Sul problema di Hurwitz relativo alle parti reali delle radici di un' equazione algebrica.

Di

Luciano Orlando in Roma.

Supponiamo che il polinomio in x

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

abbia tutti i suoi coefficienti reali e positivi. L'equazione $f(x) = 0$ non avrà certamente radici nulle nè positive, ma potrà avere qualche coppia di radici complesse coniugate con parte reale nulla o positiva. Si presenta naturale, specialmente in vista di numerose ed importanti applicazioni, il problema di stabilire fra i coefficienti del polinomio $f(x)$ alcune relazioni, le quali siano necessarie e sufficienti affinchè l'equazione $f(x) = 0$ abbia negative non soltanto le radici reali, ma anche le parti reali delle radici complesse.

Tale problema è certamente indeterminato, se non si voglia imporre (e non abbiamo questa pretesa) che le condizioni cercate debbano essere fra di loro indipendenti. Esso è da noi chiamato problema di Hurwitz, non perchè l'illustre autore lo abbia per il primo risoluto*), ma perchè la sua soluzione ci pare più delle altre pratica ed elegante.

Chiameremo *polinomio di Hurwitz* ed *equazione di Hurwitz*, rispettivamente, un polinomio $H(x)$ ed un' equazione $H(x) = 0$, quando questa abbia negative le radici reali e le parti reali delle radici complesse. Osserviamo subito che un polinomio di Hurwitz, il quale abbia positivo il suo primo coefficiente a_0, deve avere positivi anche tutti gli altri coefficienti; infatti questi si ottengono moltiplicando a_0 per grandezze positive, che s'incontrano nei fattori lineari del tipo $x + \alpha$ e nei fattori quadratici del tipo $(x + \alpha)^2 + \beta^2$.

---

*) Un' intera soluzione si trova nella «Dinamica» del Routh, Vol. 2°. Cap. 6°. Ivi sono citati lavori del Routh, che rimontano al 1874. Il classico lavoro di Hurwitz si trova nei Math. Ann. 46 (1895), p. 273—284.

In questa memoria noi esporremo un metodo atto a risolvere il problema di Hurwitz; e ne mostreremo qualche relazione coi metodi già esistenti. Al teorema, che Hurwitz stabilisce per risolvere l'importante problema, arrecheremo un contributo di semplicità, dimostrandolo per via elementare.

Qui connettiamo il problema di Hurwitz con un particolare problema di eliminazione.*) Alcune considerazioni, che già si trovano, per esempio, nei «Determinanti» di Trudi**), lasciano, dopo ciò, vedere che i metodi di Routh e di Hurwitz hanno una differenza soltanto formale. Lo svolgimento di quest' idea si trova in un elegante lavoro, che prossimamente sarà pubblicato, del dott. Enrico Bompiani.***)

Noi ci crediamo ancora ben lontani dall' aver portato a compimento quest' ordine di ricerche. L'equazione alle semisomme relativa all' equazione $f(x) = 0$ è una fra le equazioni che hanno per radici reali le parti reali delle radici complesse dell' equazione proposta; ma essa, oltre queste semisomme delle radici coniugate, porta anche tutta la zavorra delle radici relative agli altri accoppiamenti. I metodi che valgono a costruirla hanno semplicità ad eleganza teorica, ma conducono alla costruzione di un' equazione di grado generalmente molto alto, che male si presta alle applicazioni. Il metodo di Hurwitz rimane sempre il migliore, perchè conduce al risultato praticamente più semplice: noi stabiliremo tale risultato in modo elementare.†)

I. L'equazione alle semisomme.

1. *Metodo delle potenze simili.* Sia $f(x) = 0$ un' equazione di grado n, e le n grandezze $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ ne siano le n radici, non necessariamente fra di loro diverse. Noi diremo *equazione alle semisomme relativa all' equazione* $f(x) = 0$ un' equazione $F(y) = 0$, tale che le sue radici siano le $\binom{n}{2}$ semisomme $\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}, \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2}, \ldots, \frac{\alpha_1 + \alpha_n}{2}, \ldots, \frac{\alpha_{n-1} + \alpha_n}{2}$, che si ottengono combinando in tutti gli $\binom{n}{2}$ modi le radici di $f(x) = 0$.

Quest' equazione $F(y) = 0$ si può formare, senza risolvere, beninteso, l'equazione proposta $f(x) = 0$, con un metodo perfettamente analogo a

*) Un accenno se ne trova nel citato Routh § 287.

