

## XXIII. Nachträgliche Studie über Symmetrielehre.

Von

**E. von Fedorow** in Moskau.

(Hierzu 3 Textfiguren.)

---

Ich bezeichne diese Studie als eine nachträgliche, um zu betonen, dass in derselben keine wesentlich neuen Resultate enthalten sind. Ueberhaupt scheinen die Elemente der Symmetrielehre endgültig aufgestellt zu sein, da von keiner Seite irgend ein Widerspruch geltend gemacht worden ist. Diejenigen Autoren, welche sich noch mit diesen Elementen befassen, richten alle ihre Aufmerksamkeit ausschliesslich auf die Form der Darstellung derselben. So haben wir z. B. ein Wort für das Symmetriecentrum im Sinne Bravais' gehört. In der allerletzten Zeit liessen sich noch Stimmen hören für den Vorzug des Hervortretenlassens der Symmetrieebenen als des leitenden Symmetrieelementes. Bei dieser Sachlage handelt es sich also nicht mehr um die principiellen, sondern nur um die feineren Fragen über die zweckmässigste, vollkommenste Darlegung dieser Lehre.

Auf den ersten Blick kann es den Anschein haben, als ob diese Frage in dem Bereiche der persönlichen Begutachtung resp. des Beliebens liege. Wenn man z. B. die Frage dahin stellen will, auf welche Weise die einfachste Darstellung zu Stande kommt, so wird die Willkür der Lösung derselben ganz augenscheinlich, da natürlich die Einfachheit und Leichtfasslichkeit für eine Person von deren geistiger Individualität, von der Summe der früher erworbenen Kenntnisse, endlich von zufälligen Umständen abhängt. In dieser Studie will ich aber zeigen, dass dem nicht ganz so ist, und dass es unter allen denkbaren Formen der Darstellung der Symmetrielehre eine giebt, welche unzweifelhaft den Vorzug vor allen anderen hat. Es scheint mir der Mühe werth, diese Frage speciell zu behandeln, da bei der richtigen Lösung derselben wir die besten Chancen erhalten, dass endlich allenthalben die sehr gewünschte Einigkeit in der Darstellung und Nomenclatur entsteht. Die Wichtigkeit dieser Einigkeit ist natürlich nicht zu unterschätzen; dieselbe ist von vornherein ganz klar.

Nun also entsteht die Frage, welche Darstellung als die vollkommenste zu bezeichnen ist. Auf Grund der Lösung dieser Frage stelle ich das Princip auf, dass die vollkommenste Form diejenige ist, welche allen Gesichtspunkten harmonisch Rechnung trägt; wenn wir bei dem Uebergange von Fragen dieser Lehre einerlei Art zu Fragen anderer Art keine wesentlichen Abänderungen und Umformungen in den Grunddefinitionen brauchen, so ist die betreffende Form vollkommener, als diejenige, für welche solche Abänderungen resp. Umformungen nothwendig sind.

Dieses Princip giebt uns das Mittel an die Hand, auf die Vollkommenheit der Form einen unzweideutigen Schluss zu ziehen.

Bei der Behandlung so feiner Fragen, wie die jetzt gestellte, müssen wir uns natürlich einer möglichst unanfechtbaren Position bemächtigen, und auf einem allgemeinsten Standpunkte Schlüsse fassen, welche von vornherein allgemein als die sichersten angenommen werden müssen.

Nun aber haben wir es hier mit geometrischen Gebilden zu thun, und die vollkommenste Sprache, welche die Geschichte der Wissenschaft hierfür ausgearbeitet hat, ist die mathematische Analyse. Bei der gewöhnlichen Sprache, sogar bei synthetischer und constructioneller Behandlung der hierzu gehörigen Fragen, stehen wir immer in Gefahr, infolge der Unvollkommenheit der Ausdrücke resp. infolge der nicht allseitigen Schätzung der hervorgebrachten Constructionen einen Fehler resp. eine Inconsequenz zu begehen. Können wir aber die Fragen in der Form analytischer Gleichungen auflösen, so bleibt keine Spur eines Beliebens, einer rein persönlichen Intuition, übrig.

Gerade im vorliegenden Falle können wir dieses bewährteste Mittel als richtigen Wegweiser zu Hülfe nehmen.

Jede Symmetrieart kann durch analytische Gleichungen ausgedrückt werden. Wie auch die Symmetrieelemente aufgefasst werden, immer müssen die Gleichungen der Symmetriearten eine Anzahl charakteristischer Parameter enthalten, welche nur einen analytischen Ausdruck der angenommenen Symmetrieelemente darstellen, und deren Zähligkeit die Zähligkeit dieser Elemente ist.

Sind die Gleichungen einer Symmetrieart aufgestellt, so ist vorerst daraus unmittelbar die Symmetriegrösse abzulesen. Dieselbe ist nämlich dem Producte der Zähligkeiten der Parameter gleich. Dies ist selbstverständlich; sind z. B. in einer Gleichung zwei zweizählige und ein dreizähliger Parameter enthalten, so drückt dieselbe eine Symmetrieart mit der Grösse 12 aus.

Aus dieser einfachen Ueberlegung ist aber schon ein sehr wichtiger Schluss zu ziehen, dass nämlich die Zähligkeiten der angenommenen Parameter nur die Factoren der betreffenden Symmetriegrössen sein können.

Diejenigen Symmetrieelemente, welche direct durch entsprechende Parameter ausgedrückt werden, werden primitive genannt, und die Gesamtheit derselben, welche durch die Parameter der Gleichung vertreten sind, wird als eine vollständige Combination derselben bezeichnet.

Wir ziehen also daraus den bestimmten Schluss, dass die primitiven Symmetrieelemente nur aus solchen ausgewählt werden können, deren Zähligkeit ein Factor der Symmetriegrösse ist.

Um so mehr ist der Schluss nothwendig, dass unter den Symmetrieelementen nur solche auftreten können, deren Zähligkeit ein Factor der Symmetriegrösse ist.

Nun aber sind unter den Symmetriegrössen solche mit beliebigen einfachen Factoren vorhanden, also 2, 3, 5, 7 u. s. w. Die Symmetrieebenen sind aber zweizählig. Also können die Symmetrieebenen keineswegs allein als Symmetrieelemente auftreten.

