Ueber die Differentialgleichungen der F-Reihen dritter Ordnung.

Von

L. Pochhammer in Kiel.

§ 1.

Die Differentialgleichung der allgemeineren F-Reihe

$$(1)\quad \begin{cases} x^{n-1}\dfrac{d^n y}{dx^n} + L_1 x^{n-2}\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + L_2 x^{n-3}\dfrac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} \\ \qquad + \cdots + L_{n-2} x \dfrac{d^2 y}{dx^2} + L_{n-1}\dfrac{dy}{dx} \\ = x^m \dfrac{d^m y}{dx^m} + K_1 x^{m-1}\dfrac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + K_2 x^{m-2}\dfrac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} \\ \qquad + \cdots + K_{m-2}x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + K_{m-1}x\dfrac{dy}{dx} + K_m y, \end{cases}$$

die vom Verfasser im 38ten Bande dieser Annalen*) aufgestellt worden ist ($K_1, \dots K_m$, $L_1, \dots L_{n-1}$ constant, $m < n$), lässt sich, wie er in einer weiteren Arbeit**) gezeigt hat, sowohl durch die Substitution

$$(2)\qquad y = \int_g^h (t-x)^{-\alpha}\, t^{\lambda}\, T\, dt$$

als auch durch die Substitution

$$(3)\qquad y = \int_g^h e^{\frac{x}{t}}\, t^{\lambda}\, T\, dt$$

auf eine analog gebildete Differentialgleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung zurückführen. Die letztere Gleichung dient zur Bestimmung von T als Function von t. Durch Wiederholung des Verfahrens gelangt man bis zu einer durch einfache bestimmte Integrale lösbaren Differentialgleichung 2^{ter} Ordnung. Die letztgenannte Arbeit (in Crelle's J. Bd. 112) beschränkt sich darauf, die Reductionsmethode zu entwickeln. In nach-

*) „Ueber die Differentialgleichung der allgemeineren F-Reihe", Bd. 38, pag. 587.

**) „Ueber die Reduction der Differentialgleichung der allgemeineren F-Reihe", Crelle's Journal für Math. Bd. 112, pag. 58.

stehendem Aufsatze soll nun auf den *Fall* $n=3$ der Gleichung (1) näher eingegangen und eine Uebersicht der bestimmten Doppelintegrale, welche dann particuläre Lösungen von (1) sind, gegeben werden*).

Der Gleichung (1) genügt eine eindeutige Potenzreihe

$$(4)\begin{cases} F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m; \varrho_1, \varrho_2, \cdots \varrho_{n-1}; x) \\ = 1 + \dfrac{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}{1.\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_{n-1}}x + \dfrac{\alpha_1(\alpha_1+1)\alpha_2(\alpha_2+1)\ldots\alpha_m(\alpha_m+1)}{1.2.\varrho_1(\varrho_1+1)\varrho_2(\varrho_2+1)\ldots\varrho_{n-1}(\varrho_{n-1}+1)}x^2 + \cdots, \end{cases}$$

deren Parameter $\alpha_1, \ldots \alpha_m, \varrho_1, \ldots \varrho_{n-1}$ mit den Constanten $K_1, \ldots K_m, L_1, \ldots, L_{n-1}$ durch algebraische Gleichungen verbunden sind**). Die $n-1$ mehrdeutigen Hauptlösungen von (1) sind Producte aus je einer Potenz von x und einer Reihe von der Form (4). Die Constanten $\varrho_i, \varrho_i - \varrho_k$ werden als nicht ganzzahlig vorausgesetzt.

Die bestimmten Doppelintegrale, welche hier als Lösungen der Gleichung (1) im Fall $n=3$ abgeleitet werden sollen, entstehen aus den soeben genannten Reihen durch Multiplication mit transcendenten Constanten. Als solche Constanten treten einerseits Euler'sche Integrale, andererseits die analog gebildeten Integrale mit complexem Integrationsweg auf. Mit Rücksicht auf das Folgende mögen zunächst einige Bemerkungen Platz finden, die sich auf die Integration gewisser Reihen beziehen.

Hat ein nach t genommenes bestimmtes Integral

$$\int (t-x)^{q-p-1} t^{p-1} (l_0 + l_1 t + l_2 t^2 + \cdots + l_\nu t^\nu + \cdots)\, dt,$$

in welchem $p, q, l_0, l_1, \ldots$ als constant, x als unabhängig von t und die Reihe $l_0 + l_1 t + \cdots$ als convergent angenommen wird, zum Integrationsweg eine geschlossene Curve, welche im Nullpunkt beginnt und endigt und aus einem einmaligen positiven Umlauf um den Punkt x besteht, so liefert die Substitution

$$t = xz, \qquad dt = x\,dz,$$

als Weg der Variable z einen im Nullpunkt beginnenden Umlauf um den Punkt 1. Für die geschlossenen Integrationswege wird hier, wie in den früheren Arbeiten des Verfassers, die abgekürzte Bezeichnung angewendet, welche in § 1 der Abhandlung „Ueber ein Integral mit doppeltem Umlauf" (Bd. 35 dieser Annalen, pag. 472) angegeben ist.

---

*) Für $m=n$ entsteht aus (1) die Differentialgleichung der allgemeineren hypergeometrischen Reihe mit 2 endlichen singulären Punkten, welche im 102ten Bande des Crelle'schen Journals vom Verfasser ausführlicher behandelt worden ist. In vorliegender Arbeit bleibt der Fall $m=n$ von der Betrachtung ausgeschlossen.

**) Cfr. Bd. 38 dieser Annalen, pag. 588—594.

Man erhält dann die Gleichung

$$\overline{\int_0^{(x)}}(t-x)^{q-p-1}\,t^{p-1}\,(l_0+l_1t+\cdots+l_\nu t^\nu+\cdots)\,dt$$

$$= x^{q-1}\overline{\int_0^{(1)}}(z-1)^{q-p-1}\,z^{p-1}\,(l_0+l_1xz+\cdots+l_\nu x^\nu z^\nu+\cdots)\,dz,$$

auf deren rechter Seite ausser den Constanten l_ν auch die Potenzen von x vor die Integralzeichen treten. Nennt man nach Bd. 35 dieser Annalen, pag. 510, $\overline{E}(a,b)$ das geschlossene Integral

$$(5)\qquad \overline{E}(a,b)=\overline{\int_0^{(1)}}z^{a-1}(z-1)^{b-1}\,dz,$$

so ergiebt sich nach Anwendung der Reductionsformel

$$\overline{E}(a+\nu,b)=\frac{a(a+1)\ldots(a+\nu-1)}{(a+b)(a+b+1)\ldots(a+b+\nu-1)}\,\overline{E}(a,b)$$

(ν positiv und ganzzahlig) die Gleichung

$$(6)\quad\begin{cases}\overline{\int_0^{(x)}}(t-x)^{q-p-1}\,t^{p-1}(l_0+l_1t+l_2t^2+\cdots+l_\nu t^\nu+\cdots)\,dt\\[1ex] = x^{q-1}\,\overline{E}(p,q-p)\left[\begin{array}{l} l_0+\frac{p}{q}\,l_1x+\frac{p(p+1)}{q(q+1)}\,l_2\,x^2+\cdots\\ \cdots+\frac{p(p+1)\ldots(p+\nu-1)}{q(q+1)\ldots(q+\nu-1)}\,l_\nu\,x^\nu+\cdots\end{array}\right],\end{cases}$$

in der, mit Rücksicht auf die Integralgrenze 0, der reelle Theil von p positiv sein muss.

Beschreibt die Variable t statt des in (6) vorausgesetzten Weges einen Doppelumlauf um die Punkte x und 0, in der Art dass zuerst x, dann 0 im positiven Sinne, hierauf x im negativen und endlich 0 im negativen Sinne umkreist werden, so entsteht durch die Substitution $t=xz$ die zu (6) analoge Gleichung

$$(7)\qquad \overline{\int_c^{(x,0,x-,0-)}}(t-x)^{q-p-1}\,t^{p-1}\,(l_0+l_1t+\cdots+l_\nu t^\nu+\cdots)\,dt$$

$$=e^{\pi i(p-1)}x^{q-1}\,\mathfrak{E}(p,q-p)\left[l_0+\frac{p}{q}l_1x+\cdots+\frac{p(p+1)\ldots(p+\nu-1)}{q(q+1)\ldots(q+\nu-1)}l_\nu x^\nu+\cdots\right],$$

woselbst die Integralgrenze c beliebig bleibt, und $\mathfrak{E}(a,b)$ nach Band 35 dieser Annalen, pag. 499, das Integral

$$(8)\qquad \mathfrak{E}(a,b)=e^{-\pi i(a+b)}\overline{\int_c^{(1,0,1-,0-)}}z^{a-1}(1-z)^{b-1}\,dz$$

bedeutet. In (7) kommt die Reductionsformel

$$\mathfrak{E}(a+\nu,b)=(-1)^\nu\,\frac{a(a+1)\ldots(a+\nu-1)}{(a+b)(a+b+1)\ldots(a+b+\nu-1)}\,\mathfrak{E}(a,b)$$

zur Anwendung. Für die Potenzen z^{a-1} und $(1-z)^{b-1}$ werden die in Band 35, pag. 498 und 510, bezeichneten Zweige vorausgesetzt.