**) 2ª parte, §§ II, III, IV, V.

***) Nella stessa nota di Bompiani, la coincidenza dei due metodi è anche dimostrata indipendentemente dal problema di eliminazione.

†) In questo mio lavoro espongo, raccolte e riordinate, alcune idee che in quest' anno (1910) ho sparsamente pubblicate nei Rendiconti dei Lincei (Roma).

quello che serve per formare l'equazione di Lagrange, ai quadrati delle differenze.

Poniamo

(1) $$K(x) = \left(\frac{x+\alpha_1}{2}\right)^k + \left(\frac{x+\alpha_2}{2}\right)^k + \cdots + \left(\frac{x+\alpha_n}{2}\right)^k$$

e poi

$$s_\nu = \alpha_1^\nu + \alpha_2^\nu + \cdots + \alpha_n^\nu,$$

$$S_\nu = \left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)^\nu + \left(\frac{\alpha_1+\alpha_3}{2}\right)^\nu + \cdots + \left(\frac{\alpha_1+\alpha_n}{2}\right)^\nu + \cdots + \left(\frac{\alpha_{n-1}+\alpha_n}{2}\right)^\nu.$$

Queste s_ν, S_ν sono le cosiddette somme delle potenze simili delle radici delle due rispettive equazioni $f(x) = 0$, $F(y) = 0$; esse sono legate ai coefficienti dalle note e fondamentali formule di Newton.

Sviluppando colla formula del binomio i varî termini che costituiscono $K(x)$, e moltiplicando per 2^k, otteniamo:

$$2^k K(x) = \sum_{\mu=1}^{n}\left[x^k + \binom{k}{1} x^{k-1}\alpha_\mu + \binom{k}{2} x^{k-2}\alpha_\mu^2 + \cdots + \alpha_\mu^k\right]$$
$$= s_0 x^k + \binom{k}{1} s_1 x^{k-1} + \binom{k}{2} s_2 x^{k-2} + \cdots + s_k;$$

e da ciò subito

$$K(\alpha_1) + K(\alpha_2) + \cdots + K(\alpha_n) = \frac{s_0 s_k + \binom{k}{1} s_1 s_{k-1} + \binom{k}{2} s_1 s_{k-2} + \cdots + s_k s_0}{2^k}.$$

Intanto osserviamo che $K(\alpha_1) + K(\alpha_2) + \cdots + K(\alpha_n)$ vale $s_k + 2S_k$, come risulta dalla semplice ispezione della formula (1), dunque otteniamo:

(2) $$S_k = -\frac{s_k}{2} + \frac{\sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu} s_\nu s_{k-\nu}}{2^{k+1}}.$$

Dai coefficienti di f dedurremo, per le formule di Newton, le s; poi dalla (2) avremo le S; e poi, di nuovo colle formule di Newton, calcoleremo i coefficienti dell' equazione cercata $F(y) = 0$.

2. *Eliminazione di x fra i due polinomî $f(x+y)$, $f(-x+y)$.* Sia

(1) $$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

un polinomio di grado n in x, e siano $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ le radici, non necessariamente diverse, dell' equazione $f(x) = 0$. Allora saranno

$$\alpha_1 - y,\ \alpha_2 - y,\ \cdots,\ \alpha_n - y$$

gli n valori che annullano il polinomio di grado n in x

(2) $$\varphi(x) = f(x+y),$$

e saranno $-\alpha_1+y,\ -\alpha_2+y,\cdots,-\alpha_n+y$ gli n valori che annullano l'altro polinomio di grado n in x

$$\psi(x)=f(-x+y). \tag{3}$$

Supponiamo ora, per esempio, che la radice $\alpha_\mu - y$ dell' equazione $\varphi(x)=0$ sia uguale alla radice $-\alpha_\nu+y$ dell' equazione $\psi(x)=0$, dove μ e ν rappresentano due numeri, anche non diversi, assunti fra $1,2,3,\cdots,n$. Allora otteniamo $\alpha_\mu-y=-\alpha_\nu+y$, cioè

$$y=\frac{\alpha_\mu+\alpha_\nu}{2}. \tag{4}$$

La condizione (4) è dunque necessaria perchè le due equazioni $\varphi(x)=0$, $\psi(x)=0$ abbiano radici comuni; ma essa è anche sufficiente, perchè se ne ottiene $\alpha_\mu-y=-\alpha_\nu+y$.