Die zusammengesetzte Symmetrie ist nothwendig von gerader Zähligkeit. Folglich kann auch die zusammengesetzte Symmetrie keineswegs allein als Symmetrieelement auftreten.

Dass die Symmetrieaxen nicht die einzigen Symmetrieelemente sein können, ist selbstverständlich, da dieselben nur einen Theil der symmetrischen Deckungen bedingen, nur als Elemente der Decksymmetrie auftreten.

Da aber die Symmetrieaxen, wie auch die Symmetrieebenen und die zusammengesetzte Symmetrie auch allein ohne Combination mit anderen Symmetrieelementen auftreten können, so sind also diese sämtlichen Symmetrieelemente nothwendig als solche anzunehmen.

Manche Autoren stellen noch das Inversionscentrum (von Manchen unbegreiflicherweise unrichtig Symmetriecentrum<sup>1)</sup> genannt) in den Rang eines besonderen Symmetrieelementes. Weiterhin wird dieser Standpunkt umständlich besprochen.

Dass die Symmetrieebenen und Symmetrieaxen als Symmetrieelemente nur auf eine Weise, ganz eindeutig, aufzufassen sind, ist nicht weiter zu besprechen. Was aber die zusammengesetzte Symmetrie anbetrifft, so kann dieselbe ihrem Wesen nach auf verschiedene Weise aufgefasst werden.

Nach einer Auffassung ist dieselbe als ein Symmetrieelement, die gleichzeitige Combination einer Symmetrieaxe und einer Symmetrieebene. Dabei

---

1) Ich habe schon mehrfach darauf aufmerksam gemacht, dass der Begriff des Inversionscentrums sogar nicht der Symmetrielehre, sondern der Aehnlichkeitslehre angehört und in geschichtlicher Hinsicht unermesslich älter ist, als die Symmetrielehre selbst. Das »Symmetriecentrum« ist aber in der Symmetrielehre ein ganz anderer, durch kein anderes Wort zu ersetzender Begriff, und für einen Autor in diesen speziellen Fragen ist es ganz unentbehrlich, sehr oft mit diesem Worte und Begriffe zu operiren.

lässt sich beweisen, dass die Ebene der zusammengesetzten Symmetrie zur Axe derselben nur senkrecht stehen kann. Da aber eine Symmetrieebene auch allein auftreten kann, so ist dieser Begriff durch keine neu eingeführten, mehr oder weniger willkürlichen Begriffe complicirt.

Nach einer anderen Auffassung benutzt man hierzu ein neues Symmetrieelement, das »Inversionscentrum«. Bei dieser Auffassung giebt es also ebenso Symmetrieelemente dreierlei Art: Symmetrieebenen, Inversionscentrum und zusammengesetzte Symmetrie. Die Symmetrieebene ist bei dieser Auffassung kein Symmetrieelement mehr, sondern der einfachste Fall der zusammengesetzten Symmetrie, und zwar der der zweizähligen Axe der zusammengesetzten Symmetrie.

Diese Auffassung stimmt mit der vorigen für die Fälle der  $4p$ -zähligen Axen der zusammengesetzten Symmetrie überein und unterscheidet sich davon in den Fällen der  $2p$ -zähligen Axen der zusammengesetzten Symmetrie ( $p = \text{ungerade Zahl}$ ). Für die letzten Fälle haben wir der vorigen Auffassung gemäss die einfache Combination einer  $p$ -zähligen Symmetrieebene mit einer dazu senkrechten Symmetrieebene, und keine zusammengesetzte Symmetrie.

Von abstractem Standpunkte aus sind die beiden Auffassungen gleichberechtigt.

Von dem Standpunkte der bildlichen Vorstellung im Geiste scheint mir unzweifelhaft die erste Auffassung den Vorzug zu verdienen, da es nicht individuelle, sondern allgemeine Eigenschaft des Menschen ist, die Spiegelung in der Symmetrieebene sich einfacher vorzustellen, als die Inversion. Stelle man sich z. B. die sechszählige Axe der zusammengesetzten Symmetrie vor, so kommt man anstatt zu der leicht fasslichen Combination der dreizähligen Symmetrieebene mit einer dazu senkrechten Symmetrieebene zu einer complicirteren Vorstellung, welche sogar für einen geübten Geist nicht ohne Anstrengung zu Stande kommt.

Dasselbe gilt auch für die graphische Darstellung derselben und anderer Symmetriearten. Anstatt der sehr anschaulichen Combination der Symmetrieebene und Symmetrieebene müssen wir jetzt die sechszählige Axe der zusammengesetzten Symmetrie zeichnen. In anderen Fällen müssen wir noch ein Zeichen für das Inversionscentrum besitzen.

Endlich kommen die Vorzüge der vorigen und Nachtheile der zuletzt betrachteten Auffassung noch schärfer zum Ausdrucke bei der analytischen Darstellung durch Gleichungen.

Nach voriger Auffassung besitzen wir für die (zur Axe  $x_2$  senkrechte) Symmetrieebene den Ausdruck:  $x_1 = a_1$ ;  $x_2 = \pm a_2$ ;  $x_3 = a_3$ , oder  $x_1 = a_1$ ;  $x_2 = n^k a_2$ ;  $x_3 = a_3$ , wo  $n = -1$  und  $k$  eine Zahl 0 oder 1 ist, und für das Inversionscentrum:  $x_1 = n^k a_1$ ;  $x_2 = n^k a_2$ ;  $x_3 = n^k a_3$ .

Der jetzt betrachteten Auffassung gemäss muss die zweite Gleichung

das Element, also das einfachste Ding, ausdrücken, während die erste, einfachere Gleichung die Combination desselben Elementes mit der Symmetrieaxe darstellen muss.

Daraus ersieht man am besten, dass der Nachtheil der anderen Auffassung darin besteht, dass man für das einfachste Ding das complicirtere annimmt, und umgekehrt das einfachste Ding als eine Combination der complicirteren Dinge unter sich auffasst.

Um diese Anomalie der betreffenden Auffassung noch klarer hervortreten zu lassen, nehmen wir noch ein paar Beispiele.