Für das entsprechende Integral mit geradlinigem, von 0 bis x erstrecktem Integrationswege gilt, wenn unter $E(a, b)$ das Euler'sche Integral erster Art

$$E(a, b) = \int_0^1 z^{a-1}(1-z)^{b-1}\,dz \tag{9}$$

verstanden wird, die Formel

$$\int_0^x (t-x)^{q-p-1} t^{p-1}(l_0 + l_1 t + \cdots + l_\nu t^\nu + \cdots)\,dt = \tag{10}$$

$$(-1)^{q-p-1} x^{q-1} E(p, q-p)\left(l_0 + \frac{p}{q} l_1 x + \cdots + \frac{p(p+1)\ldots(p+\nu-1)}{q(q+1)\ldots(q+\nu-1)} l_\nu x^\nu + \cdots\right),$$

in der die reellen Theile von p und $q-p$ positiv sein sollen.

Man nehme ferner an, dass die Variable t vom Nullpunkte in einer Richtung, welcher der zum Punkte x führenden entgegengesetzt ist, ausgeht, einen positiven Umlauf um den Nullpunkt macht und zu letzterem längs der zuerst durchlaufenen Strecke zurückkehrt (Fig. 1). Wird die Function

$$e^{\frac{x}{t}} t^{p-1}(l_0 + l_1 t + \cdots l_\nu t^\nu + \cdots)$$

nach t längs dieser Curve integrirt, so ergiebt nach Band 41 dieser Annalen, pag. 171, die Substitution $t = xz$ die Gleichung

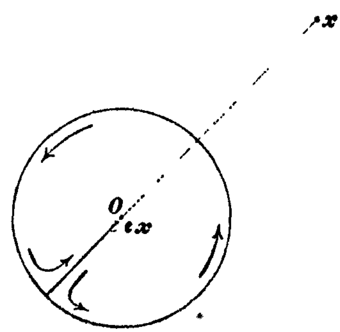

Fig. 1.

$$\int_{-\epsilon x}^{\overline{(0)}} e^{\frac{x}{t}} t^{p-1}(l_0 + l_1 t + \cdots + l_\nu t^\nu + \cdots)\,dt \tag{11}$$

$$= x^p\, \overline{\Gamma}(-p)\left(l_0 + \frac{l_1 x}{p+1} + \cdots + \frac{l_\nu x^\nu}{(p+1)(p+2)\ldots(p+\nu)} + \cdots\right).$$

In derselben wird durch ϵ eine unendlich kleine positive reelle Constante, und durch $\overline{\Gamma}(a)$ das Integral (Band 35, pag. 514)

$$\overline{\Gamma}(a) = \int_{-\infty}^{\overline{(0)}} e^u u^{a-1}\,du, \tag{12}$$

welches durch die Substitution $u = \frac{1}{z}$ die Form

$$\overline{\Gamma}(a) = \int_{-\epsilon}^{\overline{(0)}} e^{\frac{1}{z}} z^{-a-1}\,dz \tag{12a}$$

annimmt (Band 41, pag. 158), bezeichnet.

Die Gleichung (1) geht für $m = n = 2$ in die Differentialgleichung der Gauss'schen hypergeometrischen Reihe

$$(13)\qquad x(x-1)\frac{d^2y}{dx^2} + [(\alpha+\beta+1)x - \varrho]\,\frac{dy}{dx} + \alpha\beta y = 0$$

über. Im Falle $n = 2$, $m = 1$ entsteht aus (1) die Gleichung

$$(14)\qquad x\frac{d^2y}{dx^2} = (x-\varrho)\frac{dy}{dx} + \alpha y,$$

der die Reihe

$$(15)\qquad F(\alpha;\varrho;x) = 1 + \frac{\alpha}{1\,.\,\varrho}x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1\,.\,2\,.\,\varrho(\varrho+1)}x^2 + \cdots \text{ inf.}$$

und eine analoge mit $x^{1-\varrho}$ multiplicirte Reihe genügen. Für die nachstehenden Rechnungen kommt ausserdem noch eine dritte Differentialgleichung 2ter Ordnung in Betracht, welche dem Falle $n = 2$, $m = 0$ der Gleichung (1) entspricht, nämlich die Gleichung

$$(16)\qquad x\frac{d^2y}{ax^2} + \varrho\frac{dy}{dx} - y = 0.$$

Um das Folgende übersichtlicher zu machen, wird es nothwendig, die bestimmten Integrale, welche die Lösungen der Differentialgleichungen (13), (14), (16) darstellen, in Kürze anzugeben. Nennt man Φ die Function

$$(17)\qquad \Phi = (u-x)^{-\beta}\,u^{\beta-\varrho}(u-1)^{\varrho-\alpha-1}$$

und $C_1, \ldots C_6$ die Constanten

$$\begin{aligned}
C_1 &= e^{\pi i(1-\varrho)}\mathfrak{E}(1-\varrho,\ \varrho-\alpha),\\
C_2 &= e^{\pi i(1-\alpha-\beta)}\mathfrak{E}(\beta-\varrho+1,\ 1-\beta),\\
C_3 &= e^{\pi i(\beta-\varrho)}\mathfrak{E}(\beta-\varrho+1, \varrho-\alpha-\beta),\\
C_4 &= e^{\pi i(1-\beta)}\mathfrak{E}(\varrho-\alpha,\ 1-\beta),\\
C_5 &= e^{-\pi i\varrho}\mathfrak{E}(\beta-\varrho+1,\ \varrho-\alpha),\\
C_6 &= e^{-\pi i(\alpha+\beta)}\mathfrak{E}(\beta-\alpha,\ 1-\beta),
\end{aligned}$$

so sind die Hauptlösungen von (13) im allgemeinen Falle gleich den Ausdrücken (Band 35 dieser Annalen, pag. 517—526):

$$(18)\quad \begin{cases} \displaystyle\bar{\int_c}^{(\mathfrak{A},1,\mathfrak{A}-,1-)}\Phi\,du = C_1 F(\alpha,\beta;\varrho;x),\\[2ex] \displaystyle\bar{\int_c}^{(x,\,0,x-,0-)}\Phi\,du = C_2 x^{1-\varrho}F(\alpha-\varrho+1,\beta-\varrho+1;2-\varrho;x),\end{cases}$$

$$(19)\quad \begin{cases} \displaystyle\bar{\int_c}^{(\mathfrak{B},0,\mathfrak{B}-,\,0-)}\Phi\,du = C_3 F(\alpha,\beta;\ \alpha+\beta-\varrho+1;\ 1-x),\\[2ex] \displaystyle\bar{\int_c}^{(x,\,1,\,x-,\,1-)}\Phi\,du = C_4(1-x)^{\varrho-\alpha-\beta}F(\varrho-\alpha,\varrho-\beta;\varrho-\alpha-\beta+1;1-x),\end{cases}$$

$$(20)\quad \begin{cases} \displaystyle\overline{\int_c}^{(1,0,1-,0-)} \Phi\, du = C_5 x^{-\beta} F\left(\beta, \beta-\varrho+1; \beta-\alpha+1; \frac{1}{x}\right), \\ \displaystyle\overline{\int_c}^{(\mathfrak{C},x,\mathfrak{C}-,x-)} \Phi\, du = C_6 x^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha-\varrho+1; \alpha-\beta+1; \frac{1}{x}\right). \end{cases}$$

Unter $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ werden Linien verstanden, die von 0 zu x, resp. von 1 zu x und von 0 zu 1 gezogen sind; c ist ein beliebiger, jedoch von 0 und 1 verschiedener Punkt der u-Ebene. Die Umkreisung der Linien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ wird in derselben Weise wie die der einzelnen singulären Punkte bezeichnet. Die Integrale (18), (19), (20) behalten für beliebige Werthe der Constanten α, β, ϱ einen bestimmten Sinn. In den speciellen Fällen, wo eins oder mehrere dieser Integrale identisch verschwinden, hat man statt des Doppelumlaufs eine einfache geschlossene Curve, resp. eine geradlinige Strecke als Integrationsweg zu wählen.

Die Differentialgleichung (14) wird im allgemeinen Falle durch die bestimmten Integrale

$$(21)\quad \begin{cases} \displaystyle\overline{\int_{-\infty}}^{(\mathfrak{A})} e^u (u-x)^{-\alpha} u^{\alpha-\varrho}\, du = \bar{\Gamma}(1-\varrho) F(\alpha; \varrho; x), \\ \displaystyle\overline{\int_c}^{(x,0,x-,0-)} e^u (u-x)^{-\alpha} u^{\alpha-\varrho}\, du \\ \qquad = e^{\pi i(\alpha-\varrho)} \mathfrak{E}(\alpha-\varrho+1, 1-\alpha) x^{1-\varrho} F(\alpha-\varrho+1; 2-\varrho; x) \end{cases}$$

(Band 36 dieser Annalen, pag. 84—96) befriedigt, wo $\mathfrak{A}$, wie in (18), die Verbindungslinie der Punkte 0 und x bezeichnet. Sind die Constanten $1-\alpha$ und $\alpha-\varrho+1$ (im reellen Theil) positiv, so kann man statt des letzteren Integrals das Integral mit geradlinigem Integrationsweg

$$(22)\quad \int_0^x e^u (u-x)^{-\alpha} u^{\alpha-\varrho} du \\ = (-1)^\alpha E(\alpha-\varrho+1, 1-\alpha) x^{1-\varrho} F(\alpha-\varrho+1; 2-\varrho; x)$$

nehmen. Ist nur eine dieser Constanten positiv, so wird ein einfacher Umlauf als Integrationsweg angewendet.

