

Studii sulle equazioni differenziali lineari.

(Di ULISSE DINI, a Pisa.)

1. Gli studii che si contengono in questa Memoria e in un'altra che pubblicherò fra breve possono considerarsi come un seguito e complemento di quelli che esposi in due Memorie collo stesso titolo che pubblicai nei Vol. II e III della serie III di questi *Annali*.

A queste Memorie dovrò quindi riferirmi bene spesso; e anzi, a rendere più semplici e comodi gli studii che ora voglio fare, riporterò qui senz'altro, nei primi paragrafi, la formola generale che detti nella prima delle Memorie medesime, e richiamerò alcuni particolari che in quelle si trovano esposti; dopo di che esporrò quello che forma il soggetto principale di questa Memoria, cioè la ricerca di casi nei quali un'equazione lineare ammette integrali regolari anche nell'intorno dei punti nei quali il coefficiente del primo termine si annulla, mentre gli altri coefficienti restano in quei punti determinati e finiti.

Avendosi una equazione lineare completa

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = X,$$

nella quale $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ e X sono funzioni conosciute della x e regolari (*) in tutto un intervallo (a, b) nel quale ora si suppone anche che a_0

(*) Dicendo qui che una funzione è regolare in un intervallo (a, b) , s'intende che sia finita e continua insieme a quelle delle sue derivate che occorre di considerare, salvo tutt'al più quella di ordine più alto fra queste derivate per la quale il più spesso basterà che sia atta alla integrazione anche ridotta ai valori assoluti.

In questi studii l'esistenza delle derivate bisogna ammetterla per a_0 fino all'ordine n , per a_1 fino all'ordine $n-1$, per a_2 fino all'ordine $n-2$, e in generale per a_{n-h} fino all'ordine h , bastando però il più spesso pei singoli coefficienti che le derivate dell'ordine più alto che devono considerarsi siano integrabili e finite, e talvolta anche soltanto inte-

sia diverso da zero, si prendano n funzioni regolari qualsiasi z_1, z_2, \dots, z_n per le quali il determinante

$$Q = \begin{vmatrix} z_1 & z'_1 & z''_1 & \dots & z^{(n-1)}_1 \\ z_2 & z'_2 & z''_2 & \dots & z^{(n-1)}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_n & z'_n & z''_n & \dots & z^{(n-1)}_n \end{vmatrix} \quad (2)$$

è diverso da zero nello stesso intervallo (a, b) ; e per ciascuna z_r di queste funzioni si indichi con $\varepsilon_{n-1} Z_r$ quello che si usa chiamare *polinomio aggiunto* del primo membro della equazione data (1), pel quale cioè si ha

$$\varepsilon_{n-1} Z_r = (a_0 z_r)^{(n)} + \varepsilon_1 (a_1 z_r)^{(n-1)} + \varepsilon_2 (a_2 z_r)^{(n-2)} + \dots + \varepsilon_{n-1} (a_{n-1} z_r)' + \varepsilon_n (a_n z_r), \quad (3)$$

dove $\varepsilon_s = (-1)^s$.

Allora, indicando con Q_c , q_{x,x_1} e \mathfrak{q}_{x,x_1} i determinanti che si ottengono da Q ponendo al posto degli elementi della ultima colonna rispettivamente le costanti arbitrarie c_1, c_2, \dots, c_n quando si vuole Q_c , e le funzioni z_1, z_2, \dots, z_n , e Z_1, Z_2, \dots, Z_n nelle quali alla variabile x sia sostituito x_1 quando si vogliono q_{x,x_1} e \mathfrak{q}_{x,x_1} , e ponendo in generale

$$A_x = Q_c + \int_{\alpha}^x X_{x_1} q_{x,x_1} dx_1, \quad (4)$$

dove α è un valore qualunque di x nell'intervallo (a, b) , per quanto dimostrai nella prima delle citate Memorie, si avranno infinite espressioni analitiche per mezzo di serie dell'integrale y della equazione (1) (*), le quali sono

grabili anche quando si riducono ai valori assoluti (essendo quindi sempre finite o no), e potendo anche, invece di queste ultime derivate, esistere solo gli estremi oscillatorii dotati però di queste particolarità per la loro integrabilità (V. i miei *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*. Pisa, Nistri, 1878). Così per X e per a_n non si richiede neppure l'esistenza delle derivate, nè che queste funzioni siano sempre finite, e spesso anche basta che esse siano integrabili anche ridotte ai loro valori assoluti, ecc....

(*) Il FUCHS con altre considerazioni ottenne altre forme in serie per gli integrali delle equazioni lineari nella sua Memoria: *Sur le développement en séries des intégrales des équations différentielles linéaires*, pubblicata a pag. 36 del Vol. IV della serie II di questi *Annali*.

date dalla formola

$$\begin{aligned}
 y = & \varepsilon_{n-1} \frac{A_x}{(a_0 Q)_x} + \frac{\varepsilon_{n-1}^2}{(a_0 Q)_x} \int_a^x \frac{A_{x_1} q_{x, x_1}}{(a_0 Q)_{x_1}} dx_1 + \\
 & + \frac{\varepsilon_{n-1}^3}{(a_0 Q)_x} \int_a^x \frac{q_{x, x_1}}{(a_0 Q)_{x_1}} dx_1 \int_a^{x_1} \frac{A_{x_2} q_{x_1, x_2}}{(a_0 Q)_{x_2}} dx_2 + \\
 & + \frac{\varepsilon_{n-1}^4}{(a_0 Q)_x} \int_a^x \frac{q_{x, x_1}}{(a_0 Q)_{x_1}} dx_1 \int_a^{x_1} \frac{q_{x_1, x_2}}{(a_0 Q)_{x_2}} dx_2 \int_a^{x_2} \frac{A_{x_3} q_{x_2, x_3}}{(a_0 Q)_{x_3}} dx_3 + \\
 & + \dots + \\
 & + \frac{\varepsilon_{n-1}^{m+1}}{(a_0 Q)_x} \int_a^x \frac{q_{x, x_1}}{(a_0 Q)_{x_1}} dx_1 \int_a^{x_1} \frac{q_{x_1, x_2}}{(a_0 Q)_{x_2}} dx_2 \int_a^{x_2} \frac{q_{x_2, x_3}}{(a_0 Q)_{x_3}} dx_3 \dots \int_a^{x_{m-1}} \frac{A_{x_m} q_{x_{m-1}, x_m}}{(a_0 Q)_{x_m}} dx_m + \\
 & + \dots,
 \end{aligned} \tag{5}$$

la quale può anche scriversi sotto la forma semplice

$$y = \varepsilon_{n-1} \frac{A_x}{(a_0 Q)_x} + \frac{\varepsilon_{n-1}}{(a_0 Q)_x} \int_a^x q_{x, x_1} y_{x_1} dx_1, \tag{6}$$

che è anzi la formola dalla quale nella Memoria citata si ricava la precedente (5), e non è altro che una di quelle che il sig. HILBERT ha chiamato equazioni integrali di seconda specie, e alla quale quindi potrebbero applicarsi le considerazioni che egli ha fatto nella sua Memoria (*).

E si può anche notare che, siccome la equazione data (1) può sempre moltiplicarsi per un fattore qualsiasi t , purchè regolare e diverso da zero nell'intervallo (a, b) , e per essa vengono allora a mutarsi i polinomii aggiunti Z_r e quindi le q_{x, x_1} , così conservando lo stesso sistema di funzioni z_1, z_2, \dots, z_n gli integrali della equazione data (1), con questo semplice artificio, potranno porsi sotto infinite altre forme differenti.

(*) Nelle mie Memorie: *Sulle equazioni differenziali* ricordate sopra, si ammette anche che X possa contenere le $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$, e si giunge ancora alla formola (6) la quale viene in tal caso ad essere una formola più generale delle equazioni integrali di seconda specie, e viene a valere per qualsiasi equazione differenziale anche non lineare.

2. Se poi si osserva che a causa della (4) ogni termine della serie (5) può scomporsi in due, e le serie corrispondenti a questi singoli termini risultano convergenti al modo stesso, se ne deduce che l'integrale y della (1) può sempre riguardarsi come composto di due parti Y e Y_X , venendo così a porsi sotto la forma

$$y = Y + Y_X, \quad (7)$$

nella quale la prima parte Y è data dalla formola

$$\begin{aligned} Y = & \varepsilon_n : \frac{Q_{c,x}}{(a_0 Q)_x} + \frac{\varepsilon_{n-1}^2}{(a_0 Q)_x} \int_{\alpha}^x \frac{Q_{c,x_1} q_{x,x_1}}{(a_0 Q)_{x_1}} dx_1 + \\ & + \frac{\varepsilon_{n-1}^3}{(a_0 Q)_x} \int_{\alpha}^x \frac{q_{x,x_1}}{(a_0 Q)_{x_1}} dx_1 \int_{\alpha}^{x_1} \frac{Q_{c,x_2} q_{x_1,x_2}}{(a_0 Q)_{x_2}} dx_2 + \\ & + \frac{\varepsilon_{n-1}^4}{(a_0 Q)_x} \int_{\alpha}^x \frac{q_{x,x_1}}{(a_0 Q)_{x_1}} dx_1 \int_{\alpha}^{x_1} \frac{q_{x_1,x_2}}{(a_0 Q)_{x_2}} dx_2 \int_{\alpha}^{x_2} \frac{Q_{c,x_3} q_{x_2,x_3}}{(a_0 Q)_{x_3}} dx_3 + \\ & + \dots + \\ & + \frac{\varepsilon_{n-1}^{n+1}}{(a_0 Q)_x} \int_{\alpha}^x \frac{q_{x,x_1}}{(a_0 Q)_{x_1}} dx_1 \int_{\alpha}^{x_1} \frac{q_{x_1,x_2}}{(a_0 Q)_{x_2}} dx_2 \int_{\alpha}^{x_2} \frac{q_{x_2,x_3}}{(a_0 Q)_{x_3}} dx_3 \int_{\alpha}^{x_3} \dots \int_{\alpha}^{x_{n-1}} \frac{Q_{c,x_n} q_{x_{n-1},x_n}}{(a_0 Q)_{x_n}} dx_n + \\ & + \dots, \end{aligned} \quad (8)$$

e corrisponde quindi all'integrale generale della equazione (1) ridotta omogenea col porvi $X=0$, e per l'altra parte Y_X si ha

$$\begin{aligned} Y_X = & \frac{\varepsilon_{n-1}}{(a_0 Q)_x} \int_{\alpha}^x X_{x_1} q_{x,x_1} dx_1 + \frac{\varepsilon_{n-1}^2}{(a_0 Q)_x} \int_{\alpha}^x \frac{q_{x,x_1}}{(a_0 Q)_{x_1}} dx_1 \int_{\alpha}^{x_1} X_{x_2} q_{x_1,x_2} dx_2 + \\ & + \frac{\varepsilon_{n-1}^3}{(a_0 Q)_x} \int_{\alpha}^x \frac{q_{x,x_1}}{(a_0 Q)_{x_1}} dx_1 \int_{\alpha}^{x_1} \frac{q_{x_1,x_2}}{(a_0 Q)_{x_2}} dx_2 \int_{\alpha}^{x_2} X_{x_3} q_{x_2,x_3} dx_3 + \\ & + \dots + \\ & + \frac{\varepsilon_{n-1}^m}{(a_0 Q)_x} \int_{\alpha}^x \frac{q_{x,x_1}}{(a_0 Q)_{x_1}} dx_1 \int_{\alpha}^{x_1} \frac{q_{x_1,x_2}}{(a_0 Q)_{x_2}} dx_2 \int_{\alpha}^{x_2} \frac{q_{x_2,x_3}}{(a_0 Q)_{x_3}} dx_3 \int_{\alpha}^{x_3} \dots \int_{\alpha}^{x_{m-1}} X_{x_m} q_{x_{m-1},x_m} dx_m + \\ & + \dots; \end{aligned} \quad (9)$$

e questa corrisponde evidentemente a un integrale particolare della equazione completa data (1).

3. E anche per ciascuna di queste due parti Y e Y_X si hanno equazioni integrali colle formole

$$\left. \begin{aligned} Y &= \varepsilon_{n-1} \frac{Q_{c,x}}{(a_0 Q)_x} + \frac{\varepsilon_{n-1}}{(a_0 Q)_x} \int_{\alpha}^x q_{x,x_1} Y_{x_1} dx_1, \\ Y_X &= \frac{\varepsilon_{n-1}}{(a_0 Q)_x} \int_{\alpha}^x X_{x_1} q_{x,x_1} dx_1 + \frac{\varepsilon_{n-1}}{(a_0 Q)_x} \int_{\alpha}^x q_{x,x_1} (Y_X)_{x_1} dx_1; \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

e siccome evidentemente le derivate rispetto ad x di q_{x,x_1} fino alla $(n-1)^a$ inclusive sono tutte zero per $x_1 = x$, e la n^a è uguale a $\varepsilon_{n-1} Q$, basterà derivare successivamente la seconda di queste formole (10), o anche la precedente (9) coll'osservare che alla serie del secondo membro possono applicarsi le derivazioni almeno fino all' n^a inclusive, per dedurne subito anche che l'integrale particolare Y_X della equazione completa (1) è quello che gode della particolarità notevole di essere zero per $x = \alpha$ insieme alle sue derivate fino alle $(n-1)^a$ inclusive, mentre l' n^a è $\frac{X(\alpha)}{a_0(\alpha)}$.

4. E qui è da osservare che l'integrale particolare \bar{Y} della equazione completa (1) che si dà ordinariamente nei trattati trovandolo col metodo della variazione delle costanti arbitrarie, è quello pel quale, essendo y_1, y_2, \dots, y_n un sistema qualsiasi d'integrali fondamentali della equazione omogenea e D il determinante fondamentale, si ha la formola

$$\bar{Y} = \sum y_s \int \frac{X D_{s,n}}{a_0 D} dx,$$

dove $D_{s,n}$ è l'elemento reciproco di $y_s^{(n-1)}$ in D ; e quando in esso s'intenda che gli integrali siano tutti estesi fra α e x , questo integrale viene a godere della stessa particolarità dell'integrale Y_X che abbiamo dato sopra, giacchè

colle c_1, c_2, \dots, c_n costanti, e le y_1, y_2, \dots, y_n integrali fondamentali il cui determinante $D = D_0 a^{-\int_{a_0}^x dx}$ (D_0 cost.) è diverso da zero per $x = \alpha$, basterebbe fare $y = \alpha$ in questa

ausiliarie z_1, z_2, \dots, z_n , e qualunque sia il sistema d'integrali fondamentali y_1, y_2, \dots, y_n della equazione omogenea dai quali si parte per la determinazione di \bar{Y} ; talchè si hanno infinite relazioni fra questi sistemi di funzioni.

5. Del resto, potendo sempre prendere in tutti questi studii per le funzioni ausiliarie z_1, z_2, \dots, z_n infiniti sistemi di funzioni, pei quali non si hanno altro che le condizioni di essere regolari fra a e b e di avere il loro determinante Q diverso da zero, tutte le formole che abbiamo dato, collo scegliere in modi diversi queste funzioni z_1, z_2, \dots, z_n e col prendere ogni volta per le costanti c_1, c_2, \dots, c_n valori adattati, conducono ad altrettante relazioni notevoli fra le funzioni z_1, z_2, \dots, z_n e y_1, y_2, \dots, y_n e X ; e in particolare quando per le funzioni z_1, z_2, \dots, z_n si prendano quelle y_1, y_2, \dots, y_n che costituiscono il sistema d'integrali fondamentali che si vuole considerare, si ottengono sempre relazioni fra questi integrali fondamentali.

6. Giova ora anche osservare che nelle formole dei paragrafi precedenti è sempre supposto che nell'intervallo (a, b) nel quale s'intendono considerati i nostri integrali, il coefficiente a_0 si mantenga diverso da zero; però talvolta questo non accade, e allora le formole stesse possono presentarsi sotto forma illusoria.

In vista di questo, ai §§ 17 e seg. della seconda delle mie Memorie citate, con riferirmi allora anche a quanto avevo fatto osservare ai §§ 10 e 11 della prima, io esposi alcune considerazioni anche pel caso in cui a_0 diviene zero in un punto fra a e b che può sempre supporre essere il punto α ; e tali considerazioni valsero a assicurare che in molti casi si hanno ancora integrali *particolari* che si mantengono regolari anche nell'intorno del punto α nel quale $a_0 = 0$, e pei quali valgono sempre le formole precedenti. Ora poi, a complemento di quanto allora esponemmo daremo dei casi estesissimi nei quali, malgrado la presenza di un infinitesimo di a_0 nell'intervallo che si considera, si hanno ancora integrali che nell'intorno del punto d'infinitesimo si mantengono regolari (nel senso qui inteso § 1) (*).

espressione di y_0 e in quelle delle sue prime $n-1$ derivate per concluderne subito che

$$c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0,$$

e quindi $y_0 = 0$.

(*) FUCHS, nei suoi celebri studii sulle equazioni differenziali lineari dette già la condizione necessaria e sufficiente perchè queste equazioni abbiano tutti i loro integrali regolari, attribuendo però a questa parola un significato diverso dal nostro; ma egli suppose che i coefficienti della equazione fossero funzioni analitiche di x , mentre qui si suppone

7. Supporremo per semplicità che il punto d'infinitesimo di a_0 fra a e b sia il punto α , e indicheremo ancora come nelle Memorie citate con Θ_n il determinante

$$\begin{vmatrix} z_1 & z'_1 & z''_1 & \dots & z_1^{(n-2)} & \theta_1 \\ z_2 & z'_2 & z''_2 & \dots & z_2^{(n-2)} & \theta_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_n & z'_n & z''_n & \dots & z_n^{(n-3)} & \theta_n \end{vmatrix}$$

dal quale si ottengono i soliti tre Q_c , q_{x,x_1} e q_{x,x_1} che figurano nelle nostre formole, col porvi invece delle $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ rispettivamente le costanti c_1, c_2, \dots, c_n quando si vuole Q_c , e le quantità z_1, z_2, \dots, z_n e le Z_1, Z_2, \dots, Z_n nelle quali sia posto x_1 al posto di x quando si vogliano q_{x,x_1} , e q_{x,x_1} ; e ricorderemo che al § 15 della seconda di quelle Memorie già trovammo che se si prendono $z_1 = 1, z_2 = x - \alpha, z_3 = (x - \alpha)^2, \dots, z_{n-1} = (x - \alpha)^{n-2}$ e si lascia indeterminata z_n si ha la formula

$$\Theta_n = \varepsilon_{n-1} \overline{\pi}_{n-2} \left\{ \begin{aligned} & z_n^{(n-2)} \sum_{s=1}^{n-1} \varepsilon_{s-1} \frac{\theta_s}{\pi(s-1) \pi(n-s-1)} (x - \alpha)^{n-s-1} + \\ & + \varepsilon_1 z_n^{(n-3)} \sum_{s=1}^{n-2} \varepsilon_{s-1} \frac{\theta_s}{\pi(s-1) \pi(n-s-2)} (x - \alpha)^{n-s-2} + \\ & + \varepsilon_2 z_n^{(n-4)} \sum_{s=1}^{n-3} \varepsilon_{s-1} \frac{\theta_s}{\pi(s-1) \pi(n-s-3)} (x - \alpha)^{n-s-3} + \\ & + \dots \dots \dots + \\ & + \varepsilon_{n-2} z_n \sum_{s=1}^1 \varepsilon_{s-1} \frac{\theta_s}{\pi(s-1) \pi(1-s)} (x - \alpha)^{1-s} + \varepsilon_{n-1} \theta_n \end{aligned} \right\}, \quad (12)$$

dove $\overline{\pi}_{n-2} = \pi(0) \pi(1) \pi(2) \dots \pi(n-2)$; e allora sarà $Q = \overline{\pi}_{n-2} z_n^{(n-1)}$, essendo il z_n ancora da determinarsi.