Sviluppando colla formula di Taylor i due polinomî che figurano nei secondi membri di (2) e di (3), noi otteniamo:

$$\varphi(x)=\frac{f^{(n)}(y)}{n!}x^n+\frac{f^{(n-1)}(y)}{(n-1)!}x^{n-1}+\cdots+f'(y)x+f(y), \tag{5}$$

$$\pm\psi(x)=\frac{f^{(n)}(y)}{n!}x^n-\frac{f^{(n-1)}(y)}{(n-1)!}x^{n-1}+\cdots\mp f'(y)x\pm f(y). \tag{6}$$

Ed ora, sommando questi due polinomî, poi sottraendone invece uno dall' altro, e dividendo in ambo i casi per 2, si ricavano i due polinomî

$$P(x)=\frac{f^{(n)}(y)}{n!}x^n+\frac{f^{(n-2)}(y)}{(n-2)!}x^{n-2}+\cdots, \tag{7}$$

$$Q(x)=\frac{f^{(n-1)}(y)}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{f^{(n-3)}(y)}{(n-3)!}x^{n-3}+\cdots, \tag{8}$$

uno di grado pari, l'altro di grado impari.

Se le due equazioni $\varphi(x)=0$, $\psi(x)=0$ hanno qualche radice comune, allora anche le due equazioni $P(x)=0$, $Q(x)=0$ avranno qualche radice comune, e viceversa. Intanto osserviamo che una delle due equazioni $P(x)=0$, $Q(x)=0$ (quella di grado impari) ha la radice zero; perchè anche l'altra equazione (di grado pari) abbia la radice zero, è necessario e sufficiente che il suo ultimo termine $f(y)$ sia nullo, cioè che y sia uguale ad una delle n grandezze $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$; le quali si possono anche scrivere $\frac{\alpha_1+\alpha_1}{2},\frac{\alpha_2+\alpha_2}{2},\cdots,\frac{\alpha_n+\alpha_n}{2}$. Dividendo per x il polinomio di grado impari, noi possiamo ai due polinomî $P(x)$, $Q(x)$ sostituire due polinomî di grado pari. Questi avranno qualche radice comune sempre e soltanto quando y sia ancora dato dalla formula (4); ma in questa formula possiamo ritenere μ e ν fra di loro differenti. (Ciò risulta necessario finchè $f(x)=0$

ha tutte le sue radici semplici; è lecito se ne ha multiple, perchè, per esempio, la radice $\alpha_1 = \alpha_2$ si può indicare con $\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$.)

Supponendo che n sia pari $= 2k$, possiamo dire che le nostre considerazioni ci avranno condotti a scrivere due polinomî di grado pari, che avranno radici comuni sempre e soltanto quando valga la (4), dove sia $\mu \neq \nu$.

Posto $x^2 = \xi$, otterremo due polinomî in ξ, che si scriveranno

$$U_1(\xi) = \frac{f^{(n)}(y)}{n!}\,\xi^k + \frac{f^{(n-2)}(y)}{(n-2)!}\,\xi^{k-1} + \cdots + f(y),$$

$$V_1(\xi) = \frac{f^{(n-1)}(y)}{(n-1)!}\,\xi^{k-1} + \frac{f^{(n-3)}(y)}{(n-3)!}\,\xi^{k-2} + \cdots + f'(y).$$

Se poi n è impari $= 2k + 1$, allora troveremo i due polinomî

$$U_2(\xi) = \frac{f^{(n)}(y)}{n!}\,\xi^k + \frac{f^{(n-2)}(y)}{(n-2)!}\,\xi^{k-1} + \cdots + f'(y),$$

$$V_2(\xi) = \frac{f^{(n-1)}(y)}{(n-1)!}\,\xi^k + \frac{f^{(n-3)}(y)}{(n-3)!}\,\xi^{k-1} + \cdots + f(y).$$

Se y non annulla $f^{(n-1)}(y)$, possiamo osservare che la somma dei gradi, tanto di U_1 e di V_1 quanto di U_2 e di V_2, vale $n-1$.