Die Differentialgleichung (16), der die unendlichen Reihen

$$(23)\quad \begin{cases} \mathfrak{F}(\varrho; x) = 1 + \frac{x}{1\cdot\varrho} + \frac{x^2}{1.2.\varrho(\varrho+1)} + \cdots, \\ x^{1-\varrho}\mathfrak{F}(2-\varrho; x) = x^{1-\varrho}\left\{1 + \frac{x}{1.(2-\varrho)} + \frac{x^2}{1.2.(2-\varrho).(3-\varrho)} + \cdots\right\} \end{cases}$$

genügen, gestattet zwei wesentlich von einander verschiedene Lösungen durch bestimmte Integrale. Einerseits hat man die Gleichungen (Band 38 dieser Annalen, pag. 228—237)

$$(24)\quad \int_{\infty}^{\overline{(\mathfrak{A},\mathfrak{A})}} e^{-2\sqrt{u}}(u-x)^{\frac{1}{2}-\varrho}\frac{du}{\sqrt{u}} = 2^{2\varrho-1}e^{-2\pi i\varrho}\,\overline{\Gamma}(2-2\varrho)\,\mathfrak{F}(\varrho;x),$$

woselbst die Variable u die Verbindungslinie $\mathfrak{A}$ der Punkte 0 und x zweimal hintereinander im positiven Sinne umkreist, und

$$(25)\quad \begin{cases} \int_0^{\overline{(x)}} (e^{2\sqrt{u}}+e^{-2\sqrt{u}})(u-x)^{\frac{1}{2}-\varrho}\frac{du}{\sqrt{u}} = \\ \int_0^{\overline{(x,0,x-,0-)}} e^{-2\sqrt{u}}(u-x)^{\frac{1}{2}-\varrho}\frac{du}{\sqrt{u}} = 2\,\overline{E}\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}-\varrho\right)x^{1-\varrho}\,\mathfrak{F}(2-\varrho;x). \end{cases}$$

Andererseits bestehen die Identitäten*)

$$(26)\quad \begin{cases} \int_{-\infty}^{\overline{(0)}} e^{\frac{x}{u}+u}\,u^{-\varrho}\,du = \overline{\Gamma}(1-\varrho)\,\mathfrak{F}(\varrho;x), \\ \int_{-\varepsilon x}^{\overline{(0)}} e^{\frac{x}{u}+u}\,u^{-\varrho}\,du = \overline{\Gamma}(\varrho-1)\,x^{1-\varrho}\,\mathfrak{F}(2-\varrho;x). \end{cases}$$

Unter ε wird, wie in (11) und (12a), eine unendlich kleine positive reelle Constante verstanden. Statt des in (25) angegebenen Integrals kann man, wenn der reelle Theil von $\frac{3}{2}-\varrho$ positiv ist, das geradlinige Integral

$$(27)\quad \int_0^x (e^{2\sqrt{u}}+e^{-2\sqrt{u}})(x-u)^{\frac{1}{2}-\varrho}\frac{du}{\sqrt{u}} = 2\,E\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}-\varrho\right)x^{1-\varrho}\,\mathfrak{F}(2-\varrho;x)$$

anwenden.

In den nachstehenden §§ 2 und 3 wird der *Fall* $n=3$, $m=1$, und in § 4 der *Fall* $n=3$, $m=2$ der Differentialgleichung (1) behandelt. Auf den Fall $n=3$, $m=0$ dieser Gleichung ist der Verfasser bereits in Band 41 dieser Annalen, pag. 199—208, näher eingegangen.

§ 2.

Für $n=3$, $m=1$ entsteht aus (1) die Differentialgleichung

$$(28)\quad x^2\frac{d^3y}{dx^3}+(\varrho+\sigma+1)x\frac{d^2y}{dx^2}+(\varrho\sigma-x)\frac{dy}{dx}-\alpha y = 0,$$

welche durch die eindeutige Reihe

*) Cfr. „Ueber eine specielle lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit linearen Coefficienten", Band 41 dieser Annalen, pag. 174—178.

Ich bin darauf aufmerksam gemacht worden, dass die Darstellung der Bessel'schen Function als geschlossenes Integral, welche sich am Schluss der ebengenannten Arbeit findet, bereits von Herrn N. Sonine in seiner Abhandlung „Recherches sur les fonctions cylindriques et le développement des fonctions continues en séries" im 16ten Bande dieser Annalen (Abschnitt II) angegeben worden ist, was zu erwähnen ich nicht unterlassen möchte.

$$(29)\quad F(\alpha;\varrho,\sigma;x)=1+\frac{\alpha}{1.\varrho\sigma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2.\varrho(\varrho+1)\sigma(\sigma+1)}x^2+\cdots$$

und durch die Producte

$$(30)\quad\begin{cases} x^{1-\varrho}F(\alpha-\varrho+1;2-\varrho,\sigma-\varrho+1;x) \\ \quad =x^{1-\varrho}\left(1+\frac{\alpha-\varrho+1}{1.(2-\varrho)(\sigma-\varrho+1)}x+\cdots\right), \\ x^{1-\sigma}F(\alpha-\sigma+1;2-\sigma,\varrho-\sigma+1;x) \\ \quad =x^{1-\sigma}\left(1+\frac{\alpha-\sigma+1}{1.(2-\sigma)(\varrho-\sigma+1)}x+\cdots\right) \end{cases}$$

befriedigt wird. Die Constanten ϱ, σ, $\varrho-\sigma$ sind nach der Voraussetzung nicht ganzzahlig.

Indem man auf die Gleichung (28) nach einander eine Substitution von der Form (2) und eine Substitution von der Form (3) anwendet, findet man zwei verschiedene Systeme von bestimmten Doppelintegralen, welche die Hauptlösungen von (28) darstellen. Das erstere dieser Systeme enthält selbst noch wesentlich verschiedene Ausdrücke für die einzelnen Hauptlösungen, in Folge der (in § 1 angegebenen) doppelten Auflösung der Gleichung (16) durch bestimmte Integrale.

Man führt in (28) zunächst den Ausdruck

$$(31)\quad y=\int_g^h(v-x)^{-\alpha}v^{\alpha-\sigma}V\,dv$$

ein, in welchem V nur von v abhängt, und die Grenzen g, h entweder constant oder gleich x sind. Dann wird V (cfr. Crelle's Journal, Band 112, pag. 65) ein particuläres Integral der Differentialgleichung

$$v\frac{d^2V}{dv^2}+(\varrho-\sigma+1)\frac{dV}{dv}-V=0,$$

die sich von (16) nur dadurch unterscheidet, dass v, V, $\varrho-\sigma+1$ an die Stelle von x, y, ϱ getreten sind. Nach § 1 kommen für V sowohl Integrale von der Form (24) und (25), resp. (27), als auch Integrale von der Form (26) in Betracht. Die Reihen, die der Gleichung für V genügen, sind

$$\mathfrak{F}(\varrho-\sigma+1;v),\qquad v^{\sigma-\varrho}\mathfrak{F}(\sigma-\varrho+1;v).$$

Um aus (31) die mehrdeutigen Hauptlösungen von (28) zu erhalten, wählt man als Weg der Variable v entweder die geradlinige Strecke von 0 bis x oder einen Doppelumlauf um die Punkte x und 0, resp. einen einfachen Umlauf um x oder 0. Nach (24) ist

$$\overline{\int_{\infty}}^{(\mathfrak{A}',\mathfrak{A}')}e^{-2\sqrt{u}}(u-v)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}}\frac{du}{\sqrt{u}}$$
$$=2^{2\varrho-2\sigma+1}e^{2\pi i(\sigma-\varrho)}\bar{\Gamma}(2\sigma-2\varrho)\,\mathfrak{F}(\varrho-\sigma+1;v),$$

wenn unter $\mathfrak{A}'$ die Verbindungslinie der Punkte 0 und v verstanden wird. Man lasse hierin die u-Curve aus einem Kreise, der den ganzen Weg der Variable v $\big($in (31)$\big)$ umschliesst, und aus einem Abschnitte

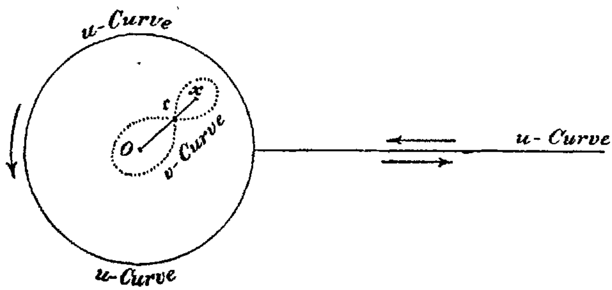

Fig. 2.

der positiven reellen Axe bestehen (Fig. 2). Die Anwendung der Formel (10), in welcher t durch v, und die Reihe $l_0 + l_1 t + \cdots$ durch

$$2^{2\varrho-2\sigma+1} e^{2\pi i(\sigma-\varrho)} \overline{\Gamma}(2\sigma-2\varrho) \left\{1 + \frac{v}{1.(\varrho-\sigma+1)} + \frac{v^2}{1.2.(\varrho-\sigma+1)(\varrho-\sigma+2)} + \cdots\right\}$$

ersetzt wird, führt dann zu der Gleichung

$$(32) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^x (v-x)^{-\alpha} v^{\alpha-\sigma} dv \overline{\int}_\infty^{(\mathfrak{A}',\mathfrak{A}')} e^{-2\sqrt{u}} (u-v)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}} \frac{du}{\sqrt{u}} \\ &\quad = \mathfrak{N}_1 x^{1-\sigma} F(\alpha-\sigma+1;\, 2-\sigma,\, \varrho-\sigma+1;\, x), \end{aligned} \right.$$

woselbst $\mathfrak{N}_1$ die Constante

$$\mathfrak{N}_1 = 2^{2\varrho-2\sigma+1} e^{\pi i(2\sigma-2\varrho-\alpha)} \overline{\Gamma}(2\sigma-2\varrho) E(\alpha-\sigma+1,\, 1-\alpha)$$

bedeutet.

