Note über die Darstellung einer ganzen Zahl durch positive Kuben.

Von

Edgar Lejneek in Moskau.

Im 66. Bande dieser Annalen S. 95 hat Herr Wieferich zum ersten Male den berühmten Satz bewiesen, daß jede ganze positive Zahl sich als Summe von höchstens neun Kubikzahlen darstellen läßt.

In seinem kürzlich erschienenen Werke „Niedere Zahlentheorie" Bd. II, S. 344 hat Herr Bachmann auf eine Lücke in dem Beweise aufmerksam gemacht. Er bemerkt nämlich, daß der Wieferichsche Beweis 48 Ausnahmefälle zuläßt.

Angeregt durch diese Bemerkung, habe ich mir die Aufgabe gestellt, diese 48 Zahlen in bezug auf ihre Zerfällbarkeit zu untersuchen.

Die Resultate, welche ich bekommen habe, gestatte ich mir hier mitzuteilen. Es handelt sich dabei um die Zahlen von der Form

$$N = 5^4(6 \cdot 5^8 + M_1)^{*}), \quad \text{wo} \quad M_1 = 1000 + 6 \cdot 4^{\beta+3}(8k+7) \quad \text{ist,}$$

und zwar müssen wir von ihnen nur diejenigen betrachten, welche zwischen den Grenzen $0{,}4 \cdot 5^8$ und $5^2 \cdot 22^3$ liegen. Mit anderen Worten, wir müssen diejenigen Zahlen N untersuchen, welche den Wertsystemen β und k

$$\begin{array}{ll} \beta = 0, & 49 < k < 86, \\ \beta = 1, & 11 < k < 21, \\ \beta = 2, & 2 < k < 5, \\ \beta = 3, & \qquad k = 0 \end{array}$$

entsprechen.**)

Ich benutzte dabei folgendes Verfahren. Von allen N sonderte ich den größten Kubus ab und wiederholte dieselbe Operation mit dem Reste. In 15 Fällen bekommt man als zweiten Rest eine Zahl, größer als 40 000, welche näher untersucht werden muß. Die 33 anderen Reste sind alle

*) Auf S. 478 in Herrn Bachmanns Werke befindet sich ein Druckfehler.

**) Bachmann, l. c., S. 477—8.

kleiner als 40 000, und für sie konnte man mit Hilfe der Daublewsky v. Sterneckschen Tabelle feststellen, wie viel Kuben zu ihrer additiven Erzeugung erforderlich sind. Nach einer sorgfältigen Rechnung ergab sich, daß wir niemals mehr als sieben Kuben zur Erzeugung unserer 48 Zahlen bedürfen.

Aus der Formel*) $z = \alpha^3 + \beta^3 + N \cdots (1)$ ziehen wir nun den Schluß, daß auch für alle Zahlen (1) stets neun Kuben hinreichend sind.

Ich gestatte mir nun die Tabelle, welche ich berechnet habe, hier anzuführen.

Die Zahlen N sind hier der Größe nach geordnet.

Tabelle.