Ora ammettendo, come già abbiamo detto che a_0 sia infinitesimo per $x = \alpha$, ci limiteremo a considerare il caso in cui esso sia infinitesimo di un certo ordine determinato p , e per modo che sia $a_0 = (x - \alpha)^p \theta_0(x)$, essendo

soltanto che siano funzioni regolari nel senso da noi indicato in principio, cioè che nell'intervallo (a, b) nel quale si considerano siano finite, continue e derivabili almeno fino a quell'ordine pel quale occorre di considerare le loro derivate, bastando ordinariamente che le ultime derivate siano finite e integrabili fra a e b , e talvolta anche potendo essere infinite, purchè sempre integrabili anche quando si riducono ai loro valori assoluti.

$\theta_0(x)$ una funzione di x che nel punto α è finita, continua e diversa da zero ed ha anche le derivate almeno fino a quelle dell'ordine n , per le ultime delle quali però, cioè per le n^e , senza richiedere che siano continue, richiederemo, per semplicizzare i nostri studii, che siano finite e integrabili fra a e b .

E ammesso questo, si vedrà subito che, onde nelle nostre formole i denominatori $a_0 Q$ siano finiti e diversi da zero, basterà determinare z_n partendo dalla formola $z_n^{(n-1)} = \frac{1}{\pi_{n-2} (x - \alpha)^2}$ (*), e facendo successive integrazioni. E ciò qualunque siano nell'intorno del punto $x = \alpha$ gli altri coefficienti a_1, a_2, \dots, a_n della nostra equazione pei quali porremo soltanto in seguito alcune condizioni, senza escludere ora che possano anche divenire infiniti nello stesso punto α .

Determinato così il z_n , avremo intanto $a_0 Q = \theta_0(x)$, e le formole precedenti ci permetteranno di determinare subito anche Q_e, q_{x,x_1} e q_{x,x_1} ; ma noi limitandoci, come ora faremo, alle equazioni omogenee, non avremo bisogno di occuparci del q_{x,x_1} .

Ora, rispetto a Q_e osserveremo che per la (12), dipendentemente dall'ordine d'infinitesimo p di a_0 , esso potrà avere dei termini che divengono infiniti per $x = \alpha$, ed anzi, almeno ordinariamente, lo saranno tutti, all'infuori di quello che porta c_n , se l'ordine d'infinitesimo di a_0 sarà uguale o superiore a $n - 1$; noi perciò per non incontrare questa difficoltà ci limiteremo senz'altro all'integrale particolare pel quale $c_1 = c_2 = \dots = c_{n-1} = 0$, prendendo poi per semplicità $c_n = \frac{1}{\pi_{n-2}}$, con che sarà $Q_e = 1$.

Osservando poi che il polinomio aggiunto Z in generale è dato dalla formola

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n-1} Z = & (a_0 z)^{(n)} + \varepsilon_1 (a_1 z)^{(n-1)} + \varepsilon_2 (a_2 z)^{(n-2)} + \dots + \\ & + \varepsilon_{n-1} (a_{n-1} z)' + \varepsilon_n (a_n z), \end{aligned} \quad (13)$$

(*) Nel § 17 della seconda delle Memorie citate, volendo che nelle nostre formole fosse $a_0 Q = 1$, fu determinato z_n colla condizione $z_n^{(n-1)} = \frac{1}{\pi_{n-2} a_0}$; ma più generalmente avrebbe anche potuto determinarsi colle formole $z_n^{(n-1)} = \frac{1}{\pi_{n-2} a_0^k}$, con k numero qualsiasi, e allora sarebbe stato $a_0 Q = a_0^{1-k}$. Qui le cose restano più semplici determinando z_n colla formola $z_n^{(n-1)} = \frac{1}{\pi_{n-2} (x - \alpha)^2}$.

si vede che delle quantità $Z_1, Z_2, \dots, Z_{n-1}, Z_n$ che dovremo porre in Θ_n al posto delle $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}, \theta_n$, dopo di avervi cambiato x in x_1 , per avere q_{x, x_1} , le prime $n-1$ saranno sempre finite se tali saranno i coefficienti della equazione data, e quelle delle loro derivate che occorre di considerare; ma anche in questo caso l'ultima Z_n , a causa del valore che avrà z_n , potrà avere uno o più termini che divengono infiniti per $x = \alpha$.

D'altra parte nel caso nostro ogni termine della serie che deve ancora rappresentare l'integrale sarà della forma

$$\int_{\alpha}^x \frac{q_{x, x_1}}{\theta_0(x_1)} dx_1 \int_{\alpha}^{x_1} \frac{q_{x_1, x_2}}{\theta_0(x_2)} dx_2 \int_{\alpha}^{x_2} \dots \int_{\alpha}^{x_{n-1}} \frac{q_{x_{n-1}, x_n}}{\theta_0(x_n)} dx_n, \quad (14)$$

e quindi onde essere sicuri che in un certo intorno di α questi termini conservano un significato, e costituiscono una serie convergente, basterà trovare dei casi nei quali è certo che le quantità q_{x, x_1} sono ancora sempre inferiori a un numero finito, o almeno sono tali che i termini stessi si comportino ancora come quelli di una serie esponenziale, o anche soltanto, più generalmente, sono tali che i varii integrali successivi

$$\int_{\alpha}^x \frac{q_{x, x_1}}{\theta_0(x_1)} dx_1, \quad \int_{\alpha}^x \frac{q_{x, x_1}}{\theta_0(x_1)} dx_1 \int_{\alpha}^{x_1} \frac{q_{x_1, x_2}}{\theta_0(x_2)} dx_2, \dots \quad (15)$$

risultino tutti numericamente inferiori ai termini di una serie convergente.

8. Tratteremo quest'ultimo caso che comprende naturalmente anche gli altri due, e per questo incominceremo col premettere una formola generale relativa agli integrali $\int_{\alpha}^x q_{x, x_1} dx_1$, e per la quale non si richiede neppure

che le z_1, z_2, \dots, z_n vengano fissate come nel paragrafo precedente, ma si suppone solo, in modo generale, che esse siano tali che, se anche divengono infinite per $x = \alpha$, per ciascuna di esse z_s la funzione corrispondente Z_s risulti integrabile fra α e x , come appunto dovranno poi essere sempre le Z_s nel caso nostro.

Osservando che pel valore di Z si ha la formola generale (13), e che in conseguenza la espressione

$$(a_0 z_s)^{(n-1)} + \varepsilon_1 (a_1 z_s)^{(n-2)} + \varepsilon_2 (a_2 z_s)^{(n-3)} + \dots + \varepsilon_{n-1} (a_{n-1} z_s) + \varepsilon_n \int a_n z_s dx_1 \quad (16)$$

rappresenta l'integrale indefinito $\varepsilon_{n-1} \int Z_s dx$, si potrà affermare, dietro le nostre ipotesi, che questa espressione dovrà avere un valore determinato anche per $x=\alpha$, che noi indicheremo con τ_s ; e siccome in generale si ha evidentemente

$$\int_{\alpha}^x q_{x, x_1} dx = \begin{vmatrix} z_1 & z'_1 & z''_1 & \dots & z_1^{(n-2)} & \int_{\alpha}^x Z_1 dx \\ z_2 & z'_2 & z''_2 & \dots & z_2^{(n-2)} & \int_{\alpha}^x Z_2 dx \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{n-1} & z'_{n-1} & z''_{n-1} & \dots & z_{n-1}^{(n-2)} & \int_{\alpha}^x Z_{n-1} dx \\ z_n & z'_n & z''_n & \dots & z_n^{(n-2)} & \int_{\alpha}^x Z_n dx \end{vmatrix},$$

avremo allora

$$\int_{\alpha}^x q_{x, x_1} dx = \varepsilon_{n+1} \begin{vmatrix} z_1 & z'_1 & z''_1 & \dots & z_1^{(n-2)} & (a_0 z_1)^{(n-1)} + \varepsilon_1 (a_1 z_1)^{(n-2)} + \dots + \\ & & & & & + \varepsilon_{n-1} (a_{n-1} z_1) + \varepsilon_n \int a_n z_1 dx - \tau_1 \\ z_2 & z'_2 & z''_2 & \dots & z_2^{(n-2)} & (a_0 z_2)^{(n-1)} + \varepsilon_1 (a_1 z_2)^{(n-2)} + \dots + \\ & & & & & + \varepsilon_{n-1} (a_{n-1} z_2) + \varepsilon_n \int a_n z_2 dx - \tau_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{n-1} & z'_{n-1} & z''_{n-1} & \dots & z_{n-1}^{(n-2)} & (a_0 z_{n-1})^{(n-1)} + \varepsilon_1 (a_1 z_{n-1})^{(n-2)} + \dots + \\ & & & & & + \varepsilon_{n-1} (a_{n-1} z_{n-1}) + \varepsilon_n \int a_n z_{n-1} dx - \tau_{n-1} \\ z_n & z'_n & z''_n & \dots & z_n^{(n-2)} & (a_0 z_n)^{(n-1)} + \varepsilon_1 (a_1 z_n)^{(n-2)} + \dots + \\ & & & & & + \varepsilon_{n-1} (a_{n-1} z_n) + \varepsilon_n \int a_n z_n dx - \tau_n \end{vmatrix}$$

e quindi applicando ai termini degli elementi dell'ultima colonna la formola di LEIBNITZ, e spezzando il determinante in altri colle regole note, giunge-

Aggiungiamo che gli studii che ora facciamo, e le formole che si trovano valgono

sempre con $\bar{a}(x)$ l'integrale $\int_{\alpha}^x |a_n z_n| dx$, con ch  $\bar{a}(x)$ sar  una funzione di x , positiva per $x > \alpha$, e negativa per $x < \alpha$, che non sar  mai decrescente e tender  a zero coll'avvicinarsi indefinito di x ad α ; e in particolare, nel caso di $a_n z_n$ sempre inferiore in valore assoluto a un numero finito, $\bar{a}(x)$ sar  della forma $(x - \alpha) d$, con d pure numericamente inferiore a un numero finito.

10. Ci  posto, incominciamo dal considerare il caso di $i > n - 1$, e allora le $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ saranno tutte finite per $x = \alpha$, e con

$$z_1 = 1, \quad z_2 = x - \alpha, \quad z_3 = (x - \alpha)^2, \dots, \quad z_{n-1} = (x - \alpha)^{n-2},$$

potremo prendere $z_n = p_n (x - \alpha)^{n-1-i}$, dove

$$p_n = \frac{1}{\pi_{n-2} (1-i) (2-i) \dots (n-1-i)},$$

e avremo in generale

$$a_0 z_s = (x - \alpha)^{i+s-1} \theta_0(x), \quad a_1 z_s = (x - \alpha)^{i+s-2} \theta_1(x), \dots, \\ a_{n-1} z_s = (x - \alpha)^{i-n+s} \theta_{n-1}(x)$$

per $s \leq n - 1$, e al tempo stesso

$$a_0 z_n = p_n (x - \alpha)^{n-1} \theta_0(x), \quad a_1 z_n = p_n (x - \alpha)^{n-2} \theta_1(x), \dots, \\ a_{n-1} z_n = p_n \theta_{n-1}(x);$$

e quindi per la formola (13) le Z_1, Z_2, \dots, Z_n saranno tutte integrabili se

anche pel caso che per la equazione data il punto α non sia un punto d'infinitesimo di a_0 e sia un punto ordinario, essendo al solito gli altri coefficienti $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ regolari nell'intorno di α ; perch  anche in questo caso moltiplicando tutta la equazione per $(x - \alpha)^i$ con $i \geq n - 1$ essa si ridurr  ad avere il coefficiente del primo termine infinitesimo di ordine i , e gli altri saranno finiti, e si potranno ancora porre sotto la forma

$$(x - \alpha)^{i-1} \theta_1(x), (x - \alpha)^{i-2} \theta_2(x), \dots, (x - \alpha)^{i-(n-1)} \theta_{n-1}(x),$$

essendo perch  allora le $\theta_1(\alpha), \theta_2(\alpha), \dots, \theta_{n-1}(\alpha)$ tutte zero, e solo il $\theta_0(\alpha)$ essendo diverso da zero.

lo saranno i prodotti $a_n z_1, a_n z_2, \dots, a_n z_n$, e allora gli elementi dell'ultima colonna del determinante che figura nella (17) diverranno rispettivamente

$\int_{\alpha}^x a_n z_1 dx, \int_{\alpha}^x a_n z_2 dx, \dots, \int_{\alpha}^x a_n z_n dx - \varepsilon_n \tau_n$, essendo τ_n il valore della espressione

$$(a_0 z_n)^{(n-1)} + \varepsilon_1 (a_1 z_n)^{(n-2)} + \dots + \varepsilon_{n-1} (a_{n-1} z_n)$$

per $x = \alpha$.

Ma quando sia ammesso che $a_n z_n$ sia integrabile da α ad x anche ridotto ai suoi valori assoluti $|a_n z_n|$, le altre quantità $a_n z_1, a_n z_2, \dots, a_n z_{n-1}$ non solo saranno integrabili, ma si avrà anche in generale

$$\int_{\alpha}^x a_n z_s dx = \int_{\alpha}^x \frac{z_s}{z_n} a_n z_n dx = \frac{1}{p_n} (\bar{x} - \alpha)^{i+s-n} \int_{\alpha}^x |a_n z_n| dx,$$

essendo \bar{x} un valore compreso fra α e x , e sarà quindi anche

$$\int_{\alpha}^x a_n z_s dx = \frac{\eta_s}{p_n} (x - \alpha)^{i+s-n} \int_{\alpha}^x |a_n z_n| dx,$$

dove η_s in valore assoluto non passa l'unità; e quindi per essere ora $a_0 Q = \theta_0(x)$, la formola (17) ci darà la seguente

$$\int_{\alpha}^x q_{x, x_1} dx_1 = \varepsilon_{n+1} \theta_0(x) + \varepsilon_n \bar{\pi}_{n-2} \tau_n -$$

$$- \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \eta_1 (x - \alpha)^{i+1-n} \\ x - \alpha & \pi(1) & \dots & 0 & \eta_2 (x - \alpha)^{i+2-n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (x - \alpha)^{n-2} (n-2) (x - \alpha)^{n-3} \dots \pi(n-2) & \eta_{n-1} (x - \alpha)^{i-1} & \dots & \dots & \dots \\ z_n & z'_n & \dots & z_n^{(n-2)} & 1 \end{vmatrix} \int_{\alpha}^x |a_n z_n|_{x_1} dx_1,$$

e di qui, osservando che pel determinante che figura in questa formola, quando vi si pongano per $z_n, z'_n, z''_n, \dots, z_n^{(n-2)}$ i loro valori, e vi si applichi la formola (12), o se ne faccia lo sviluppo secondo i termini della ultima linea, si trova che il suo valore è sempre numericamente inferiore a un numero

finito, si potrà scrivere senz'altro

$$\int_{\alpha}^x \mathbf{q}_{x,x_1} d x_1 = \varepsilon_{n+1} \theta_0(x) + \varepsilon_n \bar{\pi}_{n-2} \tau_n + g \bar{a}(x),$$

essendo g sempre numericamente inferiore a un numero finito.

Osservando poi che colla integrazione per parti si ha

$$\int_{\alpha}^x \frac{\mathbf{q}_{x,x_1}}{\theta_0(x_1)} d x_1 = \frac{1}{\theta_0(x)} \int_{\alpha}^x \mathbf{q}_{x,x_1} d x_1 - \int_{\alpha}^x \left[\frac{1}{\theta_0(x)} \right]' \left(\int_{\alpha}^x \mathbf{q}_{x,x_1} d x_1 \right) d x,$$

e quindi anche

$$\int_{\alpha}^x \frac{\mathbf{q}_{x,x_1}}{\theta_0(x_1)} d x_1 = \frac{1}{\theta_0(x)} \int_{\alpha}^x \mathbf{q}_{x,x_1} d x_1 - \left\{ \left[\frac{1}{\theta(x)} \right]' \int_{\alpha}^x \mathbf{q}_{x,x_1} d x_1 \right\}_{x=\bar{x}} (x - \alpha),$$

essendo \bar{x} un valore compreso fra α e x , basterà sostituire nel primo termine

di questa per $\int_{\alpha}^x \mathbf{q}_{x,x_1} d x_1$ il valore precedente, e osservare che

$$\frac{1}{\theta_0(x)} = \frac{1}{\theta_0(\alpha)} + \left[\frac{1}{\theta(x)} \right]'_{x=\bar{x}} (x - \alpha),$$

essendo \bar{x} un altro valore compreso fra α e x , per dedurne subito che

$$\int_{\alpha}^x \frac{\mathbf{q}_{x,x_1}}{\theta_0(x_1)} d x_1 = \varepsilon_{n+1} + \varepsilon_n \frac{\bar{\pi}_{n-2} \tau_n}{\theta_0(\alpha)} + g_1 \bar{a}(x) + (x - \alpha) d,$$

d e $g_1 = \frac{g}{\theta_0(\alpha)}$ avendo la solita particolarità di mantenersi sempre in valore assoluto inferiori a quantità finite d_0 e g_0 , per modo che si potrà scrivere

$$\int_{\alpha}^x \frac{\mathbf{q}_{x,x_1}}{\theta_0(x_1)} d x_1 = \varepsilon_{n+1} \left(1 - \frac{\bar{\pi}_{n-2} \tau_n}{\theta_0(\alpha)} \right) + \lambda_0 g_0 \bar{a}(x) + \lambda_1 d_0 (x - \alpha), \quad (18)$$

essendo λ_0 e λ_1 quantità comprese fra -1 e 1 ; quindi osservando anche che il prodotto $a_n z_n$ riportato ai coefficienti della equazione data, cioè di quella che si aveva prima di moltiplicarla per $(x - \alpha)^k$, può scriversi sotto la forma

$p_n \theta_0(x) \frac{a_n}{a_0} (x - \alpha)^{n-1}$, si conclude ora che, nel caso di $i > n - 1$, onde la funzione $\frac{q_{x, x_1}}{\theta_0(x_1)}$ sia integrabile rispetto ad x_1 da α ad x basterà che sia tale la espressione $\frac{a_n}{a_0} (x - \alpha)^{n-1}$ anche riducendola ai suoi valori assoluti, e allora si avrà la formola precedente (18).

