

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

SOPRA UNA NUOVA ESPRESSIONE PEL RISULTANTE DI DUE EQUAZIONI ALGEBRICHE.

BORCHARDT — Über ein die Elimination betreffendes Problem.
(Monatsbericht der Akademie zu Berlin. Mai. 1859).

Il Sig. Borchardt nell'articolo suscitato dà una elegante soluzione del seguente problema :

« Supponendo noti i valori di due polinomj $\varphi(x)$, $\psi(x)$ dell'ennesimo grado, corrispondenti ai valori $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ della x ; determinare in funzione delle quantità $\varphi(\alpha_0), \varphi(\alpha_1) \dots; \psi(\alpha_0), \psi(\alpha_1) \dots$ il risultato della eliminazione della x dalle equazioni $\varphi(x) = 0, \psi(x) = 0$. »

1° È noto (*) che posto :

$$F(x, y) = \frac{\varphi(x)\psi(y) - \varphi(y)\psi(x)}{x - y} = \sum_0^{n-1} \sum_0^{n-1} a_{r,s} x^r y^s$$

il risultante delle equazioni $\varphi(x) = 0, \psi(x) = 0$ è il determinante :

$$\Delta = \sum (\pm a_{0,0} a_{1,1} \dots a_{n-1,n-1}).$$

Si indichino con $x_1, x_2 \dots x_n$ n quantità qualsivogliano, e ponendo per brevità :

$$p_r(x_s) = a_{0,r} + a_{1,r} x_s^1 + a_{2,r} x_s^2 + \dots + a_{n-1,r} x_s^{n-1}$$

dal prodotto del determinante Δ pel determinante :

$$X = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

si avrà

$$\Delta X = \begin{vmatrix} p_0(x_1) & p_0(x_2) & \dots & p_0(x_n) \\ p_1(x_1) & p_1(x_2) & \dots & p_1(x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n-1}(x_1) & p_{n-1}(x_2) & \dots & p_{n-1}(x_n) \end{vmatrix}.$$

(*) Questo teorema è dovuto a Cayley. — Vedi Sylvester — On a Theory of the Syzygetic relations etc. Philosophical Transactions. Vol. 143. Parte 3. pag. 516.

Indicando con $y_1, y_2 \dots y_n$ altre n quantità, e con Y il determinante formato con esse come l' X lo è colle $x_1, x_2 \dots x_n$; moltiplicando quest'ultimo determinante per Y si ottiene:

$$(1) \quad \Delta XY = \sum [\pm F(x_1, y_1) F(x_2, y_2) \dots F(x_n, y_n)].$$

2° Sia:

$$f(x) = (x - \alpha_0)(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n)$$

si ha come è noto:

$$\varphi(x) = f(x) \sum_0^n \frac{\varphi(\alpha_r)}{(x - \alpha_r) f'(\alpha_r)}, \quad \psi(x) = f(x) \sum_0^n \frac{\psi(\alpha_r)}{(x - \alpha_r) f'(\alpha_r)}$$

quindi

$$F(x, y) = \frac{1}{2} f(x) f(y) \sum_0^n \sum_0^n \frac{\alpha_r - \alpha_s}{f'(\alpha_r) f'(\alpha_s)} \cdot \frac{\varphi(\alpha_r) \psi(\alpha_s) - \varphi(\alpha_s) \psi(\alpha_r)}{(x - \alpha_r)(x - \alpha_s)(y - \alpha_r)(y - \alpha_s)}.$$