Il risultante di Sylvester di U_1, V_1 coincide evidentemente con quello di U_2, V_2, come risulta dalla sua costruzione. In ognuno dei due casi, troveremo, volendo costruirlo, il determinante d'ordine $n-1$

$$(9) \qquad R(y) = \begin{vmatrix} \frac{f^{(n-1)}(y)}{(n-1)!} & \frac{f^{(n)}(y)}{n!} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{f^{(n-3)}(y)}{(n-3)!} & \frac{f^{(n-2)}(y)}{(n-2)!} & \frac{f^{(n-1)}(y)}{(n-1)!} & \cdots & 0 \\ \frac{f^{(n-5)}(y)}{(n-5)!} & \frac{f^{(n-4)}(y)}{(n-4)!} & \frac{f^{(n-3)}(y)}{(n-3)!} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & & f'(y) \end{vmatrix}.$$

Le radici dell' equazione $R(y) = 0$ saranno dunque date dalla formula (4), dove si ritenga $\mu \neq \nu$. Ora il grado del termine principale è evidentemente $1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) = \binom{n}{2}$, ed il grado degli altri termini non può superarlo, come si vede da elementari osservazioni; dunque, se $F(y) = 0$ è l'equazione alle semisomme relativa all' equazione $f(x) = 0$, allora potremo scrivere:

$$(10) \qquad \lambda F(y) - R(y) = 0$$

dove λ è indipendente da y e dall' eventuale variabilità delle grandezze

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$. Allora la (10) è identicamente verificata, anche nel caso delle radici multiple, ed anche nel caso che y annulli la funzione lineare $f^{(n-1)}(y)$. Ma allora $R(y) = 0$ è, come $F(y) = 0$, l'equazione alle semisomme relativa alla $f(x) = 0$.*)

Gli elementi del determinante (9) sono i coefficienti del polinomio $\varphi(x) = f(x+y)$. Se vi si pone $y = 0$, ritroviamo dunque i coefficienti $a_0, a_1, \cdots, a_n$ del polinomio $f(x)$; ciò mostra che, nel polinomio in y rappresentato dal determinante (9), il termine indipendente da y è dato dal determinante d'ordine $n-1$

$$(11) \qquad D_{n-1} = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n & a_{n-1} \end{vmatrix},$$

del quale dovremo estesamente riparlare.

Intanto risulta subito che esso, considerato come funzione delle $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, ha, in ogni caso, par fattori tutte le $\binom{n}{2}$ semisomme $\frac{\alpha_\mu + \alpha_\nu}{2}$, che si ottengono combinando binariamente in tutti gli $\binom{n}{2}$ modi le n radici $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ dell' equazione $f(x) = 0$.

Per precisare questo concetto, svolgeremo nel seguente n. 3 un metodo atto a fornire l'equazione alle semisomme, partendo dalla considerazione del determinante (11), ma senza tener conto della sua provenienza qui esposta.

Ma, prima di passare oltre, non sarà male che stabiliamo più direttamente che il determinante (11), considerato come funzione (simmetrica) delle $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, contiene come fattori le $\binom{n}{2}$ somme (o semisomme) di queste grandezze.

Se le due equazioni $f(x) = 0$, $f(-x) = 0$ hanno qualche radici comune, per esempio $\alpha_\mu = -\alpha_\nu$, allora sarà $\alpha_\mu + \alpha_\nu = 0$, e viceversa. Intanto se $f(x) = 0$, $f(-x) = 0$ hanno qualche radice comune, allora anche le due equazioni

*) Rimane, se mai, il dubbio che possa λ essere zero; ma non vogliamo indugiarci su queste considerazioni, che riteniamo introduttorie a quelle più precise del seguente n. 3.

$$a_0 x^n \quad + a_2 x^{n-2} + \cdots = 0,$$
$$a_1 x^{n-1} + a_3 x^{n-3} + \cdots = 0,$$

dedotte rispettivamente per somma e differenza, avranno qualche radice comune, e viceversa. Uno di questi due polinomî è di grado pari, ed ha per ultimo termine a_n; dividendo l'altro per x, noi ci ridurremo a due polinomî di grado pari, nei quali porremo $x^2 = \xi$. Il determinante (11) sarà il risultante di Sylvester di questi due polinomî in ξ. Esso si annullerà sempre e soltanto quando sia $\alpha_\mu + \alpha_\nu = 0$, dove μ e ν sono numeri, che possiamo ritenere differenti, scelti ad arbitrio fra $1, 2, 3, \cdots, n$. Ciò dimostra quello che volevamo dimostrare.