Zur Convergenz des Doppelintegrals (32) ist erforderlich, dass die reellen Bestandtheile der Constanten $\alpha-\sigma+1$ und $1-\alpha$ positiv seien. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so wird statt der Formel (10) die Formel (7), resp. (6), benutzt. Im allgemeinen Falle, wo die Formel (7) zur Anwendung gelangt, findet man die Gleichung

$$(33) \quad \left\{ \begin{aligned} &\overline{\int}_c^{(x,0,x-,0-)} (v-x)^{-\alpha} v^{\alpha-\sigma} dv \overline{\int}_\infty^{(\mathfrak{A}',\mathfrak{A}')} e^{-2\sqrt{u}} (u-v)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}} \frac{du}{\sqrt{u}} \\ &\quad = \mathfrak{N}_2 x^{1-\sigma} F(\alpha-\sigma+1;\, 2-\sigma,\, \varrho-\sigma+1;\, x), \end{aligned} \right.$$

in der

$$\mathfrak{N}_2 = 2^{2\varrho-2\sigma+1} e^{\pi i(\alpha+\sigma-2\varrho)} \overline{\Gamma}(2\sigma-2\varrho) \mathfrak{E}(\alpha-\sigma+1,\, 1-\alpha)$$

gesetzt ist. Die analoge aus (6) folgende Entwicklung soll hier nicht besonders angeführt werden.

Man substituire ferner, gemäss (27), für V den Ausdruck

$$(34)\quad \begin{cases} \int_0^v \left(e^{2\sqrt{u}} + e^{-2\sqrt{u}}\right)(v-u)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}} \frac{du}{\sqrt{u}} \\ = 2E\left(\frac{1}{2}, \sigma-\varrho+\frac{1}{2}\right) v^{\sigma-\varrho}\,\mathfrak{F}(\sigma-\varrho+1;\, v). \end{cases}$$

Die Convergenz des links stehenden Integrals erfordert, dass der reelle Theil von $\sigma - \varrho + \frac{1}{2}$ positiv sei. Aber die Differentialgleichung (28) ist nach ϱ und σ symmetrisch. Wird also σ als diejenige der zwei Constanten ϱ, σ definirt, die den grösseren reellen Bestandtheil hat, so ist der obigen Bedingung genügt. Indem man in (31) den Doppelumlauf um die Punkte x und 0 als Integrationsweg von v nimmt und für V das bezeichnete Integral einsetzt, erhält man mit Hülfe von (7) die Gleichung

$$(35)\quad \begin{cases} \overline{\int_c}^{(x,0,x-,0-)} (v-x)^{-\alpha} v^{\alpha-\sigma} dv \int_0^v \left(e^{2\sqrt{u}} + e^{-2\sqrt{u}}\right)(v-u)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}} \frac{du}{\sqrt{u}} \\ \qquad = \mathfrak{K}_3\, x^{1-\varrho} F(\alpha-\varrho+1;\, 2-\varrho,\, \sigma-\varrho+1;\, x), \end{cases}$$

wo unter $\mathfrak{K}_3$ die Constante

$$\mathfrak{K}_3 = 2e^{\pi i(\alpha-\varrho)} E\left(\frac{1}{2}, \sigma-\varrho+\frac{1}{2}\right) \mathfrak{E}(\alpha-\varrho+1,\, 1-\alpha)$$

verstanden wird.

Es ist ferner nach (26)

$$\overline{\int_{-\infty}}^{(0)} e^{\frac{v}{u}+u} u^{\sigma-\varrho-1} du = \overline{\Gamma}(\sigma-\varrho)\,\mathfrak{F}(\varrho-\sigma+1;\, v),$$

$$\overline{\int_{-\epsilon v}}^{(0)} e^{\frac{v}{u}+u} u^{\sigma-\varrho-1} du = \overline{\Gamma}(\varrho-\sigma)\, v^{\sigma-\varrho}\,\mathfrak{F}(\sigma-\varrho+1;\, v).$$

Werden diese Functionen nach einander an Stelle von V in (31) eingeführt, so liefert die Formel (7) die Gleichungen

$$(36)\quad \overline{\int_c}^{(x,0,x-,0-)} (v-x)^{-\alpha} v^{\alpha-\sigma} dv \overline{\int_{-\infty}}^{(0)} e^{\frac{v}{u}+u} u^{\sigma-\varrho-1} du$$
$$= e^{\pi i(\alpha-\sigma)}\, \overline{\Gamma}(\sigma-\varrho)\,\mathfrak{E}(\alpha-\sigma+1,\, 1-\alpha)\, x^{1-\sigma} F(\alpha-\sigma+1;\, 2-\sigma,\, \varrho-\sigma+1;\, x),$$

und

$$(37)\quad \overline{\int_c}^{(x,0,x-,0-)} (v-x)^{-\alpha} v^{\alpha-\sigma} dv \overline{\int_{-\epsilon v}}^{(0)} e^{\frac{v}{u}+u} u^{\sigma-\varrho-1} du$$
$$= e^{\pi i(\alpha-\varrho)}\, \overline{\Gamma}(\varrho-\sigma)\,\mathfrak{E}(\alpha-\varrho+1,\, 1-\alpha)\, x^{1-\varrho} F(\alpha-\varrho+1;\, 2-\varrho,\, \sigma-\varrho+1;\, x).$$

Die Doppelintegrale (33) und (36) stellen die eine, die Integrale (35) und (37) die andere mehrdeutige Hauptlösung der Differentialgleichung

(28) für beliebige Werthe der Constanten α, ϱ, σ dar. Auszunehmen sind nur die speciellen Werthe dieser Constanten, für welche die Grössen $\mathfrak{E}(\alpha-\varrho+1,\ 1-\alpha)$, $\mathfrak{E}(\alpha-\sigma+1,\ 1-\alpha)$ verschwinden. In letzteren Fällen wird statt des Doppelumlaufs ein einfacher Umlauf um x oder 0, resp. die geradlinige Strecke von 0 bis x als Weg von v genommen.

Man lasse sodann in (31) die Variable v einen geschlossenen Integrationsweg durchlaufen, der im unendlich entfernten Punkte der negativen reellen Axe beginnt und endigt und sowohl den Nullpunkt als auch den Punkt x umschliesst, und zwar möge dieser Weg aus einem (in beiden Richtungen durchlaufenen) Abschnitte der negativen reellen Axe und aus einem um den Nullpunkt beschriebenen Kreise, innerhalb dessen der Punkt x liegt, bestehen. Da mod. v hiernach stets grösser als mod. x ist, so kann die Potenz $(v-x)^{-\alpha}$ in die convergente Reihe

$$v^{-\alpha}\left(1-\frac{x}{v}\right)^{-\alpha}=v^{-\alpha}\left\{1+\frac{\alpha}{1}\frac{x}{v}+\frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2}\frac{u^2}{v^2}+\cdots\right\}$$

entwickelt werden. Also ist für den genannten Integrationsweg

$$\overline{\int}_{-\infty}^{)\mathfrak{A})}(v-x)^{-\alpha}v^{\alpha-\sigma}V\,dv$$
$$=\mathfrak{G}_0+\frac{\alpha}{1}\mathfrak{G}_1x+\cdots+\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+\nu-1)}{1.2\ldots\nu}\mathfrak{G}_\nu x^\nu+\cdots,$$

wo durch $\mathfrak{A}$ die Verbindungslinie der Punkte 0 und x, und durch $\mathfrak{G}_\nu$ (für $\nu=0,1,2,\ldots$) das constante Integral

$$\mathfrak{G}_\nu=\overline{\int}_{-\infty}^{(0)}v^{-\sigma-\nu}V\,dv$$

bezeichnet wird. Man setze nun für V das in (34) genannte Integral

$$\int^{v}\left(e^{2\sqrt{u}}+e^{-2\sqrt{u}}\right)(v-u)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}}\frac{du}{\sqrt{u}}$$

ein, welches durch die Substitution $u=vu_1^2$, $du=2vu_1\,du_1$, die Gestalt

$$2v^{\sigma-\varrho}\int_0^1\left(e^{2u_1\sqrt{v}}+e^{-2u_1\sqrt{v}}\right)(1-u_1^2)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}}du_1$$

annimmt. Dann wird

$$\mathfrak{G}_\nu=2\overline{\int}_{-\infty}^{(0)}v^{-\varrho-\nu}dv\int_0^1\left(e^{2u_1\sqrt{v}}+e^{-2u_1\sqrt{v}}\right)(1-u_1^2)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}}du_1.$$

Dieses Doppelintegral ist aber, wenn die reellen Theile von $\varrho-1$ und $\sigma-\varrho+\frac{1}{2}$ als positiv vorausgesetzt werden, nach § 3 (Formel (24)) des Aufsatzes des Verfassers „Ueber fünf Doppelintegrale"*) gleich dem Ausdruck

$$2^{2\varrho+2\nu-1} E\left(\varrho-\tfrac{1}{2}+\nu,\ \sigma-\varrho+\tfrac{1}{2}\right)\overline{\Gamma}(2-2\varrho-2\nu),$$

wofür, wegen der Reductionsformeln der Integrale E und $\overline{\Gamma}$,

$$\frac{2^{2\varrho-1} E\left(\varrho-\frac{1}{1},\ \sigma-\varrho+\frac{1}{2}\right)\overline{\Gamma}(2-2\varrho)}{\varrho(\varrho+1)\dots(\varrho+\nu-1)\ \sigma(\sigma+1)\dots(\sigma+\nu-1)}$$

geschrieben werden kann. Man gelangt somit zu der Gleichung

$$(38)\quad \begin{cases} \overline{\int}_{-\infty}^{(\mathfrak{A})}(v-x)^{-\alpha} v^{\alpha-\sigma} dv \int_0^v \left(e^{2\sqrt{u}}+e^{-2\sqrt{u}}\right)(v-u)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}} \dfrac{du}{\sqrt{u}} \\ \quad = 2^{2\varrho-1} E\left(\varrho-\frac{1}{2},\ \sigma-\varrho+\frac{1}{2}\right)\overline{\Gamma}(2-2\varrho)\, F(\alpha;\ \varrho,\ \sigma;\ x), \end{cases}$$

deren rechte Seite gleich dem Producte aus der Reihe (29) und einer Constanten ist.**)

---

*) Band 41 dieser Annalen, pag. 191.