E quando (come dovrà in particolare avvenire se q_{x, x_1} dovrà essere sempre numericamente inferiore a un numero finito) si voglia anche che

l'integrale $\int_{\alpha}^x \frac{q_{x, x_1}}{\theta_0(x_1)} dx_1$ tenda a zero coll'avvicinarsi indefinito di x ad α ,

allora bisognerà che la quantità $1 - \frac{\pi_{n-2}}{\pi_{n-1}} \frac{\tau_n}{\theta_0(\alpha)}$ sia zero, cioè che si abbia

$$1 - \frac{\pi_{n-2}}{\theta_0(\alpha)} \left\{ (a_0 z_n)^{(n-1)} + \varepsilon_1 (a_1 z_n)^{(n-2)} + \varepsilon_2 (a_2 z_n)^{(n-3)} + \dots + \varepsilon_{n-1} (a_{n-1} z_n) \right\}_{x=\alpha} = 0,$$

ovvero

$$1 - \frac{1}{(1-i)(2-i)\dots(n-1-i)\theta_0(\alpha)} \left\{ \pi(n-1)\theta_n(\alpha) + \right. \\ \left. + \varepsilon_1 \pi(n-2)\theta_1(\alpha) + \varepsilon_2 \pi(n-3)\theta_2(\alpha) + \dots + \varepsilon_{n-1} \pi(0)\theta_{n-1}(\alpha) \right\} = 0; \quad (19)$$

e in questo caso l'integrale stesso $\int_{\alpha}^x \frac{q_{x, x_1}}{\theta_0(x_1)} dx_1$ anzichè sotto la forma (18)

si presenterà sotto l'altra

$$\int_{\alpha}^x \frac{q_{x, x_1}}{\theta_0(x_1)} dx_1 = \lambda_0 g_0 \bar{a}(x) + \lambda_1 (x - \alpha) d_0. \quad (20)$$

E, naturalmente, in quest'ultimo caso, se q_{x, x_1} dovrà anche essere sempre numericamente inferiore a un numero finito, almeno ordinariamente bisognerà porre anche la condizione che il prodotto $a_n z_n$, o $\theta_0(x) \frac{a_n}{a_0} (x - \alpha)^{n-1}$, oltre ad essere integrabile da α ad x , sia anche finito, nel qual caso $\bar{a}(x)$ sarà della forma $(x - \alpha)d$ con d finito.

11. Dobbiamo ora esaminare gli altri integrali successivi (15), e per questo gioverà prima trasformare la espressione di q_{x, x_1} che si ottiene dalla (12) facendovi le solite sostituzioni, e ponendovi per z_n il suo valore, cioè

$$\begin{aligned}
 q_{x, x_1} = \varepsilon_{n-1} \left\{ \frac{\varepsilon_0}{1-i} \sum_1^{n-1} \varepsilon_{s-1} \frac{(Z_s)_{x_1}}{\pi(s-1) \pi(n-s-1)} (x-\alpha)^{n-s-i} + \right. \\
 + \frac{\varepsilon_1}{(1-i)(2-i)} \sum_1^{n-2} \varepsilon_{s-1} \frac{(Z_s)_{x_1}}{\pi(s-1) \pi(n-s-2)} (x-\alpha)^{n-s-i} + \\
 + \frac{\varepsilon_2}{(1-i)(2-i)(3-i)} \sum_1^{n-3} \varepsilon_{s-1} \frac{(Z_s)_{x_1}}{\pi(s-1) \pi(n-s-3)} (x-\alpha)^{n-s-i} + \\
 + \dots + \frac{\varepsilon_{n-3}}{(1-i)(2-i)\dots(n-2-i)} \sum_1^2 \varepsilon_{s-1} \frac{(Z_s)_{x_1}}{\pi(s-1) \pi(2-s)} (x-\alpha)^{n-s-i} + \\
 \left. + \frac{\varepsilon_{n-2}}{(1-i)(2-i)\dots(n-1-i)} \sum_1^1 \varepsilon_{s-1} \frac{(Z_s)_{x_1}}{\pi(s-1) \pi(1-s)} (x-\alpha)^{n-s-i} + \varepsilon_{n-1} \frac{\varepsilon_{n-2}}{\pi(n-2)} (Z_n)_{x_1} \right\}. \quad (2)
 \end{aligned}$$

Osserveremo perciò che da questa formola si ha l'altra

$$\begin{aligned}
 q_{x, x_1} = p_1 \varepsilon_{n-1} (Z_1)_{x_1} (x-\alpha)^{n-1-i} + p_2 \varepsilon_{n-1} (Z_2)_{x_1} (x-\alpha)^{n-2-i} + \\
 + p_3 \varepsilon_{n-1} (Z_3)_{x_1} (x-\alpha)^{n-3-i} + \dots + p_s \varepsilon_{n-1} (Z_s)_{x_1} (x-\alpha)^{n-s-i} + \dots \\
 + p_{n-1} \varepsilon_{n-1} (Z_{n-1})_{x_1} (x-\alpha)^{1-i} + \frac{\varepsilon_{n-2}}{\pi(n-2)} (Z_n)_{x_1},
 \end{aligned}$$

dove i coefficienti p_s , per $s=1, 2, \dots, n-1$, sono dati dalla formola

$$\begin{aligned}
 p_s = \frac{\varepsilon_{s-1}}{\pi(s-1)} \left\{ \frac{\varepsilon_{n-s-1}}{(1-i)(2-i)\dots(n-s-i) \pi(0)} + \frac{\varepsilon_{n-s-2}}{(1-i)(2-i)\dots(n-s-1-i) \pi(1)} + \right. \\
 \left. + \dots + \frac{\varepsilon_1}{(1-i)(2-i) \pi(n-s-2)} + \frac{\varepsilon_0}{(1-i) \pi(n-s-1)} \right\},
 \end{aligned}$$

che, sommando successivamente i varii termini fra parentesi, si riduce all'altra semplicissima

$$p_s = \frac{\varepsilon_s}{(i+s-n) \pi(s-1) \pi(n-s+1)}; \quad (22)$$

e quindi, siccome la formola generale (13) del valore di $\varepsilon_{n+1} Z$ ci dà per $s \leq n-1$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{n+1} (Z_s)_{x_1} = [(x_1 - \alpha)^{i+s-1} \theta_0(x_1)]^{(n)} + \varepsilon_1 [(x_1 - \alpha)^{i+s-2} \theta_1(x_1)]^{(n-1)} + \dots \\
 + \varepsilon_{n-1} [(x_1 - \alpha)^{i+s-n} \theta_{n-1}(x_1)]' + \varepsilon_n (a_n)_{x_1} (x_1 - \alpha)^{s-1},
 \end{aligned}$$

e per $s = n$

$$\frac{1}{p_n} \varepsilon_{n+1} (Z_n)_{x_1} = [(x_1 - \alpha)^{n-1} \theta_0(x_1)]^{(n)} + \varepsilon_1 [(x_1 - \alpha)^{n-2} \theta_1(x_1)]^{(n-1)} + \dots \\ + \varepsilon_{n-1} [\varepsilon_{n-1}(x_1)]' + \frac{1}{p_n} (a_n z_n)_{x_1},$$

e da queste si ha per $s \leq n-1$

$$\varepsilon_{n+1} (Z_s)_{x_1} = c_s (i + s - n) (x_1 - \alpha)^{i+s-1-n} + d_s (x_1 - \alpha)^{i+s-n} + \frac{1}{p_n} (a_n z_n)_{x_1} (x_1 - \alpha)^{i+s-n},$$

e per $s = n$

$$\varepsilon_{n+1} (Z_n)_{x_1} = (a_n z_n)_{x_1} + l_n,$$

dove p_n è il coefficiente numerico introdotto nel § 10, e le d_s e l_n sono quantità sempre numericamente inferiori a un numero finito, e

$$\left. \begin{aligned} c_s = & (i + s - 1)(i + s - 2) \dots (i + s - n + 1) \theta_0(\alpha) + \\ & + \varepsilon_1 (i + s - 2)(i + s - 3) \dots (i + s - n + 1) \theta_1(\alpha) + \\ & + \varepsilon_2 (i + s - 3) \dots (i + s - n + 1) \theta_2(\alpha) + \dots + \varepsilon_{n-1} \theta_{n-1}(\alpha), \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

se ne deduce che q_{x, x_1} può porsi sotto la forma

$$\left. \begin{aligned} q_{x, x_1} = & \frac{1}{x - \alpha} \left\{ c_1 p_1 (i + 1 - n) \left(\frac{x_1 - \alpha}{x - \alpha} \right)^{i-n} + \right. \\ & + c_2 p_2 (i + 2 - n) \left(\frac{x_1 - \alpha}{x - \alpha} \right)^{i+1-n} + \dots + c_{n-1} p_{n-1} (i - 1) \left(\frac{x_1 - \alpha}{x - \alpha} \right)^{i-2} \left. \right\} + \\ & + l + \frac{l_1}{p_n} (a_n z_n)_{x_1}, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

ovvero

$$\left. \begin{aligned} q_{x, x_1} = & \frac{1}{x - \alpha} \left\{ \frac{\varepsilon_1 c_1}{\pi(0) \pi(n-2)} \left(\frac{x_1 - \alpha}{x - \alpha} \right)^{i-n} + \right. \\ & + \frac{\varepsilon_2 c_2}{\pi(1) \pi(n-3)} \left(\frac{x_1 - \alpha}{x - \alpha} \right)^{i+1-n} + \frac{\varepsilon_3 c_3}{\pi(2) \pi(n-4)} \left(\frac{x_1 - \alpha}{x - \alpha} \right)^{i+2-n} + \\ & + \dots + \frac{\varepsilon_{n-1} c_{n-1}}{\pi(n-2) \pi(0)} \left(\frac{x_1 - \alpha}{x - \alpha} \right)^{i-2} \left. \right\} + l + \frac{l_1}{p} (a_n z_n)_{x_1}, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

dove

$$l_1 = p_1 \left(\frac{x_1 - \alpha}{x - \alpha} \right)^{i+1-n} + p_2 \left(\frac{x_1 - \alpha}{x - \alpha} \right)^{i+2-n} + \dots + p_{n-1} \left(\frac{x_1 - \alpha}{x - \alpha} \right)^{i-1} + \frac{1}{\pi_{n-2}} p_n,$$

e l è come l_1 sempre numericamente inferiore a un numero finito.

Questa espressione (25) di q_{x, x_1} , dopo di averla divisa per $\theta_0(x_1)$ col-
l'osservare che $\frac{1}{\theta_0(x)} = \frac{1}{\theta_0(\alpha)} + \left(\frac{1}{\theta(x)} \right)'_{x=\bar{x}} (x-\alpha)$, con \bar{x} compreso fra α e x ,
torna a mostrarci che onde $\frac{q_{x, x_1}}{\theta_0(x)}$ sia integrabile da α ad x rispetto ad x_1
basta che sia tale la espressione $a_n z_n$ o $\frac{a_n}{a_0} (x-\alpha)^{n-1}$ anche riducendola ai
suoi valori assoluti; e poi osservando che colla indicata integrazione il primo
termine fra parentesi dà luogo al termine $\frac{P}{\theta_0(\alpha)}$, dove

$$P = \frac{\varepsilon_1 c_1}{\pi(0) \pi(n-2)(i+1-n)} + \frac{\varepsilon_2 c_2}{\pi(1) \pi(n-3)(i+2-n)} + \left. \begin{aligned} &+ \frac{\varepsilon_3 c_3}{\pi(2) \pi(n-4)(i+3-n)} + \dots + \frac{\varepsilon_{n-1} c_{n-1}}{\pi(n-2) \pi(0)(i-1)} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

si ritrova una formola come la (18), cioè

$$\int_{\alpha}^x \frac{q_{x, x_1}}{\theta_0(x_1)} dx_1 = \frac{P}{\theta_0(\alpha)} + \lambda_0 g_0 \bar{a}(x) + \lambda_1 d_0 (x-\alpha), \quad (27)$$

dalla quale si vede anche che se si vorrà che l'integrale $\int_{\alpha}^x \frac{q_{x, x_1}}{\theta_0(x_1)} dx_1$ tenda
a zero coll'avvicinarsi indefinito di x ad α , bisognerà che sia soddisfatta la
condizione $P=0$, cioè

$$\frac{\varepsilon_1 c_1}{\pi(0) \pi(n-2)(i+1-n)} + \frac{\varepsilon_2 c_2}{\pi(1) \pi(n-3)(i+2-n)} + \left. \begin{aligned} &+ \frac{\varepsilon_3 c_3}{\pi(2) \pi(n-4)(i+3-n)} + \dots + \frac{\varepsilon_n c_{n-1}}{\pi(n-1) \pi(0)(i-1)} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

la quale necessariamente non sarà che la (19) posta sotto altra forma.

Dalla stessa formola (25) poi si vede subito anche che se sarà soddi-
sfatta questa condizione (28) o la (19), come in particolare avverrà quando
siano zero tutte le c_1, c_2, \dots, c_{n-1} , allora la espressione di $\frac{q_{x, x_1}}{\theta_0(x_1)}$ si ridurrà
alla forma semplice $\gamma(a_n z_n)_{x_1} + \gamma_1$, con γ e γ_1 numericamente inferiori a nu-
meri finiti μ e μ_1 , e quindi sarà anche sempre finita se $a_n z_n$ o $\frac{a_n}{a_0} (x-\alpha)^{n-1}$
nell'intorno di α , oltre ad essere integrabile, sarà anche finita.

E se le c_1, c_2, \dots, c_{n-1} non saranno tutte zero, essendo o no soddisfatta la condizione (28), siccome il primo termine della (25) può scriversi anche sotto la forma

$$\begin{aligned} & \frac{(x_1 - \alpha)^{i-n}}{(x - \alpha)^{i-n+1}} \left\{ P + \frac{\varepsilon_1 c_1}{\pi(0) \pi(n-2)} \left[1 - \frac{1}{i+1-n} \right] + \right. \\ & + \frac{\varepsilon_2 c_2}{\pi(1) \pi(n-3)} \left[\frac{x_1 - \alpha}{x - \alpha} - \frac{1}{i+2-n} \right] + \frac{\varepsilon_3 c_3}{\pi(2) \pi(n-4)} \left[\left(\frac{x_1 - \alpha}{x - \alpha} \right)^2 - \frac{1}{i+3-n} \right] + \\ & \left. + \dots + \frac{\varepsilon_{n-1} c_{n-1}}{\pi(n-2) \pi(0)} \left[\left(\frac{x_1 - \alpha}{x - \alpha} \right)^{n-2} - \frac{1}{i-1} \right] \right\}, \end{aligned}$$

e il rapporto $\frac{x_1 - \alpha}{x - \alpha}$ durante le integrazioni è sempre compreso fra 0 e 1, si vede subito che se s'indicano con $P', c'_1, c'_2, \dots, c'_{n-1}$ i valori assoluti di $P, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$, e con $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{n-1}$ i massimi valori assoluti delle quantità $1 - \frac{1}{i+1-n}, t - \frac{1}{i+2-n}, t^2 - \frac{1}{i+3-n}, \dots, t^{n-2} - \frac{1}{i-1}$ per t fra 0 e 1 (*), ponendo

$$\left. \begin{aligned} K &= \frac{c'_1}{\pi(0) \pi(n-2)} + \frac{c'_2}{\pi(1) \pi(n-3)} + \frac{c'_3}{\pi(2) \pi(n-4)} + \dots + \frac{c'_{n-1}}{\pi(n-2) \pi(0)}, \\ K_1 &= \frac{\alpha_1 c'_1}{\pi(0) \pi(n-2)} + \frac{\alpha_2 c'_2}{\pi(1) \pi(n-3)} + \frac{\alpha_3 c'_3}{\pi(2) \pi(n-4)} + \dots + \frac{\alpha_{n-1} c'_{n-1}}{\pi(n-2) \pi(0)}, \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

il primo termine della (25) sarà numericamente inferiore alle due quantità $K \frac{(x_1 - \alpha)^{i-n}}{(x - \alpha)^{i-n+1}}, (P' + K_1) \frac{(x_1 - \alpha)^{i-n}}{(x - \alpha)^{i-n+1}}$; e quindi indicando con Ω la minore

(*) Poichè $i > n-1$ evidentemente le $\alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_{n-1}$ saranno sempre i valori di $1 - \frac{1}{i+3-n}, 1 - \frac{1}{i+4-n}, \dots, 1 - \frac{1}{i-1}$, mentre le α_1 e α_2 per $i \geq n$ sono i valori di $1 - \frac{1}{i+1-n}, 1 - \frac{1}{i+2-n}$, e per i compreso fra $n-1$ e n (gli estremi $n-1$, e n escl.) saranno i valori di $\frac{1}{i+1-n} - 1$, e $\frac{1}{i+2-n}$, per modo che le $\alpha_2, \alpha_3 \dots \alpha_{n-1}$, saranno sempre inferiori ad uno, mentre α_1 lo sarà solo per $i > n - \frac{1}{2}$; donde apparisce che nel caso di $i > n - \frac{1}{2}$, e anche quando i è fra $n-1$ e $n - \frac{1}{2}$ purchè allora sia $c_1 = 0$, sarà sempre $K_1 < K$, e allora se sarà $P = 0$ si potrà prendere $\Omega = K_1$.

delle due quantità K e $P + K_1$, si potrà scrivere evidentemente per la (26)

$$\frac{q_{x,x_1}}{\theta_0(x_1)} = \eta_1 \frac{\Omega}{\bar{\theta}_0(x)} \frac{(x_1 - \alpha)^{i-n}}{(x - \alpha)^{i-n+1}} + \gamma (a_n z_n)_{x_1} + \gamma_1, \quad (30)$$

essendo $\bar{\theta}_0(x)$ il valore assoluto di $\theta_0(x)$, η_0 una quantità non superiore ad uno in valore assoluto, e γ e γ_1 altre quantità sempre numericamente inferiori a numeri positivi e finiti μ e μ_1 ; e il caso precedente di $c_1 = 0$, $c_2 = 0, \dots$, $c_{n-1} = 0$ corrisponderà evidentemente a quello di $K = 0$ e $K_1 = 0$ e $\Omega = 0$.

12. Trovata questa espressione (30) per $\frac{q_{x,x_1}}{\theta_0(x_1)}$, si studieranno successivamente con tutta facilità gli integrali (15).