Non ci pare inopportuno aggiungere che, partendo dai due polinomî $f(ix)$, $f(-ix)$, si giungerebbe ai due polinomî

$$a_0 x^n \quad - a_2 x^{n-2} + a_4 x^{n-4} - \cdots,$$
$$a_1 x^{n-1} - a_3 x^{n-3} + a_5 x^{n-5} - \cdots$$

e poi ad un determinante di Sylvester sostanzialmente identico al determinante (11).

3. *Il determinante* D_{n-1}. Sia D_{n-1} un determinante d' ordine $n-1$, che noi consideriamo dato dall' espressione (11) del precedente n. 2. Nella sua costituzione si presentano, in determinata maniera, i coefficienti del polinomio

(1) $$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n.$$

Per semplicità (non restrittiva), e soltanto provisoriamente, noi assumiamo $a_0 = 1$. Sugli altri coefficienti noi non facciamo nessun' ipotesi particolare: potranno essere reali o complessi.

Siano $-r_1, -r_2, \cdots, -r_n$ le n radici dell' equazione $f(x) = 0$; potremo dunque scrivere:

(2) $$f(x) = (x + r_1)(x + r_2) \cdots (x + r_n).$$

Servendoci del procedimento d' induzione, noi vogliamo stabilire la formula

(3) $$D_{n-1} = (r_1 + r_2)(r_1 + r_3) \cdots (r_1 + r_n) \cdots (r_{n-1} + r_n),$$

la quale preciserà la relazione fra D_{n-1} e l' ultimo termine dell' equazione alle semisomme relativa ad $f(x) = 0$. Nel secondo membro di (3) intendiamo rappresentato il prodotto di tutte le $\binom{n}{2}$ somme binarie che si ottengono combinando le n grandezze $r_1, r_2, \cdots, r_n$.

Intanto, se $f(x)$ è un polinomio di secondo grado, allora il relativo determinante D_{n-1} vale senz' altro $a_1 = r_1 + r_2$, dunque la formula (3) è certamente buona per $n = 2$. Ammettiamola fino ad n, e vediamo di dedurla per $n + 1$.

Costruiamo il determinante, d'ordine n, analogo a D_{n-1}, per il polinomio $K(x)=f(x)(x+r)$, di grado $n+1$. Otteniamo

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1+a_0r & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3+a_2r & a_2+a_1r & a_1+a_0r & \cdots & 0 \\ a_5+a_4r & a_4+a_3r & a_3+a_2r & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n+a_{n-1}r \end{vmatrix}.$$

Innalzandone di un' unità l'ordine, lo metteremo nella forma

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n & a_{n-1} \\ \pm r^n & \mp r^{n-1} & \pm r^{n-2} & \cdots & -r & 1 \end{vmatrix}.$$

Moltiplichiamo ora la prima colonna per $\pm a_0$, la seconda per $\mp a_1, \cdots$, la penultima per $-a_{n-1}$, e sommiamo coll' ultima moltiplicata per a_n. Con ciò avremo moltiplicato per a_n il determinante, e ne avremo ridotta l'ultima colonna ad essere tutta di zeri, tranne l'ultimo elemento che sarà $f(r)$. Così scriveremo

$$a_n\Delta = f(r)a_nD_{n-1}.$$

Se ora a_n non è zero, segue

$$\Delta = f(r)D_{n-1}, \tag{4}$$

o anche

$$\Delta - f(r)D_{n-1} = 0. \tag{5}$$

Ma il primo membro di questa formula (5) è un polinomio in a_n; esso è nullo per ogni $a_n \neq 0$, dunque rimane nullo anche per $a_n = 0$.

La formula (2) mostra che $f(r)$ vale $(r+r_1)(r+r_2)\cdots(r+r_n)$; ma dunque, per la formula (3) già ammessa, noi troveremo nel secondo membro della (4) tutte le $\binom{n+1}{2}$ somme binarie fra le $n+1$ grandezze $r_1, r_2, \cdots, r_n, r$. Dopo ciò, il criterio d' induzione lascia dedurre la generale validità della (3). Per $a_0 \neq 1$, interviene evidentemente il fattore a_0^{n-1}.

Ed ora consideriamo il polinomio $\varphi(x)=f(x+y)$, e, coi suoi coefficienti, i quali sono funzioni di y, formiamo il D_{n-1}. Evidentemente otteniamo il determinante $R(y)$, che figura nella (9) dal n. 2. Le radici di $\varphi(x)=0$ sono $-r_1-y, -r_2-y, \cdots. -r_n-y$, dunque, in forza della formula (3), che abbiamo or ora dimostrata, otteniamo (per $a_0=1$):

$$R(y) = (r_1+r_2+2y)\cdots(r_1+r_n+2y)\cdots(r_{n-1}+r_n+2y). \tag{6}$$

Da ciò si vede subito che le radici di $R(y) = 0$ sono le $\binom{n}{2}$ semisomme binarie delle radici $-r_1, -r_2, \cdots, -r_n$ dell' equazione $f(x) = 0$.