**) Die obige (zur Gleichung (38) führende) Rechnung ist derjenigen analog, welche am Schluss des § 5 der Abhandlung des Verfassers „Ueber die Differentialgleichungen der Reihen $\mathfrak{F}(\varrho,\sigma;\ x)$ und $\mathfrak{F}(\varrho,\sigma,\tau;\ x)$", Band 41 dieser Annalen, pag. 204, angestellt wird. Auch die übrigen in §§ 5 und 6 der genannten Arbeit enthaltenen Entwickelungen übertragen sich auf die hier behandelte Differentialgleichung 3ter Ordnung. Man bemerke, dass auf diese Weise noch die Formeln

$$(38\text{a})\quad \begin{cases} \overline{\int}_{-\infty}^{(\mathfrak{A})}(v-x)^{-\alpha} v^{\alpha-\sigma} dv \int_{-\infty i}^{+\infty i} e^{\frac{v}{u}+u}\, u^{\sigma-\varrho-1} du \\ \quad = \overline{\Gamma}(1-\varrho)\,\overline{\Gamma}(1-\sigma)\, F(\alpha;\ \varrho,\ \sigma;\ x), \end{cases}$$

$$(38\text{b})\quad \begin{cases} \overline{\int}_{\infty}^{(\mathfrak{A},\mathfrak{A})}(v-x)^{-\alpha} v^{\alpha-\sigma} dv \int_0^v e^{-2\sqrt{u}}(v-u)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}} \dfrac{du}{\sqrt{u}} \\ \quad = 2^{2\varrho-1} e^{-2\pi i\varrho} E\left(\varrho-\frac{1}{2},\ \sigma-\varrho+\frac{1}{2}\right)\overline{\Gamma}(2-2\varrho)\, F(\alpha;\ \varrho,\sigma;\ x), \end{cases}$$

$$(38\text{c})\quad \begin{cases} \overline{\int}_{\infty}^{(\mathfrak{A},\mathfrak{A})}(v-x)^{-\alpha} v^{\alpha-\sigma} dv\ \overline{\int}_0^{(v)} e^{-2\sqrt{u}}(v-u)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}} \dfrac{du}{\sqrt{u}} \\ \quad = 2^{2\varrho-1} e^{\pi i\left(\sigma-3\varrho-\frac{1}{2}\right)}\,\overline{E}\left(\varrho-\frac{1}{2},\ \sigma-\varrho+\frac{1}{2}\right)\overline{\Gamma}(2-2\varrho)\, F(\alpha;\ \varrho,\ \sigma;\ x) \end{cases}$$

erhalten werden. Hierbei ist vorausgesetzt, dass der reelle Theil von $\varrho-1$ positiv sei; ausserdem werden in (38a) die reellen Theile von $\sigma-1$ und $\varrho-\sigma$, in (38b) der reelle Theil von $\sigma-\varrho+\frac{1}{2}$ als positiv angenommen. Die Variable v geht in den Integralen (38b) und (38c) vom unendlich entfernten Punkte der positiven reellen Axe aus und umkreist die Linie $\mathfrak{A}$ (welche die Punkte 0 und x verbindet) zweimal

§ 3.

Die zweite Substitution, die auf die Gleichung (28) angewendet wird, ist

$$(39)\qquad y = \int_g^h e^{\frac{x}{v}}\, v^{-\sigma}\, V_1\, dv.$$

Die Function V_1 befriedigt in diesem Falle (cfr. Crelle's Journal, Band 112, pag. 79) die Differentialgleichung

$$(40)\qquad v\frac{d^2V_1}{dv^2} = \{v-(\varrho-\sigma+1)\}\frac{dV_1}{dv} + (\alpha-\sigma+1)\,V_1,$$

die aus der Gleichung (14) entsteht, wenn die Grössen x, y, α, ϱ durch v, V_1, $\alpha-\sigma+1$, $\varrho-\sigma+1$ ersetzt werden. Gemäss (21) nimmt man für V_1, indem man durch $\mathfrak{A}'$ wiederum die Verbindungslinie der Punkte 0 und v bezeichnet, nach einander die Integrale

$$\bar{\int}_{-\infty}^{(\mathfrak{A}')} e^u(u-v)^{\sigma-\alpha-1}u^{\alpha-\varrho}\,du = \bar{\Gamma}(\sigma-\varrho)\,F(\alpha-\sigma+1;\,\varrho-\sigma+1;\,v),$$

$$\bar{\int}_c^{(v,0,v-,0-)} e^u(u-v)^{\sigma-\alpha-1}u^{\alpha-\varrho}\,du$$
$$= e^{\pi i(\alpha-\varrho)}\,\mathfrak{C}(\alpha-\varrho+1,\,\sigma-\alpha)\,v^{\sigma-\varrho}F(\alpha-\varrho+1;\;\sigma-\varrho+1;\;v).$$

Dann ergeben sich aus der Formel (11), in der l_ν den Werth

$$\bar{\Gamma}(\sigma-\varrho)\,\frac{(\alpha-\sigma+1)(\alpha-\sigma+2)\ldots(\alpha-\sigma+\nu)}{1.2\ldots\nu.(\varrho-\sigma+1)(\varrho-\sigma+2)\ldots(\varrho-\sigma+\nu)},$$

resp.

$$e^{\pi i(\alpha-\varrho)}\,\mathfrak{C}(\alpha-\varrho+1,\,\sigma-\alpha)\,\frac{(\alpha-\varrho+1)(\alpha-\varrho+2)\ldots(\alpha-\varrho+\nu)}{1.2\ldots\nu.(\sigma-\varrho+1)(\sigma-\varrho+2)\ldots(\sigma-\varrho+\nu)},$$

und p den Werth $1-\sigma$, resp. $1-\varrho$ erhält, die für beliebige Werthe von α, ϱ, σ gültigen Gleichungen

$$(41)\qquad \bar{\int}_{-\epsilon x}^{(0)} e^{\frac{x}{v}}v^{-\sigma}dv\,\bar{\int}_{-\infty}^{(\mathfrak{A}')} e^u(u-v)^{\sigma-\alpha-1}u^{\alpha-\varrho}\,du$$
$$= \bar{\Gamma}(\sigma-\varrho)\bar{\Gamma}(\sigma-1)x^{1-\sigma}F(\alpha-\sigma+1;\,2-\sigma,\,\varrho-\sigma+1;\,x),$$

$$(42)\qquad \bar{\int}_{-\epsilon x}^{(0)} e^{\frac{x}{v}}v^{-\sigma}dv\,\bar{\int}_c^{(v,0,v-,0-)} e^u(u-v)^{\sigma-\alpha-1}u^{\alpha-\varrho}\,du$$
$$= e^{\pi i(\alpha-\varrho)}\,\mathfrak{C}(\alpha-\varrho+1,\sigma-\alpha)\bar{\Gamma}(\varrho-1)\,x^{1-\varrho}F(\alpha-\varrho+1;\,2-\varrho,\,\sigma-\varrho+1;\,x).$$

---

hinter einander in positiver Drehungsrichtung. Bei dem Integral (38a), wo der Weg von v der nämliche wie (38) ist, durchläuft die Variable u im Uebrigen die imaginäre Axe, umgeht aber den Nullpunkt auf der Seite der positiven reellen Werthe.

Die Gleichung (41) wird niemals illusorisch. Denn da $\bar{\Gamma}(a)$ nur für ein positives ganzzahliges a verschwindet, und ϱ, σ, $\varrho-\sigma$ hier als nicht ganzzahlig vorausgesetzt werden, so sind $\bar{\Gamma}(\sigma-\varrho)$ und $\bar{\Gamma}(\sigma-1)$, wie auch $\bar{\Gamma}(\varrho-1)$, von Null verschieden. Das auf der rechten Seite der Gleichung (42) stehende Integral $\mathfrak{E}(\alpha-\varrho+1,\ \sigma-\alpha)$ nimmt den Werth Null an, wenn $\alpha-\varrho+1$ oder $\sigma-\alpha$ eine positive ganze Zahl ist; zugleich verschwindet dann das auf der linken Seite von (42) befindliche Doppelintegral. In diesen speciellen Fällen hat man die Gleichung (42) durch die einfachere analoge Gleichung zu ersetzen, auf deren linker Seite die Variable u (statt des Doppelumlaufs) einen einmaligen Umlauf um v, resp. 0 (bei 0, resp. v beginnend) ausführt oder die Verbindungslinie der Punkte 0 und v durchläuft $\big($cfr. (22)$\big)$.