Bei der ersten Auffassung wird eine  $2p$ -zählige Axe der zusammengesetzten Symmetrie durch die Gleichungen

$$y = n^{\pi}b; y_0 = b_{\pi}^{2p}; y_1 = b_{\pi+1}^{2p}$$

ausgedrückt; also die sechszählige Axe durch

$$y = n^{\pi}b; y_0 = b_{\pi}^6; y_1 = b_{\pi+1}^6,$$

und die Combination der dreizähligen Symmetrieaxe mit der dazu senkrechten Symmetrieebene durch:

$$y = n^{\chi}b; y_0 = b_v^3; y_1 = b_{v+1}^3$$

Dieselben Symmetriearten werden nach der anderen Auffassung resp. durch die Gleichungen

$$y = n^{\pi}b; y_0 = n^{\pi}b_{\pi}^{2p}; y_1 = n^{\pi}b_{\pi+1}^{2p}$$

$$y = n^{\sigma}b; y_0 = n^{\sigma}b_v^3; y_1 = n^{\sigma}b_{v+1}^3$$

$$y = n^{\pi}b; y_0 = n^{\pi}b_{\pi}^6; y_1 = n^{\sigma}b_{\pi+1}^6$$

ausgedrückt, in denen  $\pi$  der zusammengesetzten Symmetrie,  $v$  der (verticalen) Symmetrieaxe und  $\sigma$  dem Inversionscentrum (z. Symmetrieebene) entspricht.

Die rhomboprismatische Symmetrie wird durch

$$y = n^v b; \quad z = n^{\chi} c; \quad v = n^v d \quad \text{respective durch}$$

$$y = n^{v+\sigma} b; \quad z = n^{\sigma} c; \quad v = n^{v+\sigma} d \quad \text{ausgedrückt.}$$

In allen Fällen führt also die zweite Auffassung stets zu complicirteren und niemals zu einfacheren Resultaten. Ist das nicht genügend, um über die Vortheile resp. Nachtheile dieser beiden Auffassungen einen endgültigen Schluss zu fassen, und zwar zu Ungunsten der zweiten?

Jedenfalls kann die zweite Auffassung den Standpunkt Bravais' und seine Symmetrieelemente nicht aufrecht erhalten; was falsch ist, das kann durch keine Complication richtig gemacht werden.

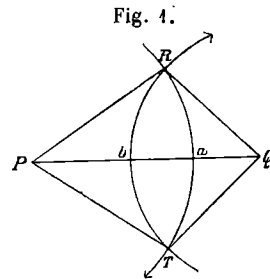
Die vorhergehenden Betrachtungen haben uns also zu dem Schlusse geführt: a) dass es ganz unmöglich erscheint, die Symmetrieebenen und deren zusammengesetzte Combinationen allein als Symmetrieelemente zu betrachten, und b) dass die Auffassung der Symmetrieaxen, Symmetrie-

ebenen und der zusammengesetzten Symmetrie als Symmetrieelemente in jeder Hinsicht derjenigen vorzuziehen ist, nach welcher Symmetrieebenen, Inversionscentrum und zusammengesetzte Symmetrie (anders definiert) die Symmetrieelemente sind. Der letzte Schluss verstärkt sich noch mehr durch die Versuche, die Symmetrieebenen in den Vordergrund treten zu lassen.

Jetzt wollen wir die Frage über die zulässigen primitiven Symmetrieelemente der vollständigen Combination (für eine Symmetriearart) näher studieren.

Im Grunde aller Betrachtungen dieser Art steht der Euler'sche Satz über die Zusammensetzung der Drehbewegungen. Da ich aber den Beweis dieses Satzes, trotz seiner grundlegenden Bedeutung, in keinem krystallographischen Werke treffe, trotz der Einfachheit dieses Beweises, so erlaube ich mir hier denselben in der speciellen Form zu reproduciren, wie derselbe stets in der Krystallographie zur Anwendung kommt.

Es sei (Fig. 4)  $P$  der Polpunkt einer und  $Q$  der einer anderen unabhängigen Symmetriearte (auf der Sphäre). Nun ist selbstverständlich, dass die zusammengesetzte Drehung, um die charakteristischen Winkel der beiden Axen zugleich, sich von den einzelnen Drehbewegungen unterscheidet; diese zusammengesetzte Drehung muss als eine Drehung um eine dritte resultirende Axe  $R$  aufgefasst werden. Der Drehungssinn sei durch Pfeile angedeutet.



Bei der Drehung um  $P$  muss der Punkt  $R$  auf der Sphäre einen Kleinkreis  $RaT$  beschreiben, für welchen  $P$  das Centrum ist. Ist  $R$  wirklich der Polpunkt der resultirenden Axe, so muss die zweite Drehung um  $Q$  denselben Punkt an seine anfängliche Stelle zurückführen. Da aber bei dieser zweiten Drehung der Punkt einen Kleinkreis beschreibt, dessen Centrum  $Q$  ist, so muss derselbe Punkt sich auf dem Kleinkreise  $QbT$  befinden. Der Punkt muss also zugleich beiden Kleinkreisen angehören. Da aber die letzteren nur zwei Punkte gemein haben, von welchen einer der Punkt  $R$  ist, so kann der zweite Punkt nur der Punkt  $T$  sein.

Sind also ausschliesslich die Lagen der unabhängigen Symmetrieebenen (resp. die von ihnen gebildeten Winkel) bekannt, so werden dadurch auch die elementaren Drehungswinkel  $RPT$  und  $RQT$  eindeutig und streng bestimmt. Somit besteht zwischen der Lage und der Zähligkeit zweier Symmetrieebenen eine sehr einfache Relation. Ist die Axe  $P$   $p$ -zählig und die Axe  $Q$   $q$ -zählig, so ist der Winkel  $RPT$  gleich  $2\pi/p$ , und der Winkel  $RQT$  gleich  $2\pi/q$ ; folglich sind in dem sphärischen Dreieck  $PQR$  der Winkel  $RPQ$  gleich  $\pi/p$  und der Winkel  $PQR$  gleich  $\pi/q$ .