Il primo coefficiente del polinomio $R(y)$ vale (per $a_0 = 1$) $2^{\binom{n}{2}}$; e, per $a_0 \neq 1$, si vede, dalla considerazione del determinante, che esso vale $2^{\binom{n}{2}} a_0^{n-1}$.

II. Risoluzione del problema di Hurwitz.

1. *Metodo dell' equazione alle semisomme.* Vale il teorema:

*Condizione necessaria e sufficiente, affinchè un' equazione a coefficienti positivi, $f = 0$, sia un' equazione di Hurwitz, è che tutti i coefficienti della sua equazione alle semisomme siano positivi.**)

Intanto, se $f(x)$ dev' essere un polinomio di Hurwitz, anche le semisomme binarie fra le radici di $f(x) = 0$ avranno le parti reali negative, dunque l' equazione $F(y) = 0$, alle semisomme, sarà anch' essa un' equazione di Hurwitz, ed avrà tutti i coefficienti positivi. La nostra condizione appare da ciò *necessaria*. Per dimostrare che è anche *sufficiente*, si osservi che, se $F(y)$ è a coefficienti positivi, le sue radici reali non potranno essere che negative; ma essa ha effettivamente per radici reali le semisomme delle coppie di radici conjugate, cioè le parti reali delle radici complesse di $f(x)$, perciò le dette parti reali non potranno essere che negative.

Osservando che $F(y - \lambda) = 0$ è l' equazione alle semisomme di $f(x - \lambda) = 0$, si possono ottenere utili conseguenze, in base al teorema ora dimostrato.

2. *Dimostrazione elementare del teorema di Hurwitz.* Sia

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n \tag{1}$$

un polinomio a coefficienti *positivi*. Che i coefficienti siano positivi è necessario affinchè esso sia un polinomio di Hurwitz. Consideramo ora il solito determinante

$$D_{n-1} = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-3} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n & a_{n-1} \end{vmatrix} \tag{2}$$

e la catena dei suoi primi minori principali

$$D_1, D_2, D_3, \cdots, D_{n-2}, D_{n-1}, \tag{3}$$

*) È quasi inutile dire che potrebbero anche essere tutti negativi.

dove genericamente D_ν è formato cogli elementi comuni alle prime ν linee ed alle prime ν colonne di D_{n-1}. Il teorema di Hurwitz si enuncia, dopo ciò, come segue:

Condizione necessaria e sufficiente, affinchè $f = 0$ sia un' equazione di Hurwitz, è che gli elementi della catena (3) *siano tutti positivi.**)

Per dimostrarlo, incominciamo dal considerare il determinante

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} a_1 + a_0 r & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 + a_2 r & a_2 + a_1 r & a_1 + a_0 r & a_0 & 0 \\ a_5 + a_4 r & a_4 + a_3 r & a_3 + a_2 r & a_2 + a_1 r & a_1 + a_0 r \\ a_7 + a_6 r & a_6 + a_5 r & a_5 + a_4 r & a_4 + a_3 r & a_3 + a_2 r \\ a_9 + a_8 r & a_8 + a_7 r & a_7 + a_6 r & a_6 + a_5 r & a_5 + a_4 r \end{vmatrix},$$

analogo a D_5, ma formato coi coefficienti del polinomio $\Phi(x) = f(x)(x+r)$, di grado $n + 1$.

Innalzandolo al 6° ordine, lo possiamo scrivere:

$$(4) \qquad \Delta_5 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_9 & a_8 & a_7 & a_6 & a_5 & a_4 \\ -r^5 & r^4 & -r^3 & r^2 & -r & 1 \end{vmatrix}.$$

Nello stesso modo, per esempio scriveremo:

$$(5) \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ -r^3 & r^2 & -r & 1 \end{vmatrix}.$$

Moltiplichiamo rispettivamente le ultime quattro colonne di (4) per gli aggiunti degli elementi dell' ultima linea di (5): questi aggiunti sono anche gli aggiunti degli elementi dell' ultima linea nel determinante

$$(6) \qquad D_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