Tenendo conto infatti della stessa formola (30) e del valore (27) di $\int_{\alpha}^x \frac{q(x, x_1)}{\theta_0(x_1)} dx_1$, nel quale siano cambiati x e x_1 in x_1 e x_2 , troveremo subito

$$\int_{\alpha}^x \frac{q_{x,x_1}}{\theta_0(x_1)} dx_1 \int_{\alpha}^{x_1} \frac{q_{x_1,x_2}}{\theta_0(x_2)} dx_2 = \int_{\alpha}^x \left\{ \eta_0 \frac{\Omega}{\bar{\theta}_0(x)} \frac{(x_1 - \alpha)^{i-n}}{(x - \alpha)^{i-n+1}} + \gamma (a_n z_n)_{x_1} + \gamma_1 \right\} \left\{ \frac{P}{\theta_0(x)} + \right. \\ \left. + \lambda_0 g_0 \bar{a}(x_1) + \lambda_1 d_0(x_1 - \alpha) \right\} dx_1,$$

e supponendo ad es.: $x > \alpha$, e eseguendo i calcoli, coll'osservare che durante il corso della integrazione si ha sempre $\bar{a}(x_1) \leq \bar{a}(x)$, troveremo con tutta facilità

$$\int_{\alpha}^x \frac{q_{x,x_1}}{\theta_0(x_1)} dx_1 \int_{\alpha}^{x_1} \frac{q_{x_1,x_2}}{\theta_0(x_2)} dx_2 = \frac{P}{\theta_0(x)} \left\{ \eta_1 \frac{\Omega}{\bar{\theta}_0(x) (i - n + 1)} + \eta_2 \mu \bar{a}(x) + \eta_3 \mu_1 (x - \alpha) \right\} + \\ + \bar{a}(x) g_0 \left\{ \eta_4 \frac{\Omega}{\bar{\theta}_0(x) (i - n + 1)} + \eta_5 \mu \bar{a}(x) + \eta_6 \mu_1 (x - \alpha) + \frac{\eta_7 \mu d_0}{g_0} (x - \alpha) \right\} + \\ + d_0 \left\{ \eta_8 \frac{\Omega}{\bar{\theta}_0(x) (i - n + 1)} + \eta_9 \mu_1 (x - \alpha) \right\} (x - \alpha),$$

essendo $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_9$ quantità il cui valore assoluto non passa l'unità; e quindi se fissiamo di restare con x in un intorno di α sufficientemente piccolo (ma finito), che certo esisterà, pel quale si abbia in valore assoluto

$$\mu \bar{a}(x) + \left(\mu_1 + \frac{\mu d_0}{g_0} \right) (x - \alpha) < \frac{\tau}{\bar{\theta}_0(x) (i - n + 1)},$$

essendo τ un numero positivo sufficientemente piccolo, avremo

$$\int_{\alpha}^x \frac{q_{x,x_1}}{\theta_0(x_1)} dx_1 \int_{\alpha}^{x_1} \frac{q_{x_1,x_2}}{\theta_0(x_2)} dx_2 = \nu_0 \frac{\Omega + \tau}{\theta_0(\alpha)(i-n+1)} \frac{P}{\theta_0(\alpha)} +$$

$$+ \nu_1 g_0 \frac{\Omega + \tau}{\theta_0(\alpha)(i-n+1)} \bar{a}(x) + \nu_2 d_0 \frac{\Omega + \tau}{\theta_0(\alpha)(i-n+1)} (x - \alpha),$$

essendo ν_0 , ν_1 e ν_2 nuove quantità non superiori ad uno in valore assoluto.

Di qui, osservando che il passaggio dall'integrale semplice (27) all'integrale doppio precedente, pei valori di x dell'intorno di α determinato sopra, si fa moltiplicando i tre termini del valore (27) dell'integrale semplice per $\frac{\Omega + \tau}{\theta_0(\alpha)(i-n+1)}$ e per quantità ν_0 , ν_1 e ν_2 non superiori ad uno in valore assoluto, si comprende subito che il passaggio all'integrale triplo si farà al modo stesso fra gli stessi confini per x , cioè si avrà

$$\int_{\alpha}^x \frac{q_{x,x_1}}{\theta_0(x_1)} dx_1 \int_{\alpha}^{x_1} \frac{q_{x_1,x_2}}{\theta_0(x_2)} dx_2 \int_{\alpha}^{x_2} \frac{q_{x_2,x_3}}{\theta_0(x_3)} dx_3 = \nu'_0 \left(\frac{\Omega + \tau}{\theta_0(\alpha)(i-n+1)} \right)^2 \frac{P}{\theta_0(\alpha)} +$$

$$+ \nu'_1 g_0 \left(\frac{\Omega + \tau}{\theta_0(\alpha)(i-n+1)} \right)^2 \bar{a}(x) + \nu'_2 d_0 \left(\frac{\Omega + \tau}{\theta_0(\alpha)(i-n+1)} \right)^2 (x - \alpha),$$

essendo ν'_0 , ν'_1 e ν'_2 nuove quantità non superiori ad uno in valore assoluto; quindi siccome questo processo può ripetersi indefinitamente, e gli integrali multipli successivi che così si determinano sono appunto gli integrali (15), si vede ora che se sarà $\frac{\Omega + \tau}{\theta_0(\alpha)(i-n+1)} < 1$, o anche soltanto $\frac{\Omega}{\theta_0(\alpha)(i-n+1)} < 1$ perchè τ può prendersi piccolo ad arbitrio, restando con x in un intorno sufficientemente piccolo (ma finito) di α la serie formata dai termini (15) si comporrà di tre serie sempre convergenti assolutamente e in ugual grado.

Ne segue dunque che se $a_n z_n$ o $\frac{a_n}{a_0} (x - \alpha)^{n-1}$ sarà integrabile nell'intorno di α anche ridotto ai valori assoluti, e se, essendo K e K_1 le quantità definite dalle (29), e P' il valore assoluto della espressione (26) di P , la minore Ω delle due quantità K e $P' + K_1$ sarà inferiore a $\frac{\Omega}{\theta_0(\alpha)(i-n+1)}$, la serie formata dai termini (15) sarà sempre convergente indipendentemente dall'ordine dei termini e in egual grado in un intorno sufficientemente piccolo, ma finito, di α ; e questo, per quanto si disse ai §§ 10 e 11 della prima

delle Memorie citate, basta per potere affermare che la detta serie rappresenterà un integrale della equazione data che sarà regolare (nel senso inteso da noi) per tutti gli indicati valori di x , eccettuato tutt'al più il punto $x = \alpha$ per le derivate.

E avendo riguardo alla forma della quantità entro la prima parentesi della (25), si vede subito che per Ω si può anche prendere in ogni caso il massimo valore assoluto della quantità

$$\frac{\varepsilon_1 c_1}{\pi(0) \pi(n-2)} + \frac{\varepsilon_2 c_2}{\pi(1) \pi(n-3)} t + \frac{\varepsilon_3 c_3}{\pi(2) \pi(n-4)} t^2 + \dots + \frac{\varepsilon_{n-1} c_{n-1}}{\pi(n-2) \pi(0)} t^{n-2} \quad (31)$$

pei valori di t da 0 a 1 (0 e 1 incl.).

E si può altresì notare che applicando un noto teorema di ABEL si vede che nella (30) si può anche intendere che Ω rappresenti un numero positivo del quale siano minori in valore assoluto le somme successive dei coefficienti delle potenze di $\frac{x_1 - \alpha}{x - \alpha}$ nella quantità entro la prima parentesi delle (25); e

allora invece della condizione precedente $\Omega < \bar{\theta}_0(\alpha)(i - n + 1)$ si trova l'altra che nessuna delle stesse somme successive di coefficienti delle (25) arrivi in valore assoluto a $(i - n + 1) \bar{\theta}_0(\alpha)$.

E aggiungiamo inoltre che se senza essere zero tutte le c_1, c_2, \dots, c_n , lo saranno alcune di esse a incominciare dalla prima, p. es. le prime h , cioè c_1, c_2, \dots, c_h , con $h < n - 1$, allora avendo ancora riguardo alla espressione (25) di q_{xx_1} e ripetendo i ragionamenti precedenti si trova che le condizioni per essere sicuri della esistenza dell'integrale regolare delle nostre equazioni nell'intorno di $x = \alpha$ vengono meno restrittive, perchè allora basta che la quantità Ω corrispondente a questo caso risulti inferiore a $(i - n + h + 1) \bar{\theta}_0(\alpha)$; e vi ha di più che allora per Ω può prendersi il massimo valore assoluto per t fra 0 e 1 (0 e 1 incl.) della quantità cui si riduce la espressione precedente (31) dividendola per t^h .

Nel caso particolare poi in cui siano zero tutte le c_1, c_2, \dots, c_{n-1} , allora per l'esistenza dell'integrale regolare della nostra equazione nell'intorno di α non rimane altra condizione che quella relativa alla integrabilità di $a_n z_n$ o di $\frac{a_n}{a_0}(x - \alpha)^{n-1}$ anche ridotto ai valori assoluti; e se $a_n z_n$ oltre ad essere integrabile sarà anche sempre finito, con chè, come già notammo, sarà pure sempre finito q_{xx_1} , allora saremo anche sicuri che la serie degli integrali (15) convergerà come una serie esponenziale, e l'integrale corrispondente della

nostra equazione sarà certamente regolare da α fino al primo nuovo punto d'infinitesimo che si avesse per a_0 fra a e b , se i coefficienti a_1, a_2, \dots, a_n non presentano essi singolarità in questo intervallo.

Oltre a ciò poi, siccome nel caso in cui le c_1, c_2, \dots, c_{n-1} sono tutte zero le formole che trovammo sopra per gli integrali (15) mostrano che tutti questi integrali tendono a zero all'avvicinarsi indefinito di x ad α , e lo stesso conseguentemente avverrà della serie da essi formata che è convergente in ugual grado nell'intorno di α , si vede che l'integrale regolare che si avrà per la nostra equazione in questo caso avrà anche la particolarità notevole di non potersi annullare per $x = \alpha$, perchè per questo valore di x si ridurrà al suo primo termine $\frac{Q_c}{a_0 Q}$ che per le nostre ipotesi è finito e diverso da zero.

13. Passiamo ora a considerare il caso di $i = n - 1$, e per questo osserviamo che allora, dovendo prendere $z_n = \bar{p}_n \log(x - \alpha)$, con $\bar{p}_n = \frac{\varepsilon_n}{\pi_{n-2} \pi(n-2)}$, i termini della espressione (16) per $s = n$ considerati separatamente divengono tutti infiniti per $x = \alpha$; e quindi bisognerà che sia soddisfatta qualche condizione perchè la loro somma possa restare finita.

Ora evidentemente considerando uno qualunque di questi termini $(a_h z_n)^{n-h-1}$ per $h = 0, 1, 2, \dots, n-1$, coll'osservare che $a_h = (x - \alpha)^{n-1-h} \theta_h(x)$, $z_n = \bar{p}_n \log(x - \alpha)$, si vede subito che in esso la parte che diventa infinita per $x = \alpha$ è soltanto $a_h^{(n-h-1)} z_n$; quindi supponendo anche ora, come nel caso precedente, che $a_n z_n$ sia integrabile fra α ed x anche ridotto ai suoi valori assoluti, si vede intanto che onde la espressione (16) possa restare finita per $x = \alpha$ quando $s = n$, bisogna che sia soddisfatta la condizione

$$a_0^{(n-1)} + \varepsilon_1 a_1^{(n-2)} + \varepsilon_2 a_2^{(n-3)} + \dots + \varepsilon_{n-1} a_{n-1} = 0 \quad \text{per } x = \alpha,$$

che può anche scriversi evidentemente

$$\left. \begin{aligned} \pi(n-1) \theta_0(\alpha) + \varepsilon_1 \pi(n-2) \theta_1(\alpha) + \varepsilon_2 \pi(n-3) \theta_2(\alpha) + \dots + \\ + \varepsilon_{n-1} \pi(0) \theta_{n-1}(\alpha) = 0; \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

e quando questo avvenga, se nella espressione (16) quando $s = n$ l'integrale $\int a_n z_n dx$ s'intenderà come al solito limitato da α ad x , τ_n avrà un significato, e sarà precisamente il limite per $x = \alpha$ di

$$(a_0 z_n)^{(n-1)} + \varepsilon_1 (a_1 z_n)^{(n-2)} + \varepsilon_2 (a_2 z_n)^{(n-3)} + \dots + \varepsilon_{n-1} (a_{n-1} z_n),$$

come nel caso precedente di $i > n - 1$; cioè sarà

$$\tau_n = \bar{p}_n \lim_{x=\alpha} \left\{ \theta_0(\alpha) [(x-\alpha)^{n-1} \log(x-\alpha)]^{(n-1)} + \right. \\ \left. + \varepsilon_1 \theta_1(\alpha) [(x-\alpha)^{n-2} \log(x-\alpha)]^{(n-2)} + \dots + \varepsilon_{n-1} \theta_{n-1}(\alpha) \log(x-\alpha) \right\},$$

o anche a causa della (32)

$$\tau_n = \bar{p}_n \left\{ C_{n-1} \theta_0(\alpha) + \varepsilon_1 C_{n-2} \theta_1(\alpha) + \varepsilon_2 C_{n-3} \theta_2(\alpha) + \dots + \varepsilon_{n-2} C_1 \theta_{n-2}(\alpha) \right\}, \quad (33)$$

avendo indicato in generale con C_s la parte numerica che, oltre al termine $\pi(s) \log(x-\alpha)$, figura in $[(x-\alpha)^s \log(x-\alpha)]^{(s)}$.

Quanto poi alle altre τ_s corrispondenti a $s = 1, 2, \dots, n-1$, osservando che si avrà ora

$$a_0 z_s = (x-\alpha)^{n+s-2} (\theta_0(x)), \quad a_1 z_s = (x-\alpha)^{n+s-3} \theta_1(x), \dots, \\ a_{n-1} z_s = (x-\alpha)^{s-1} \theta_{n-1}(x),$$

e che, per essere $a_n z_n$ integrabile anche ridotto ai valori assoluti, lo saranno a fortiori anche $a_n z_1, a_n z_2, \dots, a_n z_{n-1}$, e quindi gli integrali $\int a_n z_s dx$ che figurano nella (17) potranno intendersi tutti estesi da α ad x , si vedrà subito che le $\tau_2, \tau_3, \dots, \tau_{n-1}$ saranno tutte zero a causa dei valori precedenti delle $a_0 z_s, a_1 z_s, \dots, a_{n-1} z_s$ per $s = 2, 3, \dots, n-1$, mentre la τ_1 sarà pure zero a causa della condizione già posta (32); e quindi osservando anche che per x sufficientemente prossimo ad α (come basta supporlo) si ha

$$\int_{\alpha}^x a_n z_s dx = \eta_s (x-\alpha)^{s-1} \int_{\alpha}^x a_n \log(x-\alpha) dx \quad \text{per } s = 1, 2, \dots, n-1,$$

essendo le η_s quantità numericamente inferiori ad uno, si vede che la (17) conduce anche ora alla (18) quando in questa s'intenda che τ_n sia data dalla (33); e così, in questo caso di $i = n-1$, onde la funzione $\frac{q_{x,x_1}}{\theta_0(x_1)}$ sia integrabile rispetto ad x_1 da α ad x , basterà che sia tale la funzione $a_n \log(x-\alpha)$ o $\frac{a_n}{a_0} (x-\alpha)^{n-1} \log(x-\alpha)$ anche riducendola ai suoi valori assoluti, e che al tempo stesso sia soddisfatta la condizione (32).

E quando si voglia anche che l'integrale $\int_{\alpha}^x \frac{q_{x,x_1}}{\theta_0(x_1)} dx_1$ tenda a zero coll'avvicinarsi indefinito di x ad α , allora bisognerà che sia zero anche la quantità $1 - \frac{\bar{\pi}_{n-2} \bar{\varepsilon}_n}{\theta_0(\alpha)}$, cioè che si abbia anche la condizione

$$1 - \frac{\varepsilon_n}{\pi(n-2)\theta_0(\alpha)} \left\{ C_{n-1}\theta_0(\alpha) + \varepsilon_1 C_{n-2}\theta_1(\alpha) + \varepsilon_2 C_{n-3}\theta_2(\alpha) + \dots + \right. \\ \left. + \varepsilon_{n-2} C_1\theta_{n-2}(\alpha) \right\} = 0, \quad (34)$$

che corrisponde alla (19) che avevamo nel caso di $i > n-1$, e nella quale le C_i hanno i significati che loro attribuiamo sopra, per modo che, essendo $C_1 = 1$, nel caso di $n = 2$ questa condizione verrà soddisfatta da se.

14. Restano ora a trovarsi anche per questo caso di $i = n-1$ le condizioni che vengono dalla necessità che abbiamo che i successivi integrali (15) siano tutti numericamente inferiori ai termini di una serie convergente; e per questo procederemo ancora come nei §§ 11 e 12.

Valendosi ancora della (12) coll'osservare ai valori attuali di $z_n, z'_n, z''_n, \dots, z_n^{(n-2)}$, si troverà che q_{x,x_1} si pone ancora sotto la forma (21) nella quale però invece degli ultimi due termini sia scritto l'altro

$$- \bar{\pi}_{n-2} \left\{ z_n (Z_1)_{x_1} - (Z_n)_{x_1} \right\},$$

dove

$$z_n = \frac{\varepsilon_n}{\pi_{n-2} \pi(n-2)} \log(x - \alpha) = \bar{p}_n \log(x - \alpha),$$

che converrà studiare a parte; e quindi, applicando le stesse trasformazioni del § 11 giungeremo per prima cosa alla formola seguente

$$q_{x,x_1} = \frac{1}{x - \alpha} \left\{ c_2 p_2 + 2 c_3 p_3 \frac{x_1 - \alpha}{x - \alpha} + 3 c_4 p_4 \left(\frac{x_1 - \alpha}{x - \alpha} \right)^2 + \dots + (n-2) c_{n-1} p_{n-1} \left(\frac{x_1 - \alpha}{x - \alpha} \right)^{n-3} \right\} + \\ + \varepsilon_n (a_n)_{x_1} \left\{ \bar{p}_1 + p_2 \frac{x_1 - \alpha}{x - \alpha} + p_3 \left(\frac{x_1 - \alpha}{x - \alpha} \right)^2 + \dots + p_{n-2} \left(\frac{x_1 - \alpha}{x - \alpha} \right)^{n-3} \right\} + l_1 - \\ - \bar{\pi}_{n-2} \left\{ z_n (Z_1)_{x_1} - (Z_n)_{x_1} \right\},$$

essendo ora l , una quantità sempre numericamente inferiore a un numero finito, e le $p_2, p_3, \dots, p_{n-1}, c_2, c_3, \dots, c_{n-1}$ essendo quelle stesse che vengono dalle formole (22) e (23) col farvi ora $i = n-1$, e essendo ora $\bar{p}_1 = \frac{\varepsilon_1}{\pi(0)\pi(n-2)}$; e in questa formola tutti i termini mancheranno all'infuori dell'ultimo se sarà $n=2$.