Wollen wir jetzt zu beiden Bewegungen um  $P$  und um  $Q$  noch eine dritte Bewegung um  $Q$  hinzufügen mit demselben Drehungswinkel, aber in der entgegengesetzten Richtung, so wird natürlich dadurch die Drehbewegung um  $Q$  eliminirt, und es bleibt nur die Drehbewegung um  $P$  übrig. Aber dieselben drei Drehbewegungen können wir als die zusammengesetzte Drehbewegung um  $R$  (die resultirende der beiden ersten Bewegungen) und die Drehbewegung um  $Q$  (in entgegengesetzter Richtung) auffassen, und erhalten als resultirende Symmetrieaxe die Axe  $P$ . Daraus schliessen wir, dass auch der Winkel  $PRQ$  der charakteristische für die Axe  $R$  ist. Ist die Zähligkeit derselben  $r$ , so ist dieser Winkel gleich  $\pi/r$ .

Natürlich ist mit demselben Rechte auch die Axe  $T$  als die resultirende aufzufassen. Für dieselbe ist entweder die Drehung um  $Q$  als die erste und die Drehung um  $P$  als die zweite vorauszusetzen oder die beiden Drehungen entgegengesetzt anzunehmen.

Auf Grund dieses Satzes sind die Lagen zweier unabhängiger Symmetrieaxen ganz genügend, um die betreffende Art der Decksymmetrie vollständig zu bestimmen. Die Frage kann auf graphischem Wege mittelst Construction<sup>1)</sup> der sphärischen Dreiecke gelöst werden. Die Symmetriegrösse lässt sich noch einfacher finden. Dazu braucht man nur die Grösse des Trionoëders  $PQR$  zu bestimmen. Dieselbe ist aber bekanntlich

$$G = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{p} + \frac{\pi}{q} + \frac{\pi}{r} \right) - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - 1 \right).$$

Also die Symmetriegrösse  $S$

$$S = \pi/G = \frac{2}{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - 1}.$$

Z. B. für die Symmetrie des Quarzes haben wir  $p = 3$ ,  $q = 2$ ,  $r = 2$ ; folglich  $S = 6$ .

Für die Symmetrie des Bertholet'schen Salzes ist  $p = 3$ ,  $q = 3$ ,  $r = 2$ ; folglich  $S = 12$  u. s. w.

Ist keine Symmetrie vorhanden, so sind  $p = 1$ ,  $q = 1$ ,  $r = 1$ ; folglich  $S = 1$ .

Wir können natürlich auch die Symmetrieaxen mit Symmetrieebenen sich zusammensetzen lassen. Ist die Symmetrieaxe zur Symmetrieebene senkrecht, so kann das resultirende Symmetrieelement als zusammengesetzte Symmetrie aufgefasst werden. Sind dieselben aber untereinander

<sup>1)</sup> Bei dieser Construction ist aber vorausgesetzt, dass die Winkel  $RPT$  und  $RQT$  kleiner sind als  $\pi$ ; folglich kommt dieselbe nur für den Fall der mehr als zweizähligen Symmetrieaxen zur Anwendung. Falls eine Axe, z. B.  $Q$ , zweizählig ist, wird der Kleinkreis  $RQT$  zu einem Grosskreise, welcher durch  $Q$  hindurchgeht, und die Axe  $P$  muss also zur Axe  $Q$  senkrecht stehen.

nicht senkrecht, so kann das Resultat der Zusammensetzung durch kein Symmetrieelement vertreten werden. Sind trotzdem eine Symmetrieebene und eine zu ihr nicht senkrechte Symmetrieaxe als unabhängige Symmetrieelemente gegeben, so wird dadurch die Symmetrieart eindeutig bestimmt; und zwar erhalten wir infolge der Spiegelung in der Symmetrieebene so gleich eine andere Symmetrieaxe, und dann bestimmen die beiden Axen nach oben Gesagtem die Symmetrieart eindeutig; nur müssen noch die Symmetrieebenen in Betracht gezogen werden. Dadurch wird auch die Symmetriegrösse verdoppelt.

Ist die Zähligkeit der Symmetrieaxe bekannt, so lässt sich dasselbe Resultat durch Drehung der Symmetrieebene um den für die Axe charakteristischen Winkel erzielen, indem der Winkel zwischen den Symmetrieebenen eindeutig die Zähligkeit der Symmetrieaxe bestimmt, welche als Schnittgerade der Symmetrieebenen entsteht.

Endlich setzen sich zwei, einander unter dem Winkel  $\pi/p$  schneidende Symmetrieebenen einem bekannten Satze zufolge zu einer  $p$ -zähligen Symmetrieaxe zusammen.

Auch lässt sich die zusammengesetzte Symmetrie mit anderen Symmetrieelementen zusammensetzen. Aber in der Frage der Bestimmung der Symmetriearten durch zwei unabhängige Symmetrieelemente spielt diese Zusammensetzung keine Rolle, da entweder eine Axe der zusammengesetzten Symmetrie für sich allein die Symmetrieart bestimmt, oder die letztere durch entsprechende Symmetrieebenen und Symmetrieaxen eindeutig bestimmt werden kann.

Welche zwei Symmetrieelemente aber auch als unabhängige und die Symmetrieart bestimmende angenommen werden, immer wird dadurch eine Gesamtheit von resultirenden Symmetrieelementen bestimmt, welche die betreffende Symmetrieart eindeutig charakterisirt. Dabei können wir die unmittelbar abzuleitenden resultirenden Symmetrieelemente und solche, welche schon mit Hülfe der letzteren abzuleiten sind, zur Anwendung bringen.

Um sich von der erhaltenen Symmetrieart ganz klare Einsicht zu verschaffen, ist jetzt nöthig, unter der Gesamtheit der Symmetrieelemente die primitiven auszulesen. Bei dieser Auslese sind folgende Sätze maassgebend und leitend.

**Satz 4.** Das Product der Zähligkeit der primitiven Symmetrieelemente ist der Symmetriegrösse gleich.

Dieser Satz ist schon oben bewiesen worden, indem dort gezeigt wurde, dass die Zähligkeit der primitiven Axen der Zähligkeit der entsprechenden Parameter der Gleichungen der Symmetrie entspricht, und nun geben diese Gleichungen die Zahl der symmetrisch-gleichen Richtungen, welche dem Producte der Zähligkeit der Parameter gleich ist.