Ist der reelle Theil von $\alpha-\varrho+1$ positiv, so genügt der Differentialgleichung (40) das particuläre Integral

$$\bar{\int_0^{(v)}} e^u (u-v)^{\sigma-\alpha-1} u^{\alpha-\varrho}\, du,$$

das durch die Substitution $u=vu_1$, $du=v\,du_1$, die Gestalt

$$v^{\sigma-\varrho}\bar{\int_0^{(1)}} e^{u_1 v}(u_1-1)^{\sigma-\alpha-1} u_1^{\alpha-\varrho}\, du_1$$

annimmt. Man setze den letzteren Ausdruck an Stelle von V_1 in (39) ein und lasse die Variable v von $-\infty$ aus einen positiven Umlauf um den Nullpunkt machen. Das hierdurch entstehende Doppelintegral

$$\bar{\int_{-\infty}^{(0)}} e^{\frac{x}{v}} v^{-\varrho}\, dv \bar{\int_0^{(1)}} e^{u_1 v}(u_1-1)^{\sigma-\alpha-1} u_1^{\alpha-\varrho}\, du_1$$

ergiebt, wenn $e^{\frac{x}{v}}$ in $1+\frac{1}{v}\frac{x}{1}+\frac{1}{v^2}\frac{x^2}{1.2}+\cdots$ entwickelt wird, die Reihe

$$\mathfrak{H}_0+\mathfrak{H}_1\frac{x}{1}+\mathfrak{H}_2\frac{x^2}{1.2}+\cdots+\mathfrak{H}_\nu\frac{x^\nu}{1.2\ldots\nu}+\cdots,$$

wo $\mathfrak{H}_\nu$ das constante Doppelintegral

$$\mathfrak{H}_\nu=\bar{\int_{-\infty}^{(0)}} v^{-\varrho-\nu}\, dv \bar{\int_0^{(1)}} e^{u_1 v}(u_1-1)^{\sigma-\alpha-1} u_1^{\alpha-\varrho}\, du_1$$

bezeichnet. Für $\mathfrak{H}_\nu$ gilt aber, wenn angenommen wird, dass der reelle Theil von α positiv sei, die Gleichung*)

$$\mathfrak{H}_\nu=\bar{\Gamma}(1-\varrho-\nu)\,\bar{E}(\alpha+\nu,\ \sigma-\alpha).$$

---

*) Cfr. § 3 des Aufsatzes des Verfassers „Ueber ein vielfaches, auf Euler'sche Integrale reducirbares Integral" im 107ten Bande des Crelle'schen Journals, p. 246. Die dort abgeleitete Formel:

Indem man dann mittelst der für die Integrale $\overline{E}$ und $\overline{\Gamma}$ geltenden Reductionsformeln die Grösse $\mathfrak{H}_\nu$ in den Quotienten

$$\mathfrak{H}_\nu = \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+\nu-1)}{\varrho(\varrho+1)\dots(\varrho+\nu-1)\,\sigma(\sigma+1)\dots(\sigma+\nu-1)}\,\overline{\Gamma}(1-\varrho)\,\overline{E}(\alpha,\sigma-\alpha)$$

umformt, findet man

$$(43)\qquad \left\{\begin{aligned} &\overline{\int_{-\infty}^{(0)}} e^{\frac{x}{v}}\, v^{-\varrho}\, dv \overline{\int_0^{(1)}} e^{u_1 v}(u_1-1)^{\sigma-\alpha-1} u_1^{\alpha-\varrho}\, du_1 \\ &= \overline{\Gamma}(1-\varrho)\,\overline{E}(\alpha,\sigma-\alpha)\,F(\alpha;\,\varrho,\sigma;\,x). \end{aligned}\right.$$

Das betrachtete Doppelintegral stellt also, wie das Doppelintegral (38), resp. (38a), (38b), (38c), die eindeutige particuläre Lösung der Differentialgleichung (28) dar.

§ 4.

Die Differentialgleichung

$$(44)\qquad \left\{\begin{aligned} & x^2\frac{d^3y}{dx^3} + (\varrho+\sigma+1)\,x\frac{d^2y}{dx^2} + \varrho\sigma\frac{dy}{dx} \\ &= x^2\frac{d^2y}{dx^2} + (\alpha+\beta+1)\,x\frac{dy}{dx} + \alpha\beta y, \end{aligned}\right.$$

$$\overline{\int_{-\infty}^{(0)}} s^{-a}\, ds \int_0^1 e^{st}\, t^b\, (1-t)^{c-1}\, dt = \overline{\Gamma}(1-a)\, E(a+b,c)$$

lässt sich leicht auf den Fall ausdehnen, wo die Variable t vom Nullpunkte aus den Punkt 1 umkreist. Giebt man dem Doppelintegral

$$H = \overline{\int_{-\infty}^{(0)}} s^{-a}\, ds \overline{\int_0^{(1)}} e^{st}\, t^b\, (t-1)^{c-1}\, dt$$

die Form

$$H = \overline{\int_{-\infty}^{(0)}} e^s s^{-a}\, ds \overline{\int_0^{(1)}} e^{s(t-1)}\, t^b\, (t-1)^{c-1}\, dt$$

und setzt für $e^{s(t-1)}$ die Reihe $1+\frac{s(t-1)}{1}+\cdots$ ein, so entsteht für H eine Reihenentwickelung, in welcher der allgemeine Term

$$\overline{\Gamma}(1-a-\nu)\,\overline{E}(b+1,\,c+\nu),$$

lautet. Eine Rechnung von derselben Art, wie sie in dem genannten Aufsatze enthalten ist, führt dann zu der Gleichung

$$H = \overline{\Gamma}(1-a)\,\overline{E}(a+b,c),$$

durch welche das obige Integral $\mathfrak{H}_\nu$ bestimmt wird.

die sich aus (1) im Falle $n=3$, $m=2$ ergiebt, und deren Hauptlösungen in Reihenform

$$(45)\qquad \begin{cases} F(\alpha,\beta;\varrho,\sigma;x), = 1+\frac{\alpha\beta}{1.\varrho\sigma}x+\cdots, \\ x^{1-\varrho}F(\alpha-\varrho+1,\ \beta-\varrho+1;\ 2-\varrho,\ \sigma-\varrho+1;\ x), \\ x^{1-\sigma}F(\alpha-\sigma+1,\ \beta-\sigma+1;\ 2-\sigma,\ \varrho-\sigma+1;\ x) \end{cases}$$

lauten, ist vom Verfasser bereits in § 1 und § 2 der Abhandlung „Ueber eine lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit einem endlichen singulären Punkte" (Crelle's Journal, Band 108, pag. 50) behandelt worden. Die Gleichung wird daselbst durch Doppelintegrale gelöst, zu denen man durch eine Substitution von der Form (2) gelangt. Im Folgenden soll, als Ergänzung dieser Rechnung, die Substitution (cfr. 3)

$$(46)\qquad y=\int_g^h e^{\frac{x}{v}}\,v^{-\sigma}\,V_2\,dv$$

auf die Gleichung (44) angewendet werden. Man erhält hierdurch (nach zweimaliger theilweiser Integration) für die Function V_2 die Differentialgleichung

$$(47)\qquad v(v-1)\frac{d^2V_2}{dv^2}+\{(\alpha+\beta-2\sigma+3)\,v-(\varrho-\sigma+1)\}\frac{dV_2}{dv} \\ +(\alpha-\sigma+1)(\beta-\sigma+1)\,V_2=0,$$

die aus (13) entsteht, wenn die Grössen v, V_2, $\alpha-\sigma+1$, $\beta-\sigma+1$, $\varrho-\sigma+1$ statt x, y, α, β, ϱ gesetzt werden.

Um die mehrdeutigen Hauptlösungen der Gleichung (44) aus dem Integral (46) abzuleiten, nimmt man $g=h=-\varepsilon x$ und lässt (wie in (41) und (42)) die Variable v den in (11) für die Variable t angegebenen Weg durchlaufen. Sind die reellen Bestandtheile der Constanten $\beta-\varrho+1$ und $\sigma-\beta$ positiv, so kann für V_2 zunächst das Integral

$$\int_0^v (v-u)^{\sigma-\beta-1}\,u^{\beta-\varrho}(1-u)^{\varrho-\alpha-1}\,du$$

gewählt werden, das durch die Substitution $u=vu_1$, $du=v\,du_1$, in das Product

$$v^{\sigma-\varrho}\int_0^1 u_1^{\beta-\varrho}(1-u_1)^{\sigma-\beta-1}(1-u_1v)^{\varrho-\alpha-1}\,du_1$$