Quanto poi a questo ultimo termine $-\bar{\pi}_{n-2} \left\{ z_n (Z_1)_{x_1} - (Z_n)_{x_1} \right\}$, osserviamo che avendo riguardo al valore generale (13) di Z , e all'essere ora $z_n = \bar{p}_n \log(x - \alpha)$, con $\bar{p}_n = \frac{\varepsilon_n}{\pi_{n-2}\pi(n-2)}$, si ha

$$\begin{aligned}\varepsilon_{n+1} Z_1 &= a_0^{(n)} + \varepsilon_1 a_1^{(n-1)} + \dots + \varepsilon_{n-1} a'_{n-1} + \varepsilon_n a_n, \\ \varepsilon_{n+1} Z_n &= \bar{p}_n \varepsilon_{n-1} Z_1 \log(x - \alpha) + \bar{p}_n \frac{c}{x - \alpha} + \bar{p}_n l_0,\end{aligned}$$

essendo l_0 una quantità sempre numericamente inferiore a un numero finito, e c una costante, dipendente linearmente e in modo omogeneo dalle solite quantità $\theta_0(\alpha), \theta_1(\alpha), \dots, \theta_{n-1}(\alpha)$, che volendolo potrà facilmente determinarsi (*), e che del resto, come poi vedremo, non potrà differire che per un

(*) Se si osserva che sviluppando il polinomio aggiunto Z dato dalla (13) si ha, come è noto

$$\varepsilon_{n+1} Z = a_0 z^{(n)} + q_1 z^{(n-1)} + q_2 z^{(n-2)} + \dots + q_{n-1} z' + q_n z,$$

dove in generale si ha

$$\begin{aligned}q_s &= n_s a_0^{(s)} + \varepsilon_1 (n-1)_{s-1} a_1^{(s-1)} + \varepsilon_2 (n-2)_{s-2} a_2^{(s-2)} + \dots + \\ &+ \varepsilon_{s-1} (n-s+1)_1 a'_{s-1} + \varepsilon_s (n-s)_0 a_s\end{aligned}$$

si vede che sarà

$$\begin{aligned}\varepsilon_{n+1} Z_n &= \bar{p}_n \varepsilon_{n-1} \left\{ \pi(n-1) \frac{a_0}{(x-\alpha)^{n-1}} + \varepsilon_1 \pi(n-2) \frac{q_1}{(x-\alpha)^{n-2}} + \varepsilon_2 \pi(n-3) \frac{q_2}{(x-\alpha)^{n-3}} + \dots + \right. \\ &\left. + \varepsilon_{n-1} \pi(0) q_{n-1} \right\} \frac{1}{x-\alpha} + \bar{p}_n q_n \log(x - \alpha)\end{aligned}$$

e poichè i rapporti $\frac{a_0}{(x-\alpha)^{n-1}}, \frac{q_1}{(x-\alpha)^{n-2}}, \frac{q_2}{(x-\alpha)^{n-3}}, \dots$, sono finiti per $x = \alpha$, sarà evidentemente

$$c = \varepsilon_n \lim_{x=\alpha} \left\{ \pi(n-1) \frac{a_0}{(x-\alpha)^{n-1}} + \varepsilon_1 \pi(n-2) \frac{q_1}{(x-\alpha)^{n-2}} + \varepsilon_2 \pi(n-3) \frac{q_2}{(x-\alpha)^{n-3}} + \dots + \varepsilon_{n-1} \pi(0) q_{n-1} \right\},$$

fattore numerico dal primo membro della (32); e quindi sarà evidentemente

$$\begin{aligned}
 & -\bar{\pi}_{n-2} \left\{ z_n (Z_1)_{x_1} - (Z_n)_{x_1} \right\} = \\
 & = \frac{1}{\pi (n-2)} \left\{ \varepsilon_{n+1} (Z_1)_{x_1} \log (x - \alpha) - \varepsilon_{n+1} (Z_1)_{x_1} \log (x_1 - \alpha) - \frac{c}{x_1 - \alpha} - l_0 \right\} = \\
 & = \frac{1}{\pi (n-2)} \left\{ (a_0^{(n)} + \varepsilon_1 a_1^{(n-1)} + \dots + \varepsilon_{n-1} a'_{n-1} + \varepsilon_n a_n)_{x_1} \log (x - \alpha) - \right. \\
 & \quad \left. - (a_0^{(n)} + \varepsilon_1 a_1^{(n-1)} + \dots + \varepsilon_{n-1} a'_{n-1} + \varepsilon_n a_n)_{x_1} \log (x_1 - \alpha) \right\} - \\
 & \quad - \frac{c}{\pi (n-2) (x_1 - \alpha)} - \frac{l_0}{\pi (n-2)},
 \end{aligned}$$

e così sostituendo nel valore dato sopra di q_{x, x_1} troveremo

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{x - \alpha} \left\{ c_2 p_2 + 2 c_3 p_3 \frac{x_1 - \alpha}{x - \alpha} + 3 c_4 p_4 \left(\frac{x_1 - \alpha}{x - \alpha} \right)^2 + \dots + (n-2) c_{n-1} p_{n-1} \left(\frac{x_1 - \alpha}{x - \alpha} \right)^{n-3} \right\} + \\
 & (a_n)_{x_1} l + l_2 + \frac{1}{\pi (n-2)} \left\{ (a_0^{(n)} + \varepsilon_1 a_1^{(n-1)} + \dots + \varepsilon_{n-1} a'_{n-1} + \varepsilon_n a_n)_{x_1} \log (x - \alpha) - \right. \\
 & \quad \left. (a_0^{(n)} + \varepsilon_1 a_1^{(n-1)} + \dots + \varepsilon_{n-1} a'_{n-1} + \varepsilon_n a_n)_{x_1} \log (x_1 - \alpha) \right\} - \frac{c}{\pi (n-2) (x_1 - \alpha)},
 \end{aligned} \tag{35}$$

dove $l_2 = l_1 - \frac{l_0}{\pi (n-2)}$; e ora posto q_{x, x_1} sotto questa forma, sarà facile stu-

diare $\frac{q_{x, x_1}}{\theta_0(x_1)}$, e l'integrale $\int_{\alpha}^x \frac{q_{x, x_1}}{\theta_0(x_1)} dx$, e i varii termini (15).

Ricorderemo perciò che pei coefficienti $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ già abbiamo fatta la ipotesi che siano regolari nell'intorno di α sino alle derivate degli ordini $n, n-1, n-2, \dots, 1$ rispettivamente che si suppongono ancora finite e integrabili; e per a_n abbiamo supposto che se anche diviene infinito

e quindi determinando effettivamente i valori di $\frac{q_s}{(x - \alpha)^{n-s-1}}$ per $x = \alpha$, si troverà

$$c = \varepsilon_{n-1} (\bar{q}_0 + \bar{q}_1 + \bar{q}_2 + \dots + \bar{q}_{n-1}),$$

essendo in generale

$$\begin{aligned}
 \bar{q}_s = & \varepsilon_s n_s \pi (n-1) \theta_0(\alpha) + \varepsilon_{s-1} (n-1)_{s-1} \pi (n-2) \theta_1(\alpha) + \varepsilon_{s-2} (n-2)_{s-2} \pi (n-3) \theta_2(\alpha) + \\
 & + \dots + \varepsilon_1 (n-s+1)_1 \pi (n-s) \theta_{s-1}(\alpha) + \varepsilon_s (n-s) \pi (n-s-1) \theta_s(\alpha).
 \end{aligned}$$

nell'intorno di α , è tale però che il prodotto $a_n z_n$ o $a_n \log(x - \alpha)$ sia integrabile anche ridotto ai valori assoluti, con chè lo sarà pure a_n .

Risulta da questo che i prodotti

$$(a_0^{(n)} + \varepsilon_1 a_1^{(n-1)} + \varepsilon_2 a_2^{(n-2)} + \dots + \varepsilon_{n-1} a'_{n-1} + \varepsilon_n a_n)_{x_1} \log(x - \alpha),$$

$$(a_0^{(n)} + \varepsilon_1 a_1^{(n-1)} + \varepsilon_2 a_2^{(n-2)} + \dots + \varepsilon_{n-1} a'_{n-1} + \varepsilon_n a_n)_{x_1} \log(x_1 - \alpha)$$

saranno ambedue integrabili rispetto ad x_1 nell'intorno di α anche ridotti ai loro valori assoluti; e, il primo di essi, siccome può scriversi

$$\frac{\log(x - \alpha)}{\log(x_1 - \alpha)} (a_0^{(n)} + \varepsilon_1 a_1^{(n-1)} + \varepsilon_2 a_2^{(n-2)} + \dots + \varepsilon_n a'_{n-1} + \varepsilon_n a_n)_{x_1} \log(x_1 - \alpha),$$

e durante l'integrazione il rapporto $\frac{\log(x - \alpha)}{\log(x_1 - \alpha)}$ non supera l'unità se x non si discosta troppo da α , si vede che il suo integrale rispetto ad x_1 sarà numericamente inferiore all'integrale del valore assoluto del secondo prodotto; quindi avuto riguardo alla (35) si può ora evidentemente asserire che, onde $\frac{q_{x,x_1}}{\theta_0(x_1)}$ sia integrabile rispetto ad x_1 da α ad x , basterà che in q_{x,x_1} manchi il termine col divisore $x_1 - \alpha$, cioè basterà che sia soddisfatta la condizione $c = 0$, la quale dovrà naturalmente corrispondere alle (32) che gli studi precedenti ci dettero come condizione necessaria perchè l'integrale indefinito $\int \frac{q_{x,x_1}}{\theta_0(x_1)} dx_1$ non avesse il termine della forma $\lambda \log(x - \alpha)$ che sarebbe divenuto infinito limitando l'integrale da α ad x .

E siccome il primo membro della (32) non è altro che il valore che si ha per c_1 dalla forma generale (23) delle c_s quando vi si fa $s = 1$, e $i = n - 1$, così la attuale condizione $c = 0$ non sarà altro che la $c_1 = 0$.

Am messo ora che questa condizione $c = 0$, o $c_1 = 0$, sia soddisfatta, dalla precedente si vede subito che avremo la formola

$$\int_{\alpha}^x \frac{q_{x,x_1}}{\theta_0(x_1)} dx_1 = \frac{P}{\theta_0(\alpha)} + \lambda_0 g_0 \bar{b}(x) + \lambda_1 g_1 \bar{b}_1(x) + \lambda_2 d_0(x - \alpha), \quad (36)$$

che è analoga alla (27), e nella quale

$$\left. \begin{aligned} \bar{b}(x) &= \int_{\alpha}^x |(a_0^{(n)} + \varepsilon_1 a_1^{(n-1)} + \varepsilon_2 a_2^{(n-2)} + \dots + \varepsilon_{n-1} a'_{n-1} + \varepsilon_n a_n)_{x_1} \log(x_1 - \alpha)| dx_1, \\ \bar{b}_1(x) &= \int_{\alpha}^x |(a_n)_{x_1}| dx_1, \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

e P può intendersi che sia ancora senz'altro la solita espressione (26) che definimmo pel caso di $i > n - 1$, quando in essa sia fatto, come ora è, $c_1 = 0$,

e $i = n - 1$; e anche qui se vorremo che l'integrale $\int_{\alpha}^x \frac{q_{x,x_1}}{\theta_0(x_1)} dx_1$ tenda a

zero coll'avvicinarsi indefinito di x ad α bisognerà che come pel caso di $i > n - 1$ sia soddisfatta la condizione $P = 0$, che naturalmente non sarà che la (34) posta sott'altra forma; e in questa formola il termine P mancherà se sarà $n = 2$.

Seguendo ora gli stessi processi dei §§ 11 e 12, dopo di aver fatto nei valori di P , K e K_1 $c_1 = 0$ e poi $i = n - 1$, si trova ancora che essendo Ω la minore delle due quantità K e $P' + K_1$, la solita nostra quantità $\frac{q_{x,x_1}}{\theta_0(x_1)}$ potrà scriversi sotto la forma seguente

$$\frac{q_{x,x_1}}{\theta_0(x_1)} = \eta_0 \frac{\Omega}{\theta_0(\alpha)} \frac{1}{x - \alpha} + \gamma |(a_n)_{x_1}| + \gamma_1 |(a_0^{(n)} + \varepsilon_1 a_1^{(n-1)} + \dots + \varepsilon_{n-1} a'_{n-1} + \varepsilon_n a_n)_{x_1} \log(x_1 - \alpha)| + \gamma_2, \quad (38)$$

essendo η_0 una quantità numericamente non superiore ad uno, e γ , γ_1 , γ_2 quantità numericamente inferiori a numeri finiti μ , μ_1 e μ_2 ; e ora tenendo conto di questo risultato e della formola (36), e facendo ragionamenti del tutto simili a quelli del § 12, si giungerà ancora a concludere che la serie degli integrali (15) rappresenterà ancora un integrale regolare della equazione data in un intorno sufficientemente piccolo, ma finito, del punto $x = \alpha$, se si avrà $c = 0$ o $c_1 = 0$, cioè se sarà soddisfatta la condizione (32), e se al tempo stesso, essendo ancora P , K e K_1 le quantità definite dalle (26), e (29) e nelle quali ora sia soppresso il primo termine col farvi $c_1 = 0$, e sia fatto $i = n - 1$, ed essendo P' il valore assoluto di P , e Ω la minore delle due quantità K e $P' + K_1$, questa quantità Ω avrà un valore inferiore a $\bar{\theta}_0(\alpha)$.

E avendo riguardo alla forma della quantità entro la prima parentesi della (35) si vede subito che per Ω si può anche prendere in ogni caso il massimo valore assoluto della quantità

$$c_2 p_2 + 2 c_3 p_3 t + 3 c_4 p_4 t^2 + \dots + (n - 2) c_{n-1} p_{n-1} t^{n-3} \quad (39)$$

pei valori di t da 0 a 1 (0 e 1 incl.).

E anche qui, come al § 12, applicando il solito teorema di ABEL si può sostituire alla quantità Ω un numero del quale siano minori in valore asso-

luto le somme successive dei coefficienti delle potenze di $\frac{x_1 - \alpha}{x - \alpha}$ nella quantità fra parentesi del primo termine della (35), e allora invece della condizione precedente si trova l'altra che nessuna delle stesse somme successive arrivi in valore assoluto a $\bar{\theta}_0(\alpha)$.

E come pel caso di $i > n - 1$ se ora, quando sia $n > 2$, oltre alla c_1 saranno zero anche le c_2, c_3, \dots, c_h con $h < n - 1$, allora per l'esistenza dell'integrale regolare intorno al punto α si troverà al modo stesso che basta che sia $\Omega < h \bar{\theta}_0(\alpha)$, e allora per Ω potrà anche prendersi il massimo valore assoluto per t fra 0 e 1 (0 e 1 incl.) della quantità cui si riduce la espressione precedente (39) dividendola per t^{h-1} .

E nel caso particolare in cui, pure essendo $n > 2$, sono zero tutte le c_2, c_3, \dots, c_{n-1} con chè anche P e Ω saranno zero, non rimarrà che la condizione $c = 0$ o $c_1 = 0$ insieme all'altra solita relativa alla integrabilità di $a_n z_n$ o $\frac{a_n}{a_0} (x - \alpha)^{n-1} \log(x - \alpha)$, precisamente come nel caso di $n = 2$ nel quale le quantità Ω e P non figurano affatto; e allora se queste quantità $a_n z_n$ o $\frac{a_n}{a_0} (x - \alpha)^{n-1} \log(x - \alpha)$ saranno anche finite, tale risulterà anche $\frac{q_{x,x_1}}{\theta_0(x_1)}$ e la serie degli integrali (15) convergerà come una serie esponenziale, ecc....

E nel caso di $n = 2$, come in quello di $n > 2$ quando le c_2, c_3, \dots, c_{n-1} siano tutte zero, l'integrale regolare corrispondente avrà ancora la particolarità di non annullarsi per $x = \alpha$, come trovammo in fine del § 12 anche pel caso di $i > n - 1$.

E merita altresì di essere notato che pel caso che ora considerammo di $i = n - 1$ si hanno gli stessi risultati che si trovarono pel caso di $i > n - 1$, e possono quindi i due casi riunirsi anche in uno solo, salvo quando $i = n - 1$ a richiedere in più che sia soddisfatta anche la condizione $c = 0$ o $c_1 = 0$, e a sostituire alla espressione $\frac{a_n}{a_0} (x - \alpha)^{n-1}$ l'altra $\frac{a_n}{a_0} (x - \alpha)^{n-1} \log(x - \alpha)$ che dovrà essere atta all'integrazione anche ridotta ai suoi valori assoluti.

15. Rimarrebbe ora a considerare il caso di i positivo o negativo e inferiore a $n - 1$, nel qual caso i coefficienti a_1, a_2, \dots, a_{n-1} della nostra equazione possono come a_n anche divenire infiniti per $x = \alpha$; ma di questo caso, che è assai complicato quando si voglia trattarlo in modo generale anche nei suoi dettagli, noi daremo qui soltanto un cenno che del resto potrà bastare a indicare la via da seguirsi per applicare con facilità questi studii nei casi di equazioni speciali.

Distingueremo perciò il caso in cui i non è uno dei numeri interi $1, 2, \dots, n-2$ da quello in cui è appunto uno di questi numeri, e incominciando dal primo di questi due casi, osserveremo che allora avendosi sempre, come nel caso di $i > n-1$,

$$z_n = p_n (x - \alpha)^{n-1-i}, \quad a_0 z_n = p_n (x - \alpha)^{n-1} \theta_0(x),$$

$$a_1 z_n = p_n (x - \alpha)^{n-2} \theta_1(x), \dots, \quad a_{n-1} z_n = p_n \theta_{n-1}(x),$$

la espressione

$$(a_0 z_n)^{(n-1)} + \varepsilon_1 (a_1 z_n)^{(n-2)} + \varepsilon_2 (a_2 z_n)^{(n-3)} + \dots + \varepsilon_{n-1} (a_{n-1} z_n)$$

avrà ancora un significato nell'intorno di $x = \alpha$, e quindi onde Z_n sia integrabile fra α e x basterà che lo sia il prodotto $a_n z_n$ come nei casi precedenti; e ora questo lo sarà certamente quando lo sia a_n , perchè pei valori inferiori ad $n-1$ e non interi che ora si considerano di i , la funzione z_n tende a zero al tendere di x ad α .