Satz 2. Sämmtliche Symmetrieelemente der gegebenen Symmetrieart sind die, unmittelbar aus den primitiven abzuleitenden, resultirenden Symmetrieelemente.

Jeder symmetrischen Deckbewegung entspricht in den Gleichungen der Symmetrie die Aenderung der Zahl eines oder verschiedener Parameter. Da aber jede solche Aenderung, einzeln genommen, einer einem primitiven Symmetrieelemente zugehörenden Deckbewegung entspricht, andererseits aber jede zusammengesetzte Deckbewegung einem Symmetrieelemente entspricht, welches durch keinen Parameter in den Gleichungen vertreten ist, so kann dasselbe nur unmittelbar durch eine Anzahl der symmetrischen, den primitiven Elementen gehörenden Deckbewegungen abgeleitet werden.

Satz 3. Unter den primitiven Symmetrieelementen können sich keine solchen befinden, welche aus anderen primitiven resultiren können.

Wäre dies der Fall, so würden solche nichts Neues mit sich bringen, und sämmtliche andere Symmetrieelemente, damit aber auch andere symmetrische Deckbewegungen könnten durch primitive Symmetrieelemente ohne Zuhülfenahme des betreffenden abgeleitet werden. Da aber die Anzahl dieser Deckbewegungen, zugleich also die Symmetriegrösse, dem Producte der Zähligkeiten der primitiven Symmetrieelemente gleich ist, so ist eine solche Annahme unzulässig, da durch Beseitigung eines primitiven Symmetrieelementes auch die Symmetriegrösse um die entsprechende Anzahl vermindert wird, und folglich nicht alle  $S$  symmetrische Deckbewegungen zu Stande kommen können.

Diese Sätze mögen genügen, um die Auswahl der primitiven Symmetrieelemente überhaupt und die beste im Besonderen vollziehen zu können.

Zuerst wollen wir uns der Betrachtung der Decksymmetriearten zuwenden.

Unter diesen sind wieder die Symmetriearten der unendlichen Reihen und dann die der regulären geometrischen Systeme besonders zu untersuchen.

Für die Symmetriearten der Reihensysteme ist nur ein Fall einer (verticalen)  $p$ -zähligen Symmetrieaxe und  $p$  zu ihr senkrechter (horizontaler) zweizähliger Symmetrieaxen zu besprechen.

Die Symmetriegrösse  $S = 2p$ , wo  $p$  eine ungerade wie auch eine gerade Zahl sein kann. In dem ersten Falle ist natürlich nur eine einzige Annahme zulässig: die primitiven Axen müssen eine  $p$ -zählige und eine zweizählige Axe sein. In dem zweiten Falle entsteht eine Zweideutigkeit. Wenn z. B.  $p = 2^k \cdot q$ , so ist es möglich, als primitive Axen eine  $q$ -zählige und ausser der einen erwähnten noch  $k$  zweizählige Axen anzunehmen. Dass dies wirklich annehmbar ist, ist sehr leicht auf constructionellem Wege einzusehen. Die letzte Annahme erscheint aber in dem Sinne nicht empfehlenswerth, dass dadurch die Allgemeinheit gebrochen wird, und jeder

specielle Fall wäre dann besonders zu besprechen und die Möglichkeiten zu erwägen, was durch die allgemeine Annahme der  $p$ - und zweizähligen Axen ganz vermieden wird.

Der Deutlichkeit wegen besprechen wir einen Fall näher, z. B. den der Symmetrie des Quarzes. Für diesen ist  $p = 3$ , also der Parameter  $v$  dreizählig, und zwar ist  $v$  gleich 0, 1 und 2 zu setzen; erhält man  $v = 3$ , so ist dies mit  $v = 0$  identisch (Formel:  $y = n^h b$ ;  $y_0 = b_v$ ;  $y_1 = b_{v+n^h}$ ).

Nehmen wir also einen Punkt:  $y = b$ ,  $y_0 = b_0$ ,  $y_1 = b_1$ . Die Drehung um die verticale Axe allein ergibt daraus drei Punkte, und zwar noch:

$$y = b; y_0 = b_1; y_1 = b_2 \\ \text{und } y = b; y_0 = b_2; y_1 = b_0.$$

Die Coordinate  $b_2$ , welche nicht von vornherein gegeben ist, lässt sich aber sehr leicht nach der allgemeinen Formel

$$y_2 \triangle = y \sin (y_2 y_0 y_1) + y_0 \sin (y y_2 y_1) + y_1 \sin (y y_0 y_2)$$

berechnen, wo  $\sin (abc)$  die Sinusfunction des Trigonöders  $(abc)$  bezeichnet, und  $\triangle = \sin (y y_0 y_1)$ . Die Axen  $y_0$ ,  $y_1$ ,  $y_2$  sind drei horizontale, einander unter dem Winkel  $120^\circ$  schneidende Coordinatenaxen, und die Axe  $y$  ist die verticale. Folglich:

$$\begin{aligned} \triangle = \sin (y y_0 y_1) &= \sin (120^\circ) \cos (0^\circ) = \sin (60^\circ) \\ \sin (y_2 y_0 y_1) &= \sin (120^\circ) \cos (90^\circ) = 0 \\ \sin (y y_2 y_1) &= -\sin (120^\circ) \cos (0^\circ) = -\sin (60^\circ) \\ \sin (y y_0 y_2) &= -\sin (120^\circ) \cos (0^\circ) = -\sin (60^\circ). \end{aligned}$$

Also  $y_2 = -(y_0 + y_1)$ , auch  $b_2 = -(a_0 + a_1)$ .

Für die Drehung um die gegebenen, primitiven, zweizähligen Symmetrieaxen müssen wir  $v = 0$ ,  $h = 1$  setzen.

Also erhalten wir den Punkt  $y = -b$ ;  $y_0 = b_0$ ;  $y_1 = b_2$ .

Für die Drehung um eine andere zweizählige Symmetrieaxe setzen wir  $v = 1$ ,  $h = 1$  und erhalten den Punkt

$$y = -b; y_0 = b_1; y_1 = b_0.$$

Endlich für die Drehung um die dritte, übrig bleibende, zweizählige Symmetrieaxe setzen wir  $v = 2$ ,  $h = 1$  und erhalten den Punkt

$$y = -b; y_0 = b_2; y_1 = b_1.$$

Somit sind mit voller Klarheit sämmtliche symmetrische Drehbewegungen ebenso wie die resultirenden Symmetrieaxen hervorgetreten.

