-(mv+1+2m^3)^2+3m^2(v-6m^2)^2}{(v-6m^2)^2} \qquad (23)$$

che differenziata dà:

$$d\lambda = 2\frac{l^3}{m^2}\frac{\psi(v)+3(mv+1+2m^3)^2}{(v-6m^2)^3}dv. \tag{24}$$

Ora dai valori (22) si deduce che:

$$r^2(y_1^2+y_1y_2+y_2^2)=\psi(v)+3(mv+1+2m^3)^2$$

e quindi:

$$-r^2(y_1^3-y_2^3)=[\psi(v)+3(mv+1+2m^3)^2](y_1-y_2)$$

relazione la quale rammentando le (19) (22) diventa:

$$r^3\nu^3H^3\sqrt{-3\varphi(\lambda)}=2[\psi(v)+3(mv+1+2m^3)]\sqrt{\psi(v)}.$$

Infine essendo:

$$r^3y_3^3=(v-6m^2)^3, \qquad m^3y_3^3=l^3H^3\nu^3$$

si avrà:

$$-\frac{m}{l}\sqrt{-3\varphi(\lambda)}=2\frac{l^2}{m^2}\frac{\psi(v)+3(mv+1+2m^3)^2}{(v-6m^2)^3}\sqrt{\psi(v)}$$

la quale posta a confronto della (24) dà la equazione differenziale:

$$l\,d\lambda\sqrt{\psi(v)}+m\,dv\cdot\sqrt{-3}\cdot\sqrt{\varphi(\lambda)}=0 \tag{25}$$

di cui l'integrale è la (23) corrispondente alla trasformazione del terzo ordine delle funzioni elittiche (*). Analogamente l'integrale della equazione:

$$m\,dv\sqrt{\varphi(z)}+l\,dz\sqrt{-3}\sqrt{\psi(v)}=0 \tag{26}$$

sarà la:

$$v=2\frac{m^2}{l^2}\frac{\varphi(z)-(lz+1+2l^3)^2+3l^2(z-6l^2)^2}{(z-6l^2)^2} \tag{27}$$

e quindi la equazione differenziale della triplicazione delle funzioni elittiche che si ottiene eliminando il rapporto $\frac{dv}{\sqrt{\psi(v)}}$ dalle (25) (26) ha per integrale la (15) la quale pur ottiensi eliminando il parametro v dalle equazioni algebriche (23) (27).

Notisi infine che dalle (18) si deducono le:

$$3x_1^3=\omega y_1+\omega^2y_2-2my_3, \quad 3x_2^3=\omega^2y_1+\omega y_2-2my_3, \quad 3x_3^3=y_1+y_2-2my_3$$

(*) Vedi la mia Nota *Sur une formule de transformation des fonctions elliptiques. Comptes Rendus*, novembre 1874, gennajo 1875.

nelle quali le y_1, y_2, y_3 sono date dalle (19) (20). Queste equazioni sono pel caso di $F=0$ paragonabili a quelle date da Clebsch nella sua Nota « *Ueber die Bestimmung der Wendepunkte einer Curve dritter Ordnung* » pubblicata nei *Mathematische Annalen* dell' agosto 1869. Ponendo poi nelle medesime i valori (22) si ottengono le:

$$3rx_1^3 = -[3mv + 1 - 10m^3 - \sqrt{-3\psi(v)}] \qquad 3rx_3^3 = 2(1+8m^3)$$
$$3rx_2^3 = -[3mv + 1 - 10m^3 + \sqrt{-3\psi(v)}]$$

le quali corrispondono alle superiori (19) (20).

Febbrajo 1875.