Però ora, avendosi sempre per $s \leq n-1$,

$$a_0 z_s = (x - \alpha)^{i+s-1} \theta_0(x), \quad a_1 z_s = (x - \alpha)^{i+s-2} \theta_1(x), \dots,$$

$$a_{n-1} z_s = (x - \alpha)^{i+s-n} \theta_{n-1}(x),$$

è certo che, nei casi ora indicati per i , per alcuni, o per tutti questi valori $1, 2, \dots, n-1$ di s alcune o tutte le potenze di $x - \alpha$ nei secondi membri di queste formole saranno negative, e altrettanto quindi avverrà nella espressione

$$(a_0 z_s)^{(n-1)} + \varepsilon_1 (a_1 z_s)^{(n-2)} + \varepsilon_2 (a_2 z_s)^{(n-3)} + \dots + \varepsilon_{n-1} (a_{n-1} z_s) + \varepsilon_n \int a_n z_n dx$$

nella quale, a causa dell'ultimo termine, potranno comparire anche termini col fattore $\log(x - \alpha)$; e conseguentemente onde essere certi che le Z_1, Z_2, \dots, Z_{n-1} risultino integrabili da α ad x bisognerà richiedere che in questa espressione i coefficienti delle potenze negative di $x - \alpha$, e quelli dei termini con $\log(x - \alpha)$ se vi saranno, risultino tutti zero.

Ne segue che avremo ora per questo varie condizioni da soddisfare che noi non scriviamo, ma che potranno trovarsi con facilità caso per caso, e il numero delle quali crescerà quanto più i sarà lontana inferiormente da $n-1$; e se trovando soddisfatte queste condizioni le $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}$ risulteranno zero, potremo ripetere i ragionamenti che facemmo nel caso di $i > n-1$;

e quando si voglia che l'integrale $\int_{\alpha}^x \frac{q_{x,x_1}}{\theta_0(x_1)} dx_1$ tenda a zero coll'avvicinarsi

indefinito di x ad α , giungeremo ancora alla condizione (19) che potrà però rientrare in alcune delle condizioni precedenti che qui non abbiamo scritto.

Formando poi il valore di q_{x,x_1} come si fece nel § 11 pel caso di $i > n - 1$, con ragionamenti simili a quelli che allora si fecero si troveranno altre condizioni da aggiungersi alle precedenti e nelle quali alcune potranno anche rientrare, come potranno anche aversi certe incompatibilità.

Se poi i sarà uno dei numeri $1, 2, \dots, n - 2$, allora nelle successive integrazioni che dovremo fare partendo dalla formola $z_n^{(n-1)} = \frac{1}{\tau_{n-2}(x-\alpha)^i}$ per determinare $z_n^{(n-2)}, z_n^{(n-3)}, \dots, z'_n, z_n$ giungeremo certamente a termini che conterranno $\log(x-\alpha)$ come accadde nel caso di $i = n - 1$, e quindi in questo caso oltre alle condizioni che vengono come nel caso precedente dalla considerazione delle quantità Z_1, Z_2, \dots, Z_{n-1} e della espressione di q_{x,x_1} , avremo le altre che vengono dall'uguagliare a zero i coefficienti di quei termini che per la presenza del fattore $\log(x-\alpha)$ o di potenze negative di $x-\alpha$ porterebbero a quantità infinite per $x = \alpha$; e al solito alcune di queste condizioni potranno rientrare in altre, e anche essere fra loro incompatibili.

16. I risultati che abbiamo ottenuti si riferiscono a tutte le equazioni lineari omogenee dell'ordine n

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \quad (39)$$

che si considerano pei valori reali di x in un certo intervallo (a, b) , e nelle quali il coefficiente a_0 per un certo valore α di x in questo intervallo diviene infinitesimo di un cert'ordine p , e i coefficienti a_1, a_2, \dots, a_{n-1} lo divengono almeno degli ordini $p - 1, p - 2, \dots, p - (n - 1)$, e per modo che in generale per $h = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ si abbia $a_h = (x - \alpha)^{p-h} \theta_h(x)$, essendo $\theta_h(x)$ una funzione di x che è finita e continua e derivabile fra a e b almeno fino all'ordine $n - h$, bastando però che queste ultime derivate di ordine $n - h$ siano finite e integrabili fra a e b ; e infine il coefficiente a_n è tale che il prodotto $a_n z_n$, cioè $a_n (x - \alpha)^{n-1-i}$ o $a_n \log(x - \alpha)$, sia integrabile fra a e b anche ridotto ai suoi valori assoluti.

Nei risultati stessi però è sempre inteso che i coefficienti ivi indicati con $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ siano quelli della equazione data dopo di averla moltiplicata per $(x - \alpha)^{i-p}$, e quindi la condizione che ora abbiamo ricordata

intorno al prodotto $a_n z_n$, o $a_n (x - \alpha)^{n-1-i}$ o $a_n \log (x - \alpha)$, riportata ai veri coefficienti della equazione data corrisponde a una condizione relativa ai prodotti $a_n (x - \alpha)^{n-1-p}$, e $a_n (x - \alpha)^{n-1} p \log (x - \alpha)$, o ai rapporti $\frac{a_n (x - \alpha)^{n-1}}{a_0}$, e $\frac{a_n (x - \alpha)^{n-1} \log (x - \alpha)}{a_0}$; e così, riassumendo ora i risultati medesimi con riguardo più specialmente ai casi di $i \geq n - 1$, e riferendoci sempre ai coefficienti della equazione data, noi possiamo dire che

« Data una equazione come la (39) nella quale i coefficienti $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ siano della forma $a_0 = (x - \alpha)^p \theta_0(x)$, $a_1 = (x - \alpha)^{p-1} \theta_1(x), \dots, a_h = (x - \alpha)^{p-h} \theta_h(x), \dots, a_{n-1} = (x - \alpha)^{p-n+1} \theta_{n-1}(x)$, e le $\theta_0(x), \theta_1(x), \dots, \theta_h(x), \dots, \theta_{n-1}(x)$ soddisfino alle condizioni sopra indicate, onde essere sicuri che essa ammette un integrale regolare in un certo intorno (finito) del punto $x = \alpha$, basterà che siano soddisfatte le condizioni seguenti:

« 1.° che il coefficiente a_n sia tale che la espressione $a_n (x - \alpha)^{n-1-p}$, o l'altra $a_n (x - \alpha)^{n-1-p} \log (x - \alpha)$, che possono anche scriversi rispettivamente sotto la forma $\frac{a_n}{a_0} (x - \alpha)^{n-1}$, o $\frac{a_n}{a_0} (x - \alpha)^{n-1} \log (x - \alpha)$, risultino atte alla integrazione da α ad x anche ridotte ai loro valori assoluti.

« 2.° che posto in generale colla (23)

$$c_s = (i + s - 1)(i + s - 2)(i + s - 3) \dots (i + s - n + 1) \theta_0(\alpha) + \\ + \varepsilon_1 (i + s - 2)(i + s - 3) \dots (i + s - n + 1) \theta_1(\alpha) + \\ + \varepsilon_2 (i + s - 3) \dots (i + s - n + 1) \theta_2(\alpha) + \\ + \dots + \varepsilon_{n-1} \theta_{n-1}(\alpha), \quad (40)$$

« per $s = 1, 2, \dots, n - 1$, e posto inoltre colle (26) e (29)

$$P = \frac{\varepsilon_1 c_1}{\pi(0) \pi(n-2)(i+1-n)} + \frac{\varepsilon_2 c_2}{\pi(1) \pi(n-3)(i+2-n)} + \\ + \frac{\varepsilon_3 c_3}{\pi(2) \pi(n-4)(i+3-n)} + \dots + \frac{\varepsilon_{n-1} c_{n-1}}{\pi(n-2) \pi(0)(i-1)}, \\ K = \frac{c'_1}{\pi(0) \pi(n-2)} + \frac{c'_2}{\pi(1) \pi(n-3)} + \frac{c'_3}{\pi(2) \pi(n-4)} + \dots + \frac{c'_{n-1}}{\pi(n-2) \pi(0)}, \\ K_1 = \frac{\alpha_1 c'_1}{\pi(0) \pi(n-2)} + \frac{\alpha_2 c'_2}{\pi(1) \pi(n-3)} + \frac{\alpha_3 c'_3}{\pi(2) \pi(n-4)} + \dots + \frac{\alpha_{n-1} c'_{n-1}}{\pi(n-2) \pi(0)}, \quad (41)$$

« dove le $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{n-1}$ sono i massimi valori assoluti delle quantità
 « $1 - \frac{1}{i+1-n}, t - \frac{1}{i+2-n}, t^2 - \frac{1}{i+3-n}, \dots, t^{n-2} - \frac{1}{i-1}$ per t fra
 « 0 e 1, e indicati con c'_s, P' , e $\bar{\theta}_0(\alpha)$ i valori assoluti di c_s, P , e $\theta_0(\alpha)$,
 « esista un valore di i non inferiore a $n-1$ pel quale, essendo Ω la minore
 « delle due quantità K e $P' + K$, e c_{h+1} la prima delle quantità c_1, c_2, \dots ,
 « c_{h+1}, \dots, c_{n-1} che sia diversa da zero, si abbia $\Omega < (i-n+h+1) \bar{\theta}_0(\alpha)$;
 « e con questo però che quando il valore che si abbia così per i sia soltanto
 « l'estremo inferiore $n-1$, allora ci si trovi nel caso in cui anche la espres-
 « sione $\frac{a_n}{a_0} (x-\alpha)^{n-1} \log(x-\alpha)$ è atta alla integrazione anche ridotta ai valori
 « assoluti, e oltre a ciò sia zero almeno il c_1 , sicchè sia soddisfatta la con-
 « dizione

$$\left. \begin{aligned} & \pi(n-1) \theta_0(\alpha) + \varepsilon_1 \pi(n-2) \theta_1(\alpha) + \varepsilon_2 \pi(n-3) \theta_2(\alpha) + \dots + \\ & + \varepsilon_{n-1} \pi(0) \theta_{n-1}(\alpha) = 0; \end{aligned} \right\} (42)$$

« intendendosi allora che in ciascuna delle espressioni di P, K e K_1 sia sop-
 « presso il primo termine (*).

« E così in questo ultimo caso di $i=n-1$ se sarà $c_2=c_3=\dots=c_{n-1}=0$,
 « ciò che porterà che sia $P=K=K_1=0$, allora anche quando sia $n>2$
 « non si avrà altro che la condizione precedente (42) o $c_1=0$, come nel
 « caso di $n=2$.

« E senza introdurre le quantità P, K e K_1 , e ammettendo sempre che
 « c_{h+1} sia la prima delle $c_1, c_2, \dots, c_{h+1}, \dots, c_{n-1}$ diverse da zero, si potrà
 « anche intendere che in questa condizione Ω rappresenti il massimo valore
 « assoluto della espressione

$$\frac{\varepsilon_{h+1} c_{h+1}}{\pi(h) \pi(n-h-2)} + \frac{\varepsilon_{h+2} c_{h+2}}{\pi(h+1) \pi(n-h-3)} t + \dots + \frac{\varepsilon_{n-1} c_{n-1}}{\pi(n-2) \pi(0)} t^{n-h-2} \quad (43)$$

« pei valori di t da 0 a 1 (0 e 1 incl.). »

(*) Come già notammo al § 12 le $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{n-1}$ non potranno superare l'unità, e lo stesso sarà anche per α_1 se $i > n - \frac{1}{2}$; e quindi per $i > n - \frac{1}{2}$, e anche per i fra $n-1$ e $n - \frac{1}{2}$ purchè allora sia $c_1=0$, sarà sempre $K_1 \leq K$; e così in questi casi se sarà $P=0$ potremo prendere sempre senz'altro $\Omega = K_1$.

17. E si può notare, per riguardo alla prima condizione del paragrafo precedente, che quando nella equazione data (39) l'ordine d'infinitesimo p di a_0 per $x = \alpha$ non sia superiore ad $n - 1$, la stessa prima condizione risulterà sempre soddisfatta da se quando a_n nel primo caso e $a_n \log(x - \alpha)$ nel secondo risultino atte alla integrazione anche riducendole ai valori assoluti, e quindi in particolare quando a_n sia finita e integrabile fra a e b , nel qual caso basterà anche che a_0 per $x = \alpha$ non sia infinitesimo di un ordine superiore a un numero vicino quanto si vuole ad n ma inferiore ad n .

E per ciò che ha riguardo alla seconda condizione dello stesso paragrafo è da notare esplicitamente che quando per un certo valore di i superiore o uguale ad $n - 1$ si trovi che le c_1, c_2, \dots, c_{n-1} sono tutte zero, anche le P, K e K_i saranno zero esse pure, e la stessa seconda condizione risulterà soddisfatta senz'altro, e quindi allora non rimarrà che la prima condizione, quella cioè relativa alla espressione $a_n(x - \alpha)^{n-1-p}$, o $\frac{a_n}{a_0}(x - \alpha)^{n-1}$ per $i > n - 1$, e all'altra $a_n(x - \alpha)^{n-1-p} \log(x - \alpha)$, o $\frac{a_n}{a_0}(x - \alpha)^{n-1} \log(x - \alpha)$ per $i = n - 1$; e quando queste quantità rispettivamente siano anche finite, allora la serie che rappresenterà l'integrale regolare della (39) convergerà come una serie esponenziale per tutti i valori di x dalle due parti di α fino al primo nuovo infinitesimo di a_0 fra a e b se vi sarà, o fino al primo punto nel quale $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ presentino singolarità.

E sempre in questo caso in cui le c_1, c_2, \dots, c_{n-1} risulteranno tutte zero per un certo valore di i superiore o uguale ad $n - 1$, si avrà anche la particolarità notevole che « l'integrale regolare corrispondente della nostra equazione oltre essere finito sarà anche diverso da zero per $x = \alpha$ ».

18. Se poi la seconda condizione del § 16 non risulterà soddisfatta per nessun valore di i uguale o superiore ad $n - 1$, pure essendo soddisfatta la prima condizione dello stesso paragrafo, allora si potrà provare se supponendo $i < n - 1$ risulteranno soddisfatte le condizioni che per quel caso dicemmo potersi trovare coi processi del § 15.

In ogni caso poi quando le condizioni che abbiamo date nei due paragrafi precedenti per la esistenza di un integrale regolare della equazione (39) in un intorno del punto α siano soddisfatte, questo integrale regolare potrà sempre determinarsi per mezzo delle nostre formole generali nelle quali, con $z_1 = 1, z_2 = x - \alpha, z_3 = (x - \alpha)^2, \dots, z_{n-1} = (x - \alpha)^{n-2}$, sia fatto $z_n = p_n(x - \alpha)^{n-1-i}$, con $p_n = \frac{1}{\pi_{n-2}(1-i)(2-i)\dots(n-1-i)}$, per i diverso

da $n-1$, o $z_n = \bar{p}_n \log(x-\alpha)$, con $\bar{p}_n = \frac{\varepsilon_n}{\pi_{n-2} \pi(n-2)}$, per $i = n-1$, e applicandole alla equazione

$$\begin{aligned} & a_0(x-\alpha)^{i-p} y^{(n)} + a_1(x-\alpha)^{i-p} y^{(n-1)} + \dots + \\ & + a_{n-1}(x-\alpha)^{i-p} y' + a_n(x-\alpha)^{i-p} y = 0, \end{aligned} \quad (44)$$

o

$$\begin{aligned} & (x-\alpha)^i \theta_0(x) y^{(n)} + (x-\alpha)^{i-1} \theta_1(x) y^{(n-1)} + \dots + \\ & + (x-\alpha)^{i-n+1} \theta_{n-1}(x) y' + a_n(x-\alpha)^{i-p} y = 0, \end{aligned} \quad (45)$$

che viene da quella data (39) moltiplicandola per $(x-\alpha)^{i-p}$, e intendendo nel caso di $z_n = \bar{p}_n \log(x-\alpha)$ che allora sia $i = n-1$.

19. Aggiungiamo che questi studii dimostrano che per la equazione data (39) si ha un integrale regolare in un intorno di un punto α d'infinitesimo di a_0 quando sono soddisfatte le condizioni che abbiamo trovato, e assicurano quindi che questo integrale è finito e continuo per $x = \alpha$; ma, come già notammo nel § 12, gli studii stessi non ci assicurano nulla per le sue derivate nel punto α .

Per vedere che cosa accada di queste derivate, che nei casi ordinarii potranno aversi colla derivazione delle nostre serie generali, o della formola finita (6), bisogna vedere se le formole che così si ottengono per la equazione (44) o (45) conservano un significato anche per $x = \alpha$; e per questo occorrerà studiare anche i valori delle derivate di q_{x, x_1} , rispetto ad x pei valori di x che si considerano e per quelli di x_1 fra α e x ($x_1 = x$ incl.), e occorrerà studiare anche i termini che vengono dal termine gene-

rale (14) o dall'integrale $\int_{\alpha}^x q_{x, x_1} y_{x_1} dx_1$ della (6) quando in essi al posto di

q_{x, x_1} sotto l'integrale relativo ad x_1 si pongono le sue derivate rispetto ad x ; e queste derivate dovranno considerarsi fino a quella dell'ordine h se vorremo assicurarci della esistenza delle derivate dell'integrale fino a questo ordine.

Tale studio si farà con facilità, coi processi stessi che seguimmo nei §§ 11 e seg. per studiare q_{x, x_1} , valendosi delle q_{x, x_1} date dal solito determinante, o dal suo sviluppo (12) nel quale sia posto per z_n il valore corrispondente $p_n(x-\alpha)^{n-1-p}$ o $\bar{p}_n \log(x-\alpha)$, e per $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ siano posti i valori di Z_1, Z_2, \dots, Z_n per $x = x_1$.

20. Questi risultati generali, essendo relativi a tutte le equazioni li-

neari omogenee, ci sembrano assai notevoli, e più ancora appariranno tali dalle applicazioni che poi ne faremo alle equazioni del 2.^o e del 3.^o ordine.

Però è da notare che quando, essendosi limitati o no ai soli casi di $i \geq n - 1$, le condizioni che abbiamo date per la esistenza di un integrale regolare non risultino soddisfatte per alcun valore di i , allora non potremo affermare che l'integrale regolare nell'intorno del punto α esiste, ma non potremo neppure esser certi del contrario, sia perchè le condizioni dei paragrafi precedenti per l'esistenza di un tale integrale regolare si sono trovate soltanto come condizioni sufficienti, sia perchè può anche darsi che le difficoltà provengano dalla scelta che abbiamo fatta dei valori di z_1, z_2, \dots, z_n , come appunto si troverà nel caso delle equazioni del second'ordine.

E pel caso in cui le indicate condizioni non risultino soddisfatte, potrà giovare l'osservare che trasformando la equazione data (39) colla formola $y = tu$, dove t è una funzione che per ora può lasciarsi indeterminata, la nuova equazione in u sarà la seguente:

$$a_0 t u^{(n)} + \lambda_1 u^{(n-1)} + \lambda_2 u^{(n-2)} + \dots + \lambda_{n-1} u' + \lambda_n u = 0, \quad (46)$$

dove in generale

$$\lambda_h = n_h a_0 t^{(h)} + (n-1)_{h-1} a_1 t^{(h-1)} + (n-2)_{h-2} a_2 t^{(h-2)} + \dots + a_h t,$$

e come si vede facilmente ha per polinomio aggiunto \overline{Z} quello stesso Z della equazione primitiva moltiplicato per t .