Was speciell das digonale System betrifft, so sind diese allgemeinen Gleichungen der Symmetrie nicht mehr zutreffend und sind durch Gleichungen anderer Form zu ersetzen.

Für den Fall der Symmetrie des Bittersalzes (der rhombosphenödrischen) erhalten wir, wenn wir als primitive Symmetrieaxen eine verticale mit dem

Parameter  $v$  und eine horizontale mit dem Parameter  $h$  nehmen, die Gleichungen

$$y = n^h b; \quad z = n^v c; \quad v = n^{h+v} d,$$

wo  $y$  die verticale Coordinatenaxe und  $z$  diejenige horizontale Axe ist, welche zugleich zweizählige Symmetrieaxe ist.

Diese Gleichungen lassen aus einem gegebenen Punkte:  $y = b; z = c; v = d$  noch folgende drei ableiten:

Für die Drehung um die verticale Axe  $v$  setzen wir  $v = 1, h = 0$ ; also  $y = b; z = -c; v = -d$ .

Für die Drehung um die horizontale Axe  $h$  ( $z$ ) setzen wir  $v = 0, h = 1$ ; also  $y = -b; z = c; v = -d$ .

Endlich für die Drehung um die resultirende (horizontale) Axe setzen wir  $v = 1, h = 1$  und erhalten den Punkt

$$y = -b; \quad z = -c; \quad v = d.$$

Unter den Decksymmetriearten der regulären Systeme sind nur zwei in Betracht zu ziehen, und zwar die tetartoëdrische (trigonalpentagonoëdrische) und die gyroëdrische (tetragonalpentagonoëdrische).

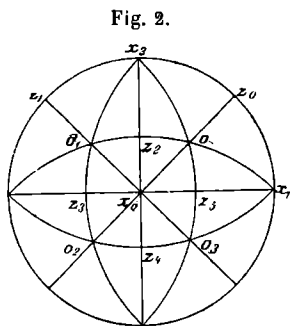
Die Symmetriegrösse für die erste ist  $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ .

Also schliessen wir direct, dass sich unter den primitiven Symmetrieaxen eine dreizählige und zwei zweizählige Symmetrieaxen befinden müssen; in der Auswahl bleibt also keine Willkür resp. kein Belieben.

Die Symmetrie wird durch die Gleichungen

$$x_0 = n^v a_0; \quad x_1 = n^{h+v} a_{0+1}; \quad x_2 = n^h a_{0+2} \quad \text{ausgedrückt.}$$

Hier bezieht sich der Parameter  $o$  auf die dreizählige Symmetrieaxe und ist selbst dreizählig. Der Parameter  $v$  bezieht sich auf die zweizählige verticale Axe  $x_2$ , und der Parameter  $h$  auf die zweizählige horizontale Axe  $x_0$ .



Die resultirende dritte Axe  $x_1$  kommt zum Vorschein, wenn man  $v = 1, h = 1$  setzt, und dabei  $o = 0$  (Fig. 2).

Die anderen resultirenden Axen sind die dreizähligen Symmetrieaxen  $o_1, o_2$  und  $o_3$ . Jeder derselben gehören je zwei ergänzende Drehbewegungen an, zusammengenommen sechs Bewegungen, welche durch die Voraussetzungen:

$$\begin{aligned} o = 1; \quad 1) \quad v = 1, h = 0; \quad 2) \quad v = 0, h = 1; \quad 3) \quad v = 1; \quad h = 1 \\ o = 2; \quad 4) \quad v = 1, h = 0; \quad 5) \quad v = 0, h = 1; \quad 6) \quad v = 1; \quad h = 1 \end{aligned}$$

sich zu Stande bringen lassen. Für diese sechs Punkte erhalten wir also folgende Coordinaten:

- 1)  $x_0 = -a_1$ ;  $x_1 = -a_2$ ;  $x_2 = a_0$ ; 2)  $x_0 = a_1$ ;  $x_1 = -a_2$ ;  $x_2 = -a_0$ ;  
 3)  $x_0 = -a_1$ ;  $x_1 = a_2$ ;  $x_2 = -a_0$ ; 4)  $x_0 = -a_2$ ;  $x_1 = -a_0$ ;  $x_2 = a_1$ ;  
 5)  $x_0 = a_2$ ;  $x_1 = -a_0$ ;  $x_2 = -a_1$ ; 6)  $x_0 = -a_2$ ;  $x_1 = a_0$ ;  $x_2 = -a_1$ .

Daraus ersieht man leicht, dass die Punkte 1 und 5 zu den Drehbewegungen um die Axe  $o_1$ , die Punkte 3 und 4 zu denselben um die Axe  $o_2$  und die Punkte 2 und 6 zu denselben um die Axe  $o_3$  gehören.

Die Symmetriegrösse der gyrödrischen Symmetrie ist  $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2 \cdot 3 \cdot 4$ . Daraus ist ersichtlich, dass die Auswahl der primitiven Axen nicht mehr eindeutig ist; nur das Eine steht von vornherein fest, dass eine und nur eine dieser Axen die dreizählige Symmetrieaxe sein muss.

Und in der That ist ganz augenscheinlich, dass für diese Axen wir z. B. die Axe  $o$  und zwei Axen  $x$  nehmen können, und dann ist ganz beliebig als die vierte primitive Symmetrieaxe eine der Axen  $z$  auszuwählen, oder ausser der Axe  $o$  können wir eine der zu ihr senkrechten Axen  $z_1$ ,  $z_3$  oder  $z_4$  wählen; als resultirende Axen erhalten wir alle drei, und nur dieselben; dann bleibt noch übrig, unter den anderen Axen eine vierzählige oder zwei zweizählige auszuwählen. Dass die erste Auswahl gut zulässig ist, ersieht man schon daraus, dass, wenn wir umgekehrt zuerst eine vierzählige Axe  $x_0$  und eine zu ihr senkrechte zweizählige Axe  $z_0$  oder  $z_1$  auswählen, und dann diesen Symmetrieelementen noch eine beliebige dreizählige Symmetrieaxe hinzufügen, wir die vollständige Combination erhalten.