Da questa espressione di $F(x, y)$ si deducono facilmente le:

$$(2) \quad \begin{cases} F(\alpha_r, \alpha_s) = F(\alpha_s, \alpha_r) = \frac{\varphi(\alpha_r) \psi(\alpha_s) - \varphi(\alpha_s) \psi(\alpha_r)}{\alpha_s - \alpha_r} \\ F(\alpha_r, \alpha_r) = - \sum_0^n \frac{f'(\alpha_r)}{f'(\alpha_s)} \cdot \frac{\varphi(\alpha_r) \psi(\alpha_s) - \varphi(\alpha_s) \psi(\alpha_r)}{\alpha_s - \alpha_r} = - \sum_0^n \frac{f'(\alpha_r)}{f'(\alpha_r)} F(\alpha_r, \alpha_s) \end{cases}$$

nell'ultima delle quali la sommatoria non comprende il termine per cui $s=r$. Ponendo:

$$(3) \quad \frac{\varphi(\alpha_r) \psi(\alpha_s) - \varphi(\alpha_s) \psi(\alpha_r)}{f'(\alpha_r) f'(\alpha_s) (\alpha_s - \alpha_r)} = (rs)$$

si avrà per la prima delle (2):

$$(rs) = \frac{F(\alpha_r, \alpha_s)}{f'(\alpha_r) f'(\alpha_s)}$$

e per la seconda:

$$(rr) = \frac{F(\alpha_r, \alpha_r)}{f'^2(\alpha_r)} = - \sum_0^n (rs)$$

ossia:

$$(r0) + (r1) + (r2) + \dots + (rn) = 0$$

per $r = 0, 1, 2, \dots n$.

3° Se nella equazione (1) poniamo

$$x_1 = y_1 = \alpha_1; \quad x_2 = y_2 = \alpha_2 \dots x_n = y_n = \alpha_n$$

od indichiamo con $\Pi(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n)$ la espressione:

$$(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1) \dots (\alpha_n - \alpha_{n-1})$$

si avrà:

$$\Delta \Pi^2(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n) = \sum [\pm F(\alpha_1, \alpha_1) F(\alpha_2, \alpha_2) \dots F(\alpha_n, \alpha_n)]$$

o sostituendo :

$$\Delta \Pi^2(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n) = f'^2(\alpha_1) f'^2(\alpha_2) \dots f'^2(\alpha_n) \sum [+ (11)(22) \dots (nn)]$$

e quindi :

$$\Delta = \Pi^2(\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_n) \sum [\pm (11)(22) \dots (nn)] ;$$

nella quale formola è contenuta la soluzione del problema.

Questa formola comprende quella di Eulero come caso particolare ; infatti supponendo che le $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ sieno le radici dell'equazione $\psi(x) = 0$ dalla (3) si ha $(rs) = 0$ per tutti i valori di r, s maggiori di zero e disuguali; quindi la (4) darà $(rr) = -(r0)$ e la formola superiore riducesi alla :

$$\Delta = (-1)^n \Pi^2(\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n) (10)(20) \dots (n0)$$

ed osservando che per la (3) supposto

$$\psi(x) = A(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)$$

si ha :

$$(r0) = A \frac{\varphi(\alpha_r)}{(\alpha_0 - \alpha_r) f'(\alpha_r)}, \quad (r > 0)$$

si otterrà la nota formola :

$$\Delta = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} A^n \varphi(\alpha_1) \varphi(\alpha_2) \dots \varphi(\alpha_n) .$$

PROF. F. BRIOSCHI.

PUBBLICAZIONI RECENTI

- SALMON — Lessons, Introductory to the Modern Higher Algebra. *Dublin*. 1859.
- LAMÉ — Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications. *Paris*. 1859.
- HERMITE — Sur la théorie des équations modulaires, et la résolution de l'équation du cinquième degré in 4°. *Paris*. 1859.
- DUPRÉ — Examen d'une proposition de Legendre relative a la théorie des nombres. in 8°. *Paris*. 1859.
- PLANA — Mémoire sur le mouvement du centre de gravité d'un corps solide lancé vers la terre, entre les centres de la lune, et de la terre supposés fixes immédiatement après l'impulsion in 4°. *Turin*. 1859.
- PLANA — Réflexions nouvelles sur deux mémoires de Lagrange publiés de en 1769 in 4°. *Turin*. 1859.