k	N
50	$1563148750 = 1160^3 + 131^3 + 14^3 + 11^3 + 8^3 + 4^3 + 2^3$
12	$1564348750 = 1160^3 + 151^3 + 20^3 + 11^3 + 7^3 + 5^3$
51	$1565068750 = 1161^3 + 50^3 + 18^3 + 10^3 + 8^3 + 5^3$
52	$1566988750 = 1161^3 + 127^3 + 12^3 + 11^3 + 10^3 + 3^3$
53	$1568908750 = 1161^3 + 158^3 + 29^3 + 14^3 + 2 \cdot 8^3$
54	$1570828750 = 1162^3 + 122^3 + 29^3 + 17^3 + 4^3 + 2^3$
13	$1572028750 = 1162^3 + 144^3 + 38^3 + 16^3 + 6^3 + 2 \cdot 3^3$
55	$1572748750 = 1162^3 + 155^3 + 29^3 + 25^3 + 11^3 + 2 \cdot 1^3$
0	$1572988750 = 1162^3 + 158^3 + 39^3 + 2 \cdot 9^3 + 5^3 + 2^3$
56	$1574668750 = 1163^3 + 116^3 + 38^3 + 22^3 + 14^3 + 11^3 + 8^3$
57	$1576588750 = 1163^3 + 152^3 + 32^3 + 16^3 + 11^3 + 10^3$
58	$1578508750 = 1164^3 + 112^3 + 16^3 + 8^3 + 6^3 + 2 \cdot 3^3$
14	$1579708750 = 1164^3 + 137^3 + 29^3 + 18^3 + 3 \cdot 14^3$
59	$1580428750 = 1164^3 + 148^3 + 37^3 + 26^3 + 25^3 + 16^3 + 4^3$
60	$1582348750 = 1165^3 + 105^3 + 3 \cdot 20^3$
61	$1584268750 = 1165^3 + 145^3 + 37^3 + 11^3 + 10^3 + 2 \cdot 2^3$
3	$1584508750 = 1165^3 + 149^3 + 32^3 + 9^3 + 5^3 + 2 \cdot 3^3$
62	$1586188750 = 1166^3 + 98^3 + 17^3 + 6^3 + 5^3 + 2^3$
15	$1587388750 = 1166^3 + 128^3 + 36^3 + 12^3 + 9^3 + 5^3 + 4^3$
63	$1588108750 = 1166^3 + 141^3 + 39^3 + 15^3 + 8^3 + 3^3$
64	$1590028750 = 1167^3 + 88^3 + 23^3 + 22^3$
65	$1591948750 = 1167^3 + 137^3 + 35^3 + 20^3 + 11^3 + 8^3 + 6^3$
66	$1593868750 = 1168^3 + 76^3 + 21^3 + 17^3 + 11^3 + 8^3 + 5^3$
16	$1595068750 = 1168^3 + 118^3 + 21^3 + 14^3 + 3 \cdot 3^3$
67	$1595788750 = 1168^3 + 133^3 + 27^3 + 14^3 + 2 \cdot 3^3$
68	$1597708750 = 1169^3 + 57^3 + 23^3 + 11^3 + 2 \cdot 5^3$
69	$1599628750 = 1169^3 + 128^3 + 27^3 + 12^3 + 7^3 + 3^3 + 2^3$
70	$1601548750 = 1169^3 + 159^3 + 26^3 + 10^3 + 2 \cdot 7^3$
17	$1602748750 = 1170^3 + 104^3 + 20^3 + 2 \cdot 11^3 + 6^3 + 2^3$
71	$1603468750 = 1170^3 + 122^3 + 32^3 + 14^3 + 12^3 + 2 \cdot 11^3$
72	$1605388750 = 1170^3 + 155^3 + 36^3 + 15^3 + 11^3 + 8^3 + 1^3$
73	$1607308750 = 1171^3 + 116^3 + 29^3 + 5^3 + 2 \cdot 4^3 + 1^3$
74	$1609228750 = 1171^3 + 151^3 + 39^3 + 13^3 + 9^3 + 7^3$
18	$1610428750 = 1172^3 + 83^3 + 22^3 + 18^3 + 3^3 + 2^3$
75	$1611148750 = 1172^3 + 109^3 + 21^3 + 15^3 + 8^3 + 5^3$
76	$1613068750 = 1172^3 + 147^3 + 36^3 + 16^3 + 10^3 + 3^3$
77	$1614988750 = 1173^3 + 100^3 + 25^3 + 2 \cdot 16^3 + 6^3$
4	$1615228750 = 1173^3 + 108^3 + 16^3 + 6^3 + 2^3 + 1^3$

*) Bachmann, S. 341.

k	N
78	$1616908750 = 1173^3 + 143^3 + 26^3 + 11^3 + 8^3 + 7^3 + 4^3$
19	$1618108750 = 1174^3 + 23^3 + 7^3 + 6^3$
79	$1618828750 = 1174^3 + 90^3 + 15^3 + 7^3 + 2^3$
80	$1620748750 = 1174^3 + 138^3 + 25^3 + 18^3 + 13^3 + 10^3$
81	$1622668750 = 1175^3 + 75^3 + 20^3 + 15^3 + 10^3 + 5^3$
82	$1624588750 = 1175^3 + 133^3 + 11^3 + 7^3 + 4^3$
20	$1625788750 = 1175^3 + 152^3 + 32^3 + 20^3 + 11^3 + 7^3 + 5^3$
83	$1626508750 = 1176^3 + 49^3 + 21^3 + 2 \cdot 10^3 + 4^3$
84	$1628428750 = 1176^3 + 127^3 + 6^3 + 3 \cdot 5^3$
85	$1630348750 = 1176^3 + 158^3 + 28^3 + 13^3 + 8^3 + 1^3$

Selbstverständlich können wir aus dieser Tabelle keinen Schluß über die *kleinste* Anzahl der Kuben ziehen, aber für die Frage, welche uns beschäftigt, spielt das ja keine Rolle.

Moskau, den 30. November a. S. 1910.