Bei der letzten Auffassung können wir zwei Unterfälle unterscheiden, und zwar denjenigen, für welchen die zur Axe  $o$  und vierzähligen Axe  $x$  bezugegebende Axe eine der zur Axe  $x$  senkrechten Axen  $x$  oder  $z$  ist.

Nun ist leicht zu beweisen, dass allein eben diese beiden Auffassungen zulässig sind.

Dieselben haben gemein, dass ausser der Axe  $o$  eine der Axen  $x$  als eine zweizählige primitive Axe angenommen wird, und gerade diese Annahme erscheint als eine nothwendige. Wäre dem nicht so, so hätten wir ausser  $o$  drei der Axen  $z$  als die primitiven auswählen müssen. Dabei kann unter ihnen nur eine zu  $o$  senkrechte Axe sein, die anderen zwei erweisen sich als die resultirenden; bei dieser Annahme erscheint es nothwendig, wenigstens zwei zur Axe  $o$  schief stehende Axen als die primitiven auszuwählen. Dies ist aber auf Grund des Satzes 3 unmöglich, da aus denselben bei der Zusammensetzung der resultirenden Axen (was sehr einfach auf graphischem Wege vor sich geht) die dritte schiefe Axe  $z$  ebenso wie eine der senkrechten Axen  $z$  entsteht. Es ist also ganz unentbehrlich, eine der Axen  $x$  und zwar mindestens als eine zweizählige primitive Axe zu wählen.

Nehmen wir dieselbe als eine vierzählige Symmetrieaxe, so erhalten wir die zweite Annahme.

Nehmen wir dieselbe als eine zweizählige Axe und fügen hierzu

beliebig eine der Axen  $z$ , so kommen wir zur ersten Annahme, und dabei wird nothwendig, noch die zweite Axe  $x$  als eine zweizählige hinzuzufügen.

Die letzte mögliche Voraussetzung ist die Annahme zweier zweizähliger Axen  $x$ , und diese erscheint mit der vorigen identisch.

Für die gyroëdrische Symmetrieart sind also zwei und nur zwei wesentlich verschiedene Annahmen zulässig:

1) die primitiven Axen sind ausser der Axe  $o$  eine vierzählige Axe  $x$  und eine beliebige zu derselben senkrechte zweizählige Axe  $x$  oder  $z$ ;

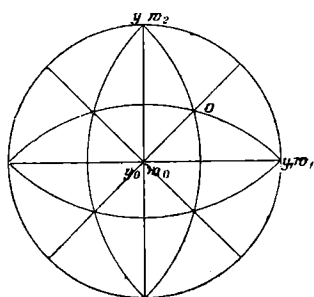
2) die primitiven Axen sind ausser der Axe  $o$  zwei zweizählige Axen  $x$  und eine beliebige Axe  $z$ .

Glücklicherweise lässt sich auch auf die Frage, welcher von diesen beiden Auffassungen der Vorzug zu geben ist, eine bestimmte Antwort erhalten.

Nehmen wir der zweiten Auffassung gemäss als die primitiven Axen die zweizählige Axe  $x_2$  mit dem Parameter  $v$ , die Axe  $x_0$  mit dem Parameter  $h$  und die Axe  $x_5$  mit dem Parameter  $d$  und für die dreizählige primitive Symmetrieaxe die Axe  $o$ , so erhalten wir als die Gleichungen dieser Symmetrieart:

$$x_0 = n^v a_0^3; \quad x_1 = n^{h+v} a_{0+n}^3; \quad x_2 = n^{h+d} a_{0+2n}^3, \quad (A)$$

Fig. 3.



aus welchen die zugehörige Gesamtheit der Coordinaten am einfachsten zu ersehen ist.

Wenden wir uns jetzt der ersten Auffassung zu und nehmen als die primitiven Symmetrieebenen die vertikale vierzählige Axe  $y$  mit dem Parameter  $v$ , die zweizählige horizontale Symmetrieaxe  $y_0$  mit dem Parameter  $h$ , und die dreizählige Axe  $o$  mit dem Parameter  $t$  (Fig. 3), so kommen wir zu den entsprechenden Symmetriegleichungen auf Grund folgender Formel:

$$(4) \quad y = n^h b; \quad y_0 = b_v; \quad y_1 = b_{v+n^h}$$

und, indem wir in Bezug auf die Axe  $o$  die Axe  $y_0$  als die Coordinatenaxe  $w_0$ , die Axe  $y_1$  als  $w_1$  und die Axe  $y$  als  $w_2$  bezeichnen, so erhalten wir ferner:

$$(2) \quad w_0 = w_t^3; \quad w_1 = w_{t+1}^3; \quad w_2 = w_{t+2}^3.$$

Nun aber haben wir noch:

$$\begin{aligned} y_v \sin(y y_0 y_1) &= y \sin(y_v y_0 y_1) + y_0 \sin(y y_v y_1) + y_1 \sin(y y_0 y_v) \\ &= 0 + y_0 \sin(y_v y_1) + y_1 \sin(y_0 y_v) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} w_t \sin(w_0 w_1 w_2) &= w_0 \sin(w_t w_1 w_2) + w_1 \sin(w_0 w_t w_2) + w_2 \sin(w_0 w_1 w_t) \\ &= w_t = w_0 \cos(w_t w_0) + w_1 \cos(w_t w_1) + w_2 \cos(w_t w_2) \\ &= y_0 \cos(w_t y_0) + y_1 \cos(w_t y_1) + y \cos(w_t y) \\ &= \overset{4}{b}_v \cos(w_t y_0) + \overset{4}{b}_{v+n^h} \cos(w_t y_1) + n^h b \cos(w_t y). \end{aligned}$$

Schliesslich haben wir also

$$\begin{aligned} y_0 = w_0 &= \overset{4}{b}_v \cos(\overset{3}{w}_t y_0) + \overset{4}{b}_{v+n^h} \cos(\overset{3}{w}_t y_1) + n^h b \cos(\overset{3}{w}_t y) \\ y_1 = w_1 &= \overset{4}{b}_v \cos(\overset{3}{w}_{t+1} y_0) + \overset{4}{b}_{v+n^h} \cos(\overset{3}{w}_{t+1} y_1) + n^h b \cos(\overset{3}{w}_{t+1} y) \quad (B) \\ y = w_2 &= \overset{4}{b}_v \cos(\overset{3}{w}_{t+2} y_0) + \overset{4}{b}_{v+n^h} \cos(\overset{3}{w}_{t+2} y_1) + n^h b \cos(\overset{3}{w}_{t+2} y). \end{aligned}$$

Die Gleichungen (B) sind dem Wesen nach mit den Gleichungen (A) identisch und lassen sich leicht in dieselben transformieren<sup>1)</sup>, indem wir die Parameter entsprechend verändern; aber dieselben sind unzweifelhaft von complicirter Form.