E potrà darsi che prendendo per t una funzione conveniente che pel solito sarà una potenza di $x - \alpha$, o $\log(x - \alpha)$, e applicando i processi precedenti si trovino soddisfatte per la nuova equazione in u tutte le condizioni che abbiamo trovato per l'applicabilità dei processi stessi insieme a quelle relative ai suoi coefficienti; ed allora essa ammetterà certamente un integrale regolare, e la equazione data ne avrà uno che diventerà regolare moltiplicandolo per $\frac{1}{t}$.

21. Facciamo ora l'applicazione dei risultati generali che abbiamo ottenuti al caso delle equazioni lineari omogenee del second'ordine

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \quad (47)$$

nelle quali ammetteremo che il coefficiente a_0 per $x = \alpha$ divenga infinitesimo di ordine p , e esso e il coefficiente a_1 soddisfino alle condizioni poste in generale pei primi n della (39) al principio del § 16, e ammetteremo

inoltre senz'altro che il rapporto $\frac{a_2}{a_0}(x-\alpha)$, o l'altro $\frac{a_2}{a_0}(x-\alpha)\log(x-\alpha)$ siano integrabili nell'intorno di α anche riducendoli ai valori assoluti, ciò che in particolare, come osservammo in generale al § 17, avverrà sempre quando, essendo a_0 infinitesimo di ordine non superiore a un numero determinato minore di 2 per $x=\alpha$, a_2 sia finito e atto alla integrazione nell'intorno di α .

Con questi dati la prima delle condizioni del § 16 sarà già soddisfatta, e quanto alla seconda si vede subito che se sarà $\frac{\theta_1(\alpha)}{\theta_0(\alpha)} \geq 1$ essa rimarrà subito soddisfatta col prendere $i = \frac{\theta_1(\alpha)}{\theta_0(\alpha)}$, perchè allora verrà $c_1 = 0$.

Se poi sarà $\frac{\theta_1(\alpha)}{\theta_0(\alpha)} < 1$, si osserverà prima che colle notazioni dello stesso § 16, si avrà

$$c_1 = i\theta_0(\alpha) - \theta_1(\alpha), \quad P = -\frac{c_1}{i-1}, \quad K = c'_1 = \bar{\theta}_0(\alpha)\left(i - \frac{\theta_1(\alpha)}{\theta_0(\alpha)}\right),$$

e inoltre sarà $K_i = K \frac{2-i}{i-1}$ per $1 < i \leq 2$, e $K_i = K \frac{i-2}{i-1}$ per $i \geq 2$, e di qui osservando che per $\frac{\theta_1(\alpha)}{\theta_0(\alpha)} < 1$ il K viene ad essere sempre superiore a $(i-1)\bar{\theta}_0(\alpha)$, e che solo per $i > \frac{3}{2}$ si ha $K_i < K$, e anche allora $P' + K_i$ risulta sempre superiore a $(i-1)\bar{\theta}_0(\alpha)$, si vede subito che non sarà possibile soddisfare alla condizione $\Omega < (i-1)\bar{\theta}_0(\alpha)$ per nessun valore di $i > 1$, mentre poi per $i=1$ non può essere $c_1=0$; dunque si può intanto evidentemente concludere che « mentre, per quanto osservammo nel paragrafo precedente, « non si può per ora dire nulla nel caso di $\frac{\theta_1(\alpha)}{\theta_0(\alpha)} < 1$, si può però affermare « che quando sia $\frac{\theta_1(\alpha)}{\theta_0(\alpha)} \geq 1$ esisterà sempre un integrale regolare della nostra equazione (47) che si troverà applicando le nostre formole generali « alla equazione

$$(x-\alpha)^{i-p} a_0 y'' + (x-\alpha)^{i-p} a_1 y' + (x-\alpha)^{i-p} a_2 y = 0, \quad (48)$$

« ovvero

$$(x-\alpha)^i \theta_0(x) y'' + (x-\alpha)^{i-1} \theta_1(x) y' + (x-\alpha)^{i-p} a_2 y = 0, \quad (49)$$

« con $i = \frac{\theta_1(\alpha)}{\theta_0(\alpha)}$, prendendo $z_1 = 1$, $z_2 = \frac{(x - \alpha)^{1-i}}{1-i}$ quando $i = \frac{\theta_1(\alpha)}{\theta_0(\alpha)} > 1$, e
 « prendendo invece $z_1 = 1$, $z_2 = \log(x - \alpha)$ quando $i = 1$, o $\theta_1(\alpha) = \theta_0(\alpha)$. »

E per le considerazioni generali che abbiamo fatte nei paragrafi precedenti si può anche affermare che « questo integrale regolare oltre essere finito « per $x = \alpha$ sarà anche diverso da zero. »

22. E per decidere come si comporta questo integrale regolare rispetto alle derivate, bisognerà applicare le considerazioni generali del § 19, esaminando cioè per la equazione (49) i valori di q_{x, x_1} e delle sue derivate rispetto ad x per x_1 compreso fra α e x ($x_1 = x$ inclus.); e così in particolare, limitandosi qui al caso delle derivate di prim'ordine, si osserverà che ora si ha

$$q_{x, x_1} = z_2(x) Z_1(x_1) - Z_2(x_1), \quad q'_{x, x_1} = z'_2(x) Z_1(x_1),$$

essendo $z_2(x) = \frac{(x - \alpha)^{1-i}}{1-i}$ per $i > 1$, e $z_2(x) = \log(x - \alpha)$ per $i = 1$, e quindi in ogni caso $z'_2(x) = \frac{1}{(x - \alpha)^i}$, $z''_2(x) = -\frac{i}{(x - \alpha)^{i+1}}$, ed essendo inoltre

$$\begin{aligned} Z_1(x) &= [(x - \alpha)^i \theta_0(x)]' - [(x - \alpha)^{i-1} \theta_1(x)]' + (x - \alpha)^{i-p} a_2(x) = \\ &= \{ (i - 1) \frac{i \theta_0(x) - \theta_1(x)}{x - \alpha} + 2 i \theta'_0(x) - \theta'_1(x) \} (x - \alpha)^{i-1} + (x - \alpha)^i \theta''_0(x) + (x - \alpha)^{i-p} a_2(x), \\ Z_2(x) &= [(x - \alpha)^i \theta_0(x) z_2(x)]' - [(x - \alpha)^{i-1} \theta_1(x) z_2(x)]' + (x - \alpha)^{i-p} a_2(x) z_2(x) = \\ &= \{ 2 [(x - \alpha)^i \theta_0(x)]' - (x - \alpha)^{i-1} \theta_1(x) \} z'_2(x) + (x - \alpha)^i \theta_0(x) z''_2(x) + Z_1(x) z_2(x) = \\ &= \frac{i \theta_0(x) - \theta_1(x)}{x - \alpha} + 2 \theta'_0(x) + Z_1(x) z_2(x); \end{aligned}$$

e siccome le funzioni $\theta_0(x)$ e $\theta_1(x)$ hanno le derivate prime determinate e finite, e per le condizioni poste sopra si ha $i \theta_0(\alpha) = \theta_1(\alpha)$, il rapporto $\frac{i \theta_0(x) - \theta_1(x)}{x - \alpha}$ che figura in queste formole sarà finito anche per $x = \alpha$, e potrà esserlo anche in altri casi.

Di qui poi si deduce che

$$q_{xx} = - \frac{i \theta_c(x) - \theta_1(x)}{x - \alpha} - 2 \theta'_0(x),$$

$$q'_{xx_1} = \frac{1}{x - \alpha} \left\{ (i - 1) \frac{i \theta_0(x_1) - \theta_1(x_1)}{x_1 - \alpha} + 2 i \theta'_0(x_1) - \theta'_1(x_1) \right\} \left(\frac{x_1 - \alpha}{x - \alpha} \right)^{i-1} +$$

$$+ \theta''_0(x_1) \left(\frac{x_1 - \alpha}{x - \alpha} \right)^i + a_2(x_1) (x_1 - \alpha)^{i-p} \frac{1}{(x - \alpha)^i};$$

quindi poichè derivando la serie che rappresenta il nostro integrale y , oltre ad un termine certamente finito si hanno termini che si riducono a $\frac{q_{xx}}{\theta_0(x)} y$, e si ha inoltre una serie i cui termini sono della forma

$$\int_{\alpha}^x \frac{q'_{xx_1}}{\theta_0(x_1)} dx_1 \int_{\alpha}^{x_1} \frac{q_{x_1 x_2}}{\theta(x_2)} dx_2 \int_{\alpha}^{x_2} \frac{q_{x_2 x_3}}{\theta(x_3)} dx_3 \dots \int_{\alpha}^{x_{m-1}} \frac{q_{x_{m-1} x_m}}{\theta_0(x)} dx_m,$$

e sono in conseguenza quelli che vengono dagli integrali (15) eseguendo su essi una nuova integrazione dopo avervi cambiata x in x_1 , e averli moltiplicati per $\frac{q'_{xx_1}}{\theta_0(x_1)}$, così abbiamo ora gli elementi per potere studiare la serie derivata di quella del nostro integrale y .

Si vedrà subito infatti ora che la parte $\frac{q_{xx}}{\theta_0(x)} y$ sarà finita anche per $x = \alpha$, tali essendo q_{xx} e y ; e quanto all'altra parte osservando che $\frac{x_1 - \alpha}{x - \alpha} \leq 1$, e che per quanto già vedemmo ogni integrale (15) è della forma $A_m \bar{a}(x) + B_m(x - \alpha)$, dove le A_m e B_m sono finite, e i loro valori assoluti costituiscono serie convergenti, e $\bar{a}(x)$ è l'integrale da α e x dei valori assoluti delle espressioni $a_2(x - \alpha)^{i-p}$ o $a_2(x - \alpha)^{i-p} \log(x - \alpha)$, o delle altre $\frac{a_2}{a_1}(x - \alpha)$ o $\frac{a_2}{a_0}(x - \alpha) \log(x - \alpha)$ che figurano nella prima condizione del § 16, si vedrà subito che ora tutto dipenderà dal restare o no finiti per $x = \alpha$ i due integrali

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{(x - \alpha)^i} \int_{\alpha}^x (x_1 - \alpha)^{i-1} a_2(x_1) (x_1 - \alpha)^{i-p} dx_1, \\ & \frac{1}{(x - \alpha)^i} \int_{\alpha}^x (x_1 - \alpha)^{i-1} \bar{a}(x_1) a_2(x_1) (x_1 - \alpha)^{i-p} dx_1; \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

ai quali darà luogo l'ultimo termine di q'_{xx_1} , non essendo il caso di occuparsi dell'altro integrale

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(x-\alpha)^i} \int_{\alpha}^x (x_1-\alpha) a_2(x_1) (x_1-\alpha)^{i-p} dx_1 = \\ & = \frac{1}{(x-\alpha)^i} \int_{\alpha}^x (x_1-\alpha)^i a_2(x_1) (x-\alpha)^{i-p} dx_1 \end{aligned}$$

che sarà certamente finito e tenderà a zero coll'avvicinarsi di x ad α quando sia finito il primo degli integrali precedenti (50).

Ma evidentemente gl'integrali precedenti sono rispettivamente inferiori in valore assoluto a $\frac{\bar{a}(x)}{x-\alpha}$ e $\frac{\bar{a}(x)}{x-\alpha} \int_{\alpha}^x |a_2(x_1) (x-\alpha)^{i-p}| dx_1$ cioè anche in ogni caso a $\frac{\bar{a}(x)}{x-\alpha}$, e $\frac{[\bar{a}(x)]^2}{x-\alpha}$; quindi si può ora concludere che la derivata del nostro integrale y sarà determinata e finita anche per $x=\alpha$ se $\bar{a}(x)$ che col tendere di x ad α diviene infinitesimo lo diverrà almeno del prim'ordine.

Allo stesso risultato e con maggiore sollecitudine saremmo giunti anche studiando la derivata della formola (6), cioè di $\frac{1}{\theta_0(x)} + \frac{1}{\theta_0(x)} \int_{\alpha}^x q_{xx_1} y_{x_1} dx_1$; e così la derivata del nostro integrale, che fuori del punto α poteva sempre, dietro queste considerazioni, ottenersi derivando termine a termine la serie che lo rappresenta o quest'ultima espressione, esisterà e potrà ottenersi al modo stesso anche per $x=\alpha$ quando $\bar{a}(x)$ col tendere di x ad α divenga infinitesimo almeno del prim'ordine, come in particolare avviene sempre quando $a_2(x-\alpha)^{i-p}$, o $a_2(x-\alpha)^i p \log(x-\alpha)$ sono finiti e integrabili.

Studii simili potrebbero farsi per esaminare le derivate 2^e, 3^e, ecc., del nostro integrale; ma queste possono studiarsi anche partendo dalla equazione data.

23. Tutto questo quando il rapporto $\frac{\theta_1(\alpha)}{\theta_0(\alpha)}$, che non è altro che il limite di $\frac{a_1(x-\alpha)}{a_0}$ per $x=\alpha$, non sia inferiore ad uno.

Se poi lo stesso rapporto sarà inferiore ad uno, la condizione $c_1=0$ del § 16 si soddisfarà ancora quando si prende $i=\frac{\theta_1(\alpha)}{\theta_0(\alpha)}$; ma, come osservammo

in modo generale al § 15 questo non basta per potersi dire sicuri dell'esistenza di un integrale regolare della equazione data nell'intorno del punto α ; e bisognerebbe sviluppare le considerazioni generali del § 15 stesso applicate alla nostra equazione del second'ordine.

Anche questo però potrebbe darsi che non conducesse a conclusioni definitive; ed è meglio perciò tener conto della osservazione generale fatta al § 20, secondo la quale può anche darsi che il non potere trattare anche il caso di $\frac{\theta_1(\alpha)}{\theta_0(\alpha)} < 1$ coi processi relativi al caso di $i \geq 1$ dipenda soltanto dalla scelta fatta delle funzioni z_1 e z_2 , e che in conseguenza un integrale regolare esista sempre per queste equazioni, e possa ancora trovarsi colle nostre formole generali, ma partendo da altre funzioni z_1 e z_2 .

24. E difatti nel caso delle equazioni del second'ordine (47) nelle quali i coefficienti soddisfano ancora alle condizioni indicate, ma il rapporto $\frac{\theta_1(\alpha)}{\theta_0(\alpha)}$ è inferiore alla unità, l'integrale regolare intorno al punto $x = \alpha$ esiste ancora, e per trovarlo colle nostre formole basta partire anzichè dalle funzioni z_1 e z_2 dei casi precedenti da altre che sono integrali della equazione aggiunta di quella $\bar{a}_0 y'' + \bar{a}_1 y' + \bar{a}_2 y = 0$ cui si riduce la equazione data (47) quando si moltiplica per una potenza di $x - \alpha$ tale da rendere il suo primo coefficiente a_0 infinitesimo del prim'ordine per $x = \alpha$ ove già non la sia.

In questo caso infatti la equazione aggiunta ora indicata

$$\bar{a}_0 z'' + \bar{q}_1 z' + \bar{q}_2 z = 0 \quad (51)$$

per quanto ha riguardo ai suoi coefficienti \bar{a}_0 , \bar{q}_1 e \bar{q}_2 nell'intorno di $x = \alpha$ viene ad essere nelle stesse condizioni della prima, cioè della (47), perchè per essa si ha $\bar{q}_1 = 2 \bar{a}'_0 - \bar{a}_1$, $\bar{q}_2 = \bar{a}''_0 - \bar{a}'_1 + \bar{a}_2$, e il valore i , del rapporto corrispondente al valore primitivo $i = \frac{\theta_1(\alpha)}{\theta_0(\alpha)}$ relativo alla prima, essendo il limite di $\frac{\bar{q}_1(x - \alpha)}{\bar{a}_0}$ per $x = \alpha$, è $i_1 = 2 - i$; talchè se per la equazione data (47) si ha $i < 1$, per la equazione aggiunta sopra indicata (51) sarà $i_1 > 1$; e questa avrà quindi certamente un integrale η_1 che sarà regolare intorno al punto $x = \alpha$ e non si annullerà in questo punto, dove avrà ancora la derivata determinata e finita se, essendo $\bar{a}(x)$ il solito integrale della espressione $\frac{a_2}{a_0}(x - \alpha)$ ridotta ai valori assoluti, che si suppone esistere, la funzione $\bar{a}(x)$

diverrà infinitesima almeno del prim'ordine per $x = z$, come in particolare avverrà quando a_2 sarà finita, e a_0 sarà infinitesimo di ordine non superiore al primo.

Ma d'altra parte quando una equazione del second'ordine (47) ha un integrale y_1 regolare nell'intorno di un punto $x = \alpha$ dove a_0 può anche essere infinitesimo, si potrà sempre prendere per l'altro integrale y_2

$$y_2 = y_1 \int e^{\int \frac{a_1}{a_0} dx} \frac{dx}{y_1^2}$$

e di qui si vede subito che se si avrà $\frac{a_1}{a_0} = \frac{\theta_1(x)}{(x - \alpha)\theta_0(x)}$, con $\frac{\theta_1(x)}{\theta_0(x)}$ regolare nell'intorno di α , indicando con i il rapporto $\frac{\theta_1(\alpha)}{\theta_0(\alpha)}$ e supponendo che y_1 non sia zero per $x = \alpha$, potremo scrivere

$$y_2 = y_1 \int \frac{\nu(x) dx}{(x - \alpha)^i},$$

con $\nu(x)$ funzione regolare e diversa da zero per $x = \alpha$; e quindi per i diverso da uno avremo la formola seguente:

$$y_2 = y_1 (x - \alpha)^{1-i} \mu(x), \quad (52)$$

con $\mu(x)$ funzione regolare e diversa da zero; mentre nel caso di $i = 1$ avremo invece l'altra formola

$$y_2 = y_1 \log(x - \alpha) + \text{funz. reg. per } x = \alpha, \quad (53)$$

venendo così determinato da queste formole il modo di comportarsi del secondo integrale y_2 di una equazione lineare del second'ordine (47) i cui coefficienti a_0 e a_1 soddisfano alle condizioni poste sopra nell'intorno di un punto α d'infinitesimo di a_0 , quando l'altro integrale y_1 è regolare e diverso da zero nello stesso intorno.

Applicando ora queste formole al caso della nostra equazione aggiunta (51) quando per essere $i < 1$ si ha $i_1 > 1$, si vede che la stessa equazione aggiunta (51), insieme all'integrale regolare η_1 , ammetterà un altro integrale η_2 della forma

$$\eta_2 = \eta_1 (x - \alpha)^{1-i_1} \mu(x) = \eta_1 (x - \alpha)^{i_1-1} \mu(x);$$

e questi integrali η_1 e η_2 sono appunto quelli che prenderemo ora per le nostre funzioni z_1 e z_2 .