übergeht. Das auf diese Weise erhaltene Doppelintegral

$$\int_{-\varepsilon x}^{\overline{(0)}} e^{\frac{x}{v}} v^{-\varrho}\, dv \int_0^1 u_1^{\beta-\varrho}(1-u_1)^{\sigma-\beta-1}(1-u_1 v)^{\varrho-\alpha-1}\, du_1$$

verwandelt sich durch die Substitution $v = x v_1$, $dv = x\, dv_1$, in den Ausdruck

$$x^{1-\varrho}\int_{-\varepsilon}^{\overline{(0)}} e^{\frac{1}{v_1}} v_1^{-\varrho}\, dv_1 \int_0^1 u_1^{\beta-\varrho}(1-u_1)^{\sigma-\beta-1}(1-u_1 v_1 x)^{\varrho-\alpha-1}\, du_1,$$

in welchem die Potenz $(1-u_1 v_1 x)^{\varrho-\alpha-1}$ nach dem binomischen Satze in die Reihe

$$1+\frac{\alpha-\varrho+1}{1} u_1 v_1 x + \cdots + \frac{(\alpha-\varrho+1)(\alpha-\varrho+2)\ldots(\alpha-\varrho+\nu)}{1.2\ldots\nu} u_1^\nu v_1^\nu x^\nu + \cdots$$

entwickelt wird. Diese Reihe ist im vorliegenden Falle für einen beliebigen Werth von x anwendbar; denn die v-Curve, welche in ihren Dimensionen beliebig bleibt, kann so klein genommen werden, dass mod. $(u_1 v_1 x)$, d. h. mod. $(u_1 v)$ die Einheit nicht erreicht. Somit gewinnt man, nach Berücksichtigung von (9) und (12a), für das genannte Doppelintegral die Entwickelung

$$x^{1-\varrho}\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\frac{(\alpha-\varrho+1)\ldots(\alpha-\varrho+\nu)}{1.2\ldots\nu}\,\overline{\Gamma}(\varrho-1-\nu)\, E(\beta-\varrho+1+\nu,\sigma-\beta).$$

Da nun

$$E(\beta-\varrho+1+\nu,\,\sigma-\beta)=\frac{(\beta-\varrho+1)\ldots(\beta-\varrho+\nu)}{(\sigma-\varrho+1)\ldots(\sigma-\varrho+\nu)}\, E(\beta-\varrho+1,\,\sigma-\beta).$$

und (cfr. Band 35 dieser Annalen, pag. 515)

$$\overline{\Gamma}(\varrho-1-\nu)=\frac{\overline{\Gamma}(\varrho-1)}{(2-\varrho)(3-\varrho)\ldots(\nu+1-\varrho)}$$

ist, so entsteht die Gleichung

$$(48)\quad\left\{\begin{aligned}&\int_{-\varepsilon x}^{\overline{(0)}} e^{\frac{x}{v}} v^{-\sigma}\, dv\int_0^v (v-u)^{\sigma-\beta-1} u^{\beta-\varrho}(1-u)^{\varrho-\alpha-1}\, du\\ &=\overline{\Gamma}(\varrho-1)\, E(\beta-\varrho+1,\,\sigma-\beta)\, x^{1-\varrho} F(\alpha-\varrho+1,\,\beta-\varrho+1;\,2-\varrho,\\ &\qquad\qquad\sigma-\varrho+1;\,x).\end{aligned}\right.$$

Erfüllen die Constanten β, ϱ, σ die oben erwähnte Bedingung $(\beta-\varrho+1>0,\ \sigma-\beta>0)$ nicht, so wird die vorstehende Rechnung in der Art modificirt, dass ein Doppelumlauf (cfr. das zweite Integral (18)), resp. ein einfacher Umlauf um 0 oder v den Weg der Variable u bildet. Im allgemeinen Falle findet man die zu (48) analoge Gleichung

$$(49)\quad \overline{\int}_{-\epsilon x}^{(0)} e^{\frac{x}{v}}\, v^{-\sigma}\, dv \overline{\int}_{c}^{(v,0,v-,0-)} (v-u)^{\sigma-\beta-1}\, u^{\beta-\varrho}(1-u)^{\varrho-\alpha-1}\, du$$
$$= \mathfrak{N}'\, x^{1-\varrho}\, F(\alpha-\varrho+1,\, \beta-\varrho+1;\; 2-\varrho,\, \sigma-\varrho+1;\; x),$$

in der die Constante $\mathfrak{N}'$ den Werth

$$\mathfrak{N}' = e^{\pi i(\sigma-\varrho+1)}\, \overline{\Gamma}(\varrho-1)\, \mathfrak{E}(\beta-\varrho+1,\, \sigma-\beta)$$

hat.

Für V_2 soll ferner der Ausdruck

$$(50)\qquad \overline{\int}_{c}^{(1,\mathfrak{A}',1-,\mathfrak{A}'-)} (u-v)^{\sigma-\beta-1}\, u^{\beta-\varrho}(1-u)^{\varrho-\alpha-1}\, du,$$

der dem ersten Integral (18) entspricht, in (46) substituirt werden, während v einen Integrationsweg von derselben Art, wie in (48), (49) durchläuft. Unter $\mathfrak{A}'$ wird wiederum die Verbindungslinie der Punkte 0 und v verstanden. Um die Wege von u und v näher zu bestimmen, schlägt man um den Nullpunkt als Mittelpunkt zwei Kreise $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$, von denen der grössere $\mathfrak{K}$ die positive reelle Axe im Punkte c schneiden möge. Die Radien beider Kreise werden kleiner als 1 vorausgesetzt. Man construirt ausserdem um den Punkt 1 als Mittelpunkt einen durch den Punkt c gehenden Kreis $\mathfrak{L}$. Der Kreis $\mathfrak{K}'$ möge zusammen mit der vom Punkte $-\epsilon x$ zum Punkte d (Fig. 3) gezogenen Geraden für den

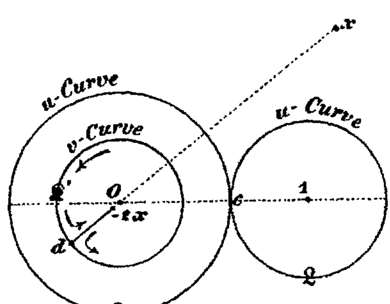

Fig. 3.

Weg der Variable v angewendet werden. Die Variable u soll vom Punkte c ausgehen und die Kreise $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{K}$ zuerst in positiver, dann (in der nämlichen Reihenfolge) in negativer Drehungsrichtung durchlaufen. Da nach diesen Festsetzungen mod. u stets grösser als mod. v ist, so besteht für die Potenz $(u-v)^{\sigma-\beta-1}$ die convergente Entwickelung

$$(u-v)^{\sigma-\beta-1} = u^{\sigma-\beta-1}\left(1-\frac{v}{u}\right)^{\sigma-\beta-1}$$
$$= u^{\sigma-\beta-1}\left\{1+\frac{\beta-\sigma+1}{1}\frac{v}{u}+\cdots+\frac{(\beta-\sigma+1)\ldots(\beta-\sigma+\nu)}{1.2\ldots\nu}\frac{v^\nu}{u^\nu}+\cdots\right\}.$$

Das Doppelintegral

$$\overline{\int}_{-\epsilon x}^{(0)} e^{\frac{x}{v}} v^{-\sigma}\,dv \overline{\int}_{c}^{(1,\mathfrak{A}',1-,\mathfrak{A}'-)} (u-v)^{\sigma-\beta-1} u^{\beta-\varrho}(1-u)^{\varrho-\alpha-1}\,du$$

geht, wenn für $(u-v)^{\sigma-\beta-1}$ die obige Reihe gesetzt, und zugleich $v = xv_1$, $dv = x\,dv_1$ substituirt wird, in die Summe

$$x^{1-\sigma}\left\{\mathfrak{M}_0+\frac{\beta-\sigma+1}{1}\mathfrak{M}_1 x+\cdots+\frac{(\beta-\sigma+1)\ldots(\beta-\sigma+\nu)}{1.2\ldots\nu}\mathfrak{M}_\nu x^\nu+\cdots\right\}$$

über, in der $\mathfrak{M}_\nu$ (für $\nu = 0, 1, 2, \ldots$) das Product

$$\mathfrak{M}_\nu = \overline{\int}_{-\epsilon}^{(0)} e^{\frac{1}{v_1}} v_1^{-\sigma+\nu}\,dv_1 \overline{\int}_{c}^{(1,0,1-,0-)} u^{\sigma-\varrho-\nu-1}(1-u)^{\varrho-\alpha-1}\,du$$

bedeutet. Nach (8) und (12a) ist

$$\mathfrak{M}_\nu = \overline{\Gamma}(\sigma-1-\nu)e^{\pi i(\sigma-\alpha-\nu)}\mathfrak{E}(\sigma-\varrho-\nu,\ \varrho-\alpha)$$
$$= e^{\pi i(\sigma-\alpha)}\overline{\Gamma}(\sigma-1)\,\mathfrak{E}(\sigma-\varrho,\ \varrho-\alpha)\,\frac{(\alpha-\sigma+1)(\alpha-\sigma+2)\ldots(\alpha-\sigma+\nu)}{(2-\sigma)\ldots(\nu-\sigma)\,(\varrho-\sigma+1)\ldots(\varrho-\sigma+\nu)}.$$

Also gilt, wenn man $\mathfrak{N}''$ die Constante

$$\mathfrak{N}'' = e^{\pi i(\sigma-\alpha)}\,\overline{\Gamma}(\sigma-1)\,\mathfrak{E}(\sigma-\varrho,\ \varrho-\alpha)$$

nennt, die Gleichung

$$(51)\quad \overline{\int}_{-\epsilon x}^{(0)} e^{\frac{x}{v}} v^{-\sigma}\,dv \overline{\int}_{c}^{(1,\mathfrak{A}',1-,\mathfrak{A}'-)} (u-v)^{\sigma-\beta-1} u^{\beta-\varrho}(1-u)^{\varrho-\alpha-1}\,du$$
$$= \mathfrak{N}'' x^{1-\sigma} F(\alpha-\sigma+1,\ \beta-\sigma+1;\ 2-\sigma,\ \varrho-\sigma+1;\ x).$$