Auf die Formeln der Symmetrieanalyse fussend, kommen wir also zu dem eindeutigen Schlusse, dass für die gyroëdrische Symmetrieart die einfachste Auffassung diejenige ist, nach welcher als die primitiven Symmetrieelemente ausser der dreizähligen Axe  $o$  noch zwei zweizählige Axen  $x$  und eine der Axen  $z$  angenommen werden.

Die Symmetriegleichungen für die pentagonal-pentagonoëdrische Symmetrieart, als viel complicirtere wie die eben besprochenen und auch als solche, welche in der Krystallographie keine Anwendung finden, lassen wir bei Seite.

Jetzt müssen wir diejenigen Symmetriearten näher betrachten, welche ausser durch Symmetrieaxen noch durch die directe Symmetrie sich kennzeichnen.

Es ist von Anfang an leicht, zum Schlusse zu kommen, dass hier ein grosses Feld des Beliebens resp. willkürlicher Auswahl der primitiven Symmetrieelemente vorliegt.

Nun glaube ich, ohne weitgehende Besprechung als selbstverständlich angeben zu können, dass, wenn eine zweizählige Axe der zusammengesetzten Symmetrie (also Inversionscentrum) als nicht alleiniges Symmetrieelement vorliegt, es einfacher ist, dieselbe immer unter den resultirenden bleiben zu lassen.

Gerade umgekehrt, wenn eine  $2p$ -zählige Axe der zusammengesetzten Symmetrie ( $p > 1$ ) vorliegt, und dabei dieselbe nicht zugleich eine  $2p$ -zählige Symmetrieaxe ist, so ist es einfacher und naturgemässer, dieselbe

<sup>1)</sup> Man beachte, dass von den drei Winkeln  $(w_t y_0)$ ,  $(w_t y_1)$ ,  $(w_t y)$  zwei rechte sind und einer gleich Null ist. Bei der Auflösung der Gleichungen bleibt also in dem zweiten Theile jeder Gleichung nur je ein Glied.

unter die primitiven Symmetrieelemente zu stellen, da dadurch nicht nur die einfachsten Symmetriegleichungen zum Vorschein kommen, sondern auch aus den Formeln selbst die Zugehörigkeit der Symmetrieart zu dem geometrischen Symmetriesysteme am anschaulichsten hervorgeht.

Dadurch ist an Einheitlichkeit viel gewonnen, aber noch nicht dieselbe endgültig erzielt. Es bleibt noch viel dem Belieben Raum, die zweizähligen Symmetrieaxen resp. die Symmetrieebenen als die primitiven anzunehmen.

Nehmen wir z. B. als den einfachsten Fall denjenigen der rhombopyramidalen Symmetrie an.

Für diesen Fall sind zwei und nur zwei Annahmen zulässig: entweder a) die primitiven Symmetrieelemente sind zwei zu einander senkrechte Symmetrieebenen, oder b) dieselben sind eine Symmetrieebene und eine zweizählige Symmetrieaxe.

Der ersten Auffassung gemäss erhalten wir als Symmetriegleichungen

$$y = n^{\varphi} b; \quad z = n^{\varphi} c; \quad v = d.$$

Der zweiten Auffassung gemäss erhalten wir aber

$$y = n^{\varphi+v} b; \quad z = n^v c; \quad v = d.$$

Ersetzt man in den letzteren Gleichungen  $\varphi + v$  durch  $\varphi_1$ , so wird  $v = \varphi_1 - \varphi = \varphi_2$ , und wir kommen zu den ersten. Der Form nach sind die ersten Gleichungen etwas einfacher und in dieser Hinsicht den zweiten vorzuziehen. Beachtet man aber, dass der einfachste Gang der elementaren Darlegung der Symmetriellehre derjenige ist, für welchen zuerst eine vollständige Ableitung der Decksymmetriearten ausgeführt wird, und dann die Untersuchung folgt, auf welche Weise den so erhaltenen Combinationen die Symmetrieebenen sich einschieben lassen, so kann man die zweiten Gleichungen vorziehen; in denselben ersieht man unmittelbar diejenigen Symmetrieaxen, welche vorerst abgeleitet wurden, und nach der vorigen Untersuchung als die primitiven Symmetrieelemente ausgewählt wurden.

Stellen wir uns einmal auf diesen Standpunkt, so wird die weitere Besprechung ganz überflüssig, und die Einheitlichkeit wird durch dieses Princip festgestellt. In der That, sämtliche andere Symmetriearten (also ausser denjenigen, für welche  $2p$ -zählige Axen der zusammengesetzten Symmetrie vorhanden sind und dabei keine  $2p$ -zählige Symmetrieaxen, wo  $p > 1$ ) lassen sich aus den Decksymmetriearten durch einfache Einschiebung einer, und dabei beliebig angenommenen, Symmetrieebene ableiten. Dem Belieben bleibt also kein weiteres Feld mehr<sup>1)</sup>.

Ich erlaube mir zum Schlusse, die Hoffnung auszusprechen, dass diese Studie zu der gewünschten Einheitlichkeit in der Auffassung der Symmetriellehre beitragen wird. Wenigstens war dies der Zweck dieser Arbeit.

1) Auf Grund der eben entwickelten Principien wurden die Symmetriegleichungen der krystallographischen Symmetriearten in der Tabelle Bd. 24 dieser Zeitschr. S. 220 aufgestellt.