25. Così facendo, le nostre formole generali ci daranno per gl'integrali della (47)

$$y = \frac{c_2 \eta_1 - c_1 \eta_2}{a_0 \bar{Q}},$$

essendo c_1 e c_2 costanti arbitrarie, e essendo \bar{Q} il determinante $\begin{vmatrix} \eta_1 & \eta'_1 \\ \eta_2 & \eta'_2 \end{vmatrix}$ relativo alla equazione (51) che, per la nota formola di LIOUVILLE, all'infuori

di un fattore costante è uguale a $e^{-\int \frac{Q}{a_0} dx} = \frac{(x - \alpha)^{i-1} \mu_1(x)}{a_0}$, con $\mu_1(x)$ nuova funzione regolare di x nell'intorno di $x = \alpha$ quando, come può sempre farsi, nella equazione data (47) il coefficiente a_0 , se già non lo era, sia ridotto ad essere infinitesimo almeno del prim'ordine per $x = \alpha$ col moltiplicare la equazione per una potenza di $x - \alpha$; quindi evidentemente basterà prendere $c_2 = 0$, perchè l'integrale precedente y della (47) risulti regolare; e così si può ora senz'altro affermare che « le equazioni del second'ordine date (47) ammettono tutte « un integrale regolare y nell'intorno del punto $x = \alpha$, quando i coefficienti a_0 , « a_1 , a_2 soddisfano alle condizioni poste in principio del § 21, incluse nei ri- « spettivi casi quelle relative alle espressioni $\frac{a_2(x - \alpha)}{a_0}$ o $\frac{a_1(x - \alpha) \log(x - \alpha)}{a_0}$ « che dovranno essere integrabili anche ridotte ai valori assoluti »; e se, essendo al solito $\bar{a}(x)$ il loro integrale questa funzione diverrà infinitesima per $x = \alpha$ almeno del prim'ordine, come in particolare avverrà quando a_0 è infinitesimo del prim'ordine per $x = \alpha$, e a_1 e a_2 si mantengono finiti, allora il nostro integrale regolare y avrà anche la sua derivata prima determinata e finita anche per $x = \alpha$.

E questo integrale quando $\frac{\theta_1(\alpha)}{\theta_0(\alpha)}$ o il limite di $\frac{a_1(x - \alpha)}{a_0}$ per $x = \alpha$ non sia inferiore ad uno, oltre ad essere finito sarà anche diverso da zero per $x = \alpha$.

26. Quando poi, essendo ancora soddisfatte le condizioni poste in principio del § 21 pei coefficienti a_0 , a_1 della (47) per quanto riguarda i loro ordini d'infinitesimo, non sia però soddisfatta l'altra relativa al rapporto $\frac{a_2(x - \alpha)}{a_0}$ nel caso di $i = \lim_{x \rightarrow \alpha} \left(\frac{a_1(x - \alpha)}{a_0} \right)$ diverso da uno, o quella relativa al prodotto $\frac{a_2}{a_0}(x - \alpha) \log(x - \alpha)$ nel caso di $i = 1$, allora valendosi dei risultati ottenuti, e facendo la trasformazione $y = t u$ della quale parliamo al

§ 20, è facile di trovare la forma dei due integrali quando si ammetta di essere in certi casi particolari; come ad es. quando si supponga che il rapporto $\frac{a_2(x-\alpha)}{a_0}$ divenga infinito del prim'ordine per $x=\alpha$, per modo da

avere $\frac{a_2}{a_0} = \frac{g}{(x-\alpha)^2} + \frac{p}{x-\alpha}$, con g quantità costante diversa da zero e p funzione integrabile fra α e x insieme a quella dei suoi valori assoluti $|p|$.

In questo caso infatti facendo la trasformazione $y = tu$ con prendere $t = (x-\alpha)^\beta$, la equazione trasformata in u (46) sarà la seguente:

$$\begin{aligned} a_0(x-\alpha)^\beta u'' + (x-\alpha)^{\beta-1} \{ 2a_0\beta + a_1(x-\alpha) \} u' + \\ + (x-\alpha)^{\beta-2} \{ a_0\beta(\beta-1) + a_1\beta(x-\alpha) + a_2(x-\alpha)^2 \} u = 0, \end{aligned} \quad (54)$$

e i due primi dei suoi coefficienti soddisfaranno ancora alle solite condizioni per ciò che riguarda i loro ordini d'infinitesimo per $x=\alpha$.

Per questa poi il rapporto corrispondente a quello $\frac{a_2(x-\alpha)}{a_0}$ relativo alla equazione primitiva sarà il seguente

$$\frac{\beta(\beta-1)}{x-\alpha} + \frac{a_1}{a_0}\beta + \frac{a_2}{a_0}(x-\alpha) = \frac{\beta(\beta-1) + i\beta + g}{x-\alpha} + p_1,$$

essendo i il solito valore per $x=\alpha$ del rapporto di $\frac{a_1(x-\alpha)}{a_0}$ relativo alla equazione primitiva, e essendo $p_1 = p + \left[\frac{\theta_1(x)}{\theta_0(x)} \right]_{\bar{x}}$, con \bar{x} intermedio fra α e x , per modo che p_1 sarà una funzione integrabile fra α e x nelle stesse condizioni di p ; e quindi basterà prendere β in modo che sia

$$\beta(\beta-1) + i\beta + g = 0 \quad (55)$$

perchè la nuova equazione (54) in u pel valore scelto di β abbia un integrale regolare nell'intorno di $x=\alpha$ che avrà anche nel punto α la derivata

prima determinata e finita se l'integrale $\int_{\alpha}^x |p| dx$ diverrà infinitesimo almeno

del prim'ordine col tendere di x ad α ; e quindi se la precedente equazione di secondo grado in β (55) avrà due radici distinte β_1 e β_2 , indicando con u_1 e u_2 gli integrali regolari della equazione (54) corrispondenti rispettivamente a questi valori β_1 e β_2 di β , la equazione data (47) avrà i due integrali $(x-\alpha)^{\beta_1} u_1$, $(x-\alpha)^{\beta_2} u_2$.

Se poi la equazione (55) avrà le sue due radici uguali a β_0 , allora avendosi $\beta_0 = \frac{1-i}{2}$, si vede subito che per la equazione (54) che corrisponde a questo valore β_0 di β il valore per $x = \alpha$ del solito rapporto $\frac{a_1(x-\alpha)}{a_0}$ sarà precisamente l'unità, e quindi se u_1 sarà l'integrale regolare della equazione in u corrispondente a questo valore β_0 di β , l'altro suo integrale u_2 per quanto dicemmo in generale al § 24 sarà della forma $u_1 \log(x-\alpha) + \text{funz. regolare nell'intorno di } \alpha$; e conseguentemente in questo caso gli integrali della nostra equazione (47) saranno i due

$$(x-\alpha)^{\beta_0} u_1, \quad (x-\alpha)^{\beta_0} [\log(x-\alpha) u_1 + \text{funz. reg.}],$$

e in questo caso u_1 , come nel precedente u_1 e u_2 avranno anche per $x = \alpha$ la derivata prima determinata e finita se, essendo

$$\int_{\alpha}^x |p| dx = \bar{p}(x) \quad \text{o} \quad \int_{\alpha}^x |p| \log(x-\alpha) dx = \bar{p}(x),$$

la funzione $\bar{p}(x)$ diverrà infinitesima almeno del prim'ordine col tendere di x ad α , come in particolare avverrà quando p o $p \log(x-\alpha)$ saranno finiti.

Questi risultati concordano pienamente con quelli che trovò per altra via il sig. MAXIME BÖCHER (*) in una Memoria pubblicata nel Vol. I delle *Transactions of the American Mathematical Society* del 1900. Qui li abbiamo ottenuti come semplici applicazioni dei nostri risultati generali.

27. Applichiamo ora brevemente i risultati generali, che abbiamo ottenuti, anche al caso delle equazioni del terz'ordine

$$a_0 y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = 0, \quad (56)$$

per le quali ammetteremo al solito che il coefficiente a_0 del primo termine divenga infinitesimo dell'ordine p , e esso come gli altri due a_1 e a_2 soddisfino alle condizioni poste in modo generale pei primi n coefficienti della (39) al principio del § 16, come ammetteremo anche senz'altro che la espressione

(*) Al sig. BÖCHER non comparisce la condizione che $\bar{p}(x)$ diventi infinitesimo del prim'ordine col tendere di x ad α , perchè le sue considerazioni portano che la derivata dell'integrale sia presa soltanto nei punti fuori di α , e allora per p viene, come qui, soltanto la condizione che p o $p \log(x-\alpha)$ siano integrabili anche ridotte ai valori assoluti.

$\frac{a_3}{a_0}(x-z)^2$, o l'altra $\frac{a_3}{a_0}(x-z)^2 \log(x-z)$ siano integrabili da z ad x anche ridotte ai loro valori assoluti, ciò che in particolare avverrà quando, essendo a_0 di ordine non superiore ad un numero inferiore a 3 ma vicino a 3 quanto si vuole, a_3 sia finito e integrabile da a a b .

Allora la prima delle condizioni del § 16 sarà senz'altro soddisfatta; e quanto alla seconda, osserviamo per prima cosa che ora per le (40) avremo le due

$$c_1 = i(i-1)\theta_0(\alpha) - (i-1)\theta_1(\alpha) + \theta_2(\alpha),$$

$$c_2 = (i+1)i\theta_0(\alpha) - i\theta_1(\alpha) + \theta_2(\alpha),$$

dalle quali si ottengono le altre

$$c_2 - c_1 = 2i\theta_0(\alpha) - \theta_1(\alpha),$$

$$c_1 + c_2 = i\{2i\theta_0(\alpha) - \theta_1(\alpha)\} - (i-1)\theta_1(\alpha) + 2\theta_2(\alpha);$$

e quindi se ci poniamo dapprima nel caso più semplice che è quello pel quale si richiede che sia $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, si trova subito che per questo caso basterà che si abbiano le due equazioni $2i\theta_0(\alpha) = \theta_1(\alpha)$, $2\theta_2(\alpha) = (i-1)\theta_1(\alpha)$, la prima delle quali, dandoci $i = \frac{\theta_1(\alpha)}{2\theta_0(\alpha)}$, mostra che onde possa essere $i \geq 2$,

come si richiede, bisognerà che si abbia $\frac{\theta_1(\alpha)}{\theta_0(\alpha)} \geq 4$; e così quando questa condizione sia soddisfatta, e fra $\theta_0(\alpha)$, $\theta_1(\alpha)$ e $\theta_2(\alpha)$ sussista l'altra relazione precedente cioè $4\theta_0(\alpha)\theta_2(\alpha) = \{\theta_1(\alpha) - 2\theta_0(0)\}\theta_1(\alpha)$, e oltre a ciò sia soddisfatta la condizione indicata sopra rispetto all'espressione $\frac{a_2}{a_0}(x-z)^2$ quando $\frac{\theta_1(\alpha)}{\theta_0(\alpha)} > 4$, e rispetto all'altra $\frac{a_2}{a_0}(x-z)^2 \log(x-z)$ quando $\frac{\theta_1(\alpha)}{\theta_0(\alpha)} = 4$, la nostra equazione (56) avrà sempre un integrale regolare nell'intorno del punto $x=z$, e che in questo intorno, oltre ad essere finito, sarà anche diverso da zero.

E questo integrale si otterrà al solito applicando i nostri processi generali alla equazione

$$\begin{aligned} & (x-z)^i \theta_0(x) y''' + (x-z)^{i-1} \theta_1(x) y'' + \\ & + (x-z)^{i-2} \theta_2(x) y' + a_3 (x-z)^{i-p} y = 0 \end{aligned} \quad (57)$$

che viene dalla (56) moltiplicandola per $(x - \alpha)^{i-p}$, essendo $i = \frac{\theta_1(\alpha)}{2\theta_0(\alpha)}$, e prendendo per l'applicazione dei detti processi $z_1 = 1$, $z_2 = x - \alpha$, con $z_3 = \frac{(x - \alpha)^{i-1}}{(i-1)(i-2)}$ quando $i > 2$, e $z_3 = -\log(x - \alpha)$ quando $i = 2$.

Osservando poi in generale che per le (41) abbiamo

$$P = -\frac{c_1}{i-2} + \frac{c_2}{i-1}, \quad K = c'_1 + c'_2, \quad K_1 = \alpha_1 c'_1 + \alpha_2 c'_2,$$

e che essendo Ω la minore delle due quantità $P' + K_1$ e K , la seconda delle condizioni del § 16, quando c_1 e c_2 non sono ambedue zero, richiede che, per un conveniente valore di i non inferiore a 2, si abbia $\Omega < (i-1)\bar{\theta}_0(\alpha)$, o $\Omega < (i-2)\bar{\theta}_0(\alpha)$, secondo che c_1 è uguale a zero o è diverso da zero, si vede facilmente che si avranno anche altri casi di esistenza di un integrale regolare della (56) nell'intorno del punto $x = \alpha$.

Così, ad esempio, se porremo la condizione che sia $c_1 = 0$, senza che sia $c_2 = 0$ per non ricadere nel caso precedente, siccome allora sarà

$$c_2 = 2i\theta_0(\alpha) - \theta_1(\alpha), \quad P = \frac{c_2}{i-1}, \quad K = c'_2, \quad K_1 = \alpha_2 c'_2,$$

e inoltre $P' + K_1 = c'_2 \left(\frac{1}{i-1} + \alpha_2 \right)$ e quindi $P' + K_1 = c'_2 = K$ per $i \geq 3$ e $P' + K_1 = \frac{2}{i-1} c'_2 > K$ per $i < 3$, si vede che basterà che la equazione $c_1 = 0$, o $\theta_0(\alpha) i^2 - i \{ \theta_0(\alpha) + \theta_1(\alpha) \} + \theta_1(\alpha) + \theta_2(\alpha) = 0$ abbia in i le sue radici

$$\frac{\theta_0(\alpha) + \theta_1(\alpha) \pm \sqrt{\{ \theta_1(\alpha) - \theta_0(\alpha) \}^2 - 4\theta_0(\alpha)\theta_2(\alpha)}}{2\theta_0(\alpha)}$$

reali, e una almeno non inferiore a 2, e al tempo stesso il valore assoluto di c_2 o di $2i\theta_0(\alpha) - \theta_1(\alpha)$ risulti inferiore a $(i-1)\bar{\theta}_0(\alpha)$.

E così, supponendo come evidentemente può farsi, che $\theta_0(\alpha)$ sia positiva, e ponendo per abbreviare

$$\left(\frac{\theta_1(\alpha)}{\theta_0(\alpha)} - 1 \right)^2 - 4 \frac{\theta_2(\alpha)}{\theta_0(\alpha)} = \Delta$$

con che

$$i = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{\theta_1(\alpha)}{\theta_0(\alpha)} \pm \sqrt{\Delta} \right\}, \quad (58)$$

nel caso attuale avremo le condizioni

$$\Delta \geq 0, \quad \frac{\theta_1(\alpha)}{\theta_0(\alpha)} \pm \sqrt{\Delta} \geq 3, \quad \text{val. ass. } (1 \pm \sqrt{\Delta}) < i - 1;$$

talchè in particolare prendendo il segno superiore del radicale $\sqrt{\Delta}$, e quindi

$$i = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{\theta_1(\alpha)}{\theta_0(\alpha)} + \sqrt{\Delta} \right\},$$

basterà che sia

$$\Delta \geq 0, \quad \frac{\theta_1(\alpha)}{\theta_0(\alpha)} \geq 3, \quad 3 + \sqrt{\Delta} < \frac{\theta_1(\alpha)}{\theta_0(\alpha)};$$

per modo che se si pone

$$\frac{\theta_1(\alpha)}{\theta_0(\alpha)} = 3 + \beta \quad \text{con} \quad \beta \geq 0,$$

ciò che darà

$$i = 2 + \frac{1}{2} \beta + \frac{1}{2} \sqrt{\Delta},$$

$$\Delta = (2 + \beta)^2 - 4 \frac{\theta_2(\alpha)}{\theta_0(\alpha)} = \beta^2 - 4 \left\{ \frac{\theta_2(\alpha)}{\theta_0(\alpha)} - (1 + \beta) \right\},$$

e trasformerà l'ultima condizione nell'altra $\sqrt{\Delta} < \beta$ o $\Delta < \beta^2$, si concluderà che dovrà essere $\frac{\theta_2(\alpha)}{\theta_0(\alpha)} > (1 + \beta)$ insieme a $\beta^2 - 4 \frac{\theta_2(\alpha)}{\theta_0(\alpha)} + 4(1 + \beta) \geq 0$ cioè $\frac{\theta_2(\alpha)}{\theta_0(\alpha)}$ dovrà essere compreso fra $1 + \beta$ e $1 + \beta + \frac{1}{4} \beta^2$ (questo limite superiore incluso, ma non l'inferiore), intendendo ora che β sia un numero qualsiasi diverso da zero e positivo; e quando qualunque sia questo numero β , queste condizioni per $\theta_0(\alpha)$, $\theta_1(\alpha)$ e $\theta_2(\alpha)$ risultino soddisfatte, l'equazione (56) avrà ancora un integrale regolare nell'interno di $x = \alpha$ che si troverà coi soliti processi generali partendo dalla equazione (57) nella quale ora $i = 2 + \frac{1}{2} \beta + \frac{1}{2} \sqrt{\Delta}$, e si suppone che per questa il coefficiente di y , o per la primitiva (56) la espressione $\frac{a_2}{a_0} (x - \alpha)^2$ sia integrabile nell'intorno di α anche riducendola ai suoi valori assoluti.

Studii simili potranno farsi pel caso in cui nella espressione precedente (58) di i si prende il segno inferiore di $\sqrt{\Delta}$, e in quelli nei quali $P = 0$

senza che siano zero c_1 e c_2 o nei quali P è diverso da zero insieme a c_1 , come anche in quelli nei quali per Δ s'intenda preso il massimo valore assoluto della espressione che corrisponda ora alla (43) per t compresa fra 0 e 1 (0 e 1 incl.); e si troveranno così altri casi nei quali la equazione del terz'ordine (56) ha un integrale regolare nell'intorno del punto $x = \alpha$, che potrà ottenersi ancora coi soliti processi generali dalla equazione (57) quando in essa sia posto per i il valore corrispondente che si troverà, ecc.

In tutti questi casi però le derivate di questo integrale potranno mancare o presentare singolarità per $x = \alpha$; e perchè esse siano ancora determinate e finite in questo punto bisognerà che siano soddisfatte speciali condizioni che si troveranno per mezzo delle considerazioni generali del § 19 come facemmo al § 22 pel caso delle equazioni del second'ordine.

Pisa, Ottobre 1904.