Endlich lässt sich auch die eindeutige particuläre Lösung der Differentialgleichung (43)

$$F(\alpha,\ \beta;\ \varrho,\ \sigma;\ x)$$

durch ein Integral von der Form (46) darstellen. Als Integrationsweg von v dient dann (wie in (43)) eine von $-\infty$ ausgehende geschlossene Curve, die den Nullpunkt umkreist. Die reellen Theile der Constanten α und β werden hierbei als positiv vorausgesetzt. Für die Durchführung der Rechnung benutzt man eine auf ein Doppelintegral bezügliche Formel. Der Verfasser hat in § 3 der bereits erwähnten Abhandlung

„Ueber die Differentialgleichung der allgemeineren hypergeometrischen Reihe etc." (Band 102 des Crelle'schen Journals, pag. 91) die Gleichung

$$\int_0^1 v^{k_1+k_2-1}(1-v)^{l_1-1}\,dv\int_0^1 u^{k_2-1}(1-u)^{k_1-1}(1-uv)^{l_2}\,du$$
$$= E(k_1, l_1)\,E(k_2, k_1+l_1+l_2)$$

abgeleitet. Eine ähnliche Formel besteht auch für den Fall, dass die Variablen u und v, statt die Verbindungslinie der Punkte 0 und 1 zu durchlaufen, vom Punkte 1 aus einen Umlauf um den Nullpunkt machen. Man findet bei Anwendung dieser Integrationswege, indem man das Integral (5) durch die Substitution $z = 1 - w$ in

$$\bar{E}(a, b) = e^{-\pi i b}\,\bar{\int_1^{(0)}} w^{b-1}(1-w)^{a-1}\,dw$$

(Band 35 dieser Annalen, pag. 513) umformt, die Gleichung*)

---

*) Für die Potenz $(1-uv)^{-a-b}$ gilt, da die Wege der Variablen u und v aus einem kleinen Kreise um den Nullpunkt und aus einem zwischen 0 und 1 liegenden Stücke der reellen Axe zusammengesetzt werden können (so dass mod. $(uv) < 1$ ist), die convergente Entwickelung

$$(1-uv)^{-a-b} = 1 + \frac{a+b}{1}\,uv + \cdots + \frac{(a+b)\ldots(a+b+p-1)}{1.2\ldots p}\,u^p v^p + \cdots.$$

Daher ist das in (52) genannte Doppelintegral gleich der Summe

$$\sum_{p=0}^{p=\infty}\frac{(a+b)\ldots(a+b+p-1)}{1.2\ldots p}\,\bar{\int_1^{(0)}} v^{b+p-1}(1-v)^{a-1}\,dv\,\bar{\int_1^{(0)}} u^{l+p-1}(1-u)^{k-1}\,du,$$
$$= \sum_{p=0}^{p=\infty}\frac{(a+b)\ldots(a+b+p-1)}{1.2\ldots p}\,e^{\pi i(b+l)}\,\bar{E}(a, b+p)\,\bar{E}(k, l+p)$$

die, wenn man für $\bar{E}(a, b+p)$, $\bar{E}(k, l+p)$ das Product

$$\frac{b(b+1)\ldots(b+p-1)}{(a+b)\ldots(a+b+p-1)}\,\frac{l(l+1)\ldots(l+p-1)}{(k+l)\ldots(k+l+p-1)}\,\bar{E}(a, b)\,\bar{E}(k, l)$$

einsetzt, die Form

$$e^{\pi i(b+l)}\,\bar{E}(a, b)\,\bar{E}(k, l)\left\{1 + \frac{bl}{1.(k+l)} + \frac{b(b+1)\,l(l+1)}{1.2.(k+l)(k+l+1)} + \cdots\right\}$$

annimmt. Der in der Klammer befindliche Ausdruck stellt aber eine Gauss'sche hypergeometrische Reihe mit dem vierten Argument 1 dar, welche den Werth $\frac{\Gamma(k+l)\,\Gamma(k-b)}{\Gamma(k)\,\Gamma(k+l-b)}$ hat. Da nun $\bar{E}(k, l)$ gleich dem Quotienten $\frac{\Gamma(k)\,\bar{\Gamma}(l)}{\Gamma(k+l)}$ ist, so ergiebt sich das Doppelintegral (52) in der That als identisch mit dem Producte

$$e^{\pi i(b+l)}\,\bar{E}(a, b)\,\frac{\Gamma(k-b)\,\bar{\Gamma}(l)}{\Gamma(k-b+l)} = e^{\pi i(b+l)}\,\bar{E}(a, b)\,\bar{E}(k-b, l).$$

$$(52)\quad \begin{cases} \overline{\int_1^{(0)}} v^{b-1}(1-v)^{a-1}\,dv \overline{\int_1^{(0)}} u^{l-1}(1-u)^{k-1}(1-uv)^{-a-b}\,du \\ \qquad = e^{\pi i(b+l)}\,\overline{E}(a,\,b)\,\overline{E}(k-b,\,l). \end{cases}$$

Man bilde, indem man in (46) an Stelle von V_2 das Integral

$$\overline{\int_\infty^{(1)}} (u-v)^{\sigma-\beta-1}\,u^{\beta-\sigma}\,(u-1)^{\varrho-\alpha-1}\,du$$

nimmt, das Doppelintegral

$$(53)\qquad \overline{\int_{-\infty}^{(0)}} e^{\frac{x}{v}}\,v^{-\sigma}\,dv \overline{\int_\infty^{(1)}} (u-v)^{\sigma-\beta-1}\,u^{\beta-\varrho}\,(u-1)^{\varrho-\alpha-1}\,du.$$

Dasselbe liefert, wenn $e^{\frac{x}{v}}$ nach Potenzen von x entwickelt wird, die Reihe

$$\mathfrak{P}_0+\mathfrak{P}_1\,\frac{x}{1}+\mathfrak{P}_2\,\frac{x^2}{1\,.\,2}+\cdots+\mathfrak{P}_\nu\,\frac{x^\nu}{1\,.\,2\ldots\nu}+\cdots,$$

in der $\mathfrak{P}_\nu$ die Constante

$$\overline{\int_{-\infty}^{(0)}} v^{-\sigma-\nu}\,dv \overline{\int_\infty^{(1)}} (u-v)^{\sigma-\beta-1}\,u^{\beta-\varrho}\,(u-1)^{\varrho-\alpha-1}\,du$$

bedeutet. Man substituirt

$$u=\frac{1}{1-u_1},\quad v=\frac{v_1}{v_1-1},$$

so dass $u_1=\frac{u-1}{u}$, $v_1=\frac{v}{v-1}$ ist. Der Weg der Variable u möge aus einem (in beiden Richtungen durchlaufenen) Abschnitte der positiven reellen Axe und einem kleinen Kreise um den Punkt 1 bestehen, der Weg der Variable v aus einem Abschnitt der negativen reellen Axe und einem kleinen Kreise um den Nullpunkt. Dann ergiebt sich sowohl für u_1 als für v_1 ein Weg, der vom Punkte 1 ausgeht und den Nullpunkt in positiver Drehungsrichtung umkreist. Es entsteht auf diese Weise für $\mathfrak{P}_\nu$ die Gleichung

$$(-1)^{\sigma+\nu-1}\overline{\int_1^{(0)}} v_1^{-\sigma-\nu}(1-v_1)^{\beta+\nu-1}dv_1 \overline{\int_1^{(0)}} u_1^{\varrho-\alpha-1}(1-u_1)^{\alpha-\sigma}(1-u_1v_1)^{\sigma-\beta-1}\,du_1.$$

Die Anwendung der Formel (52) giebt nun

$$\mathfrak{P}_\nu=e^{\pi i(\varrho-\alpha)}\,\overline{E}(\beta+\nu,\,1-\sigma-\nu)\,\overline{E}(\alpha+\nu,\,\varrho-\alpha),$$

so dass, nach Berücksichtigung der Reductionsformel

$$\overline{E}(a,\,b-\nu)=(-1)^\nu\,\frac{(a+b-1)\,(a+b-2)\ldots(a+b-\nu)}{(b-1)\,(b-2)\ldots(b-\nu)}\,\overline{E}(a,\,b)$$

und der analogen in § 1 angegebenen Formel für $\overline{E}(a+\nu,\ b)$, die Grösse $\mathfrak{P}_\nu$ in den Ausdruck

$$e^{\pi i(\varrho-\alpha)}\ \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+\nu-1)\ \beta(\beta+1)\ldots(\beta+\nu-1)}{\varrho(\varrho+1)\ldots(\varrho+\nu-1)\ \sigma(\sigma+1)\ldots(\sigma+\nu-1)}\ \overline{E}(\beta,\ 1-\sigma)\ \overline{E}(\alpha,\ \varrho-\alpha)$$

übergeht. Somit wird für das Doppelintegral (53) die Gleichung

$$(54)\qquad \begin{cases} \displaystyle\overline{\int}_{-\infty}^{(0)} e^{\frac{x}{v}}\, v^{-\sigma}\, dv \overline{\int}_{\infty}^{(1)} (u-v)^{\sigma-\beta-1}\, u^{\beta-\varrho}\, (u-1)^{\varrho-\alpha-1}\, du \\ = e^{\pi i(\varrho-\alpha)}\, \overline{E}(\alpha,\ \varrho-\alpha)\, \overline{E}(\beta,\ 1-\sigma)\ F(\alpha,\ \beta;\ \varrho,\ \sigma;\ x) \end{cases}$$

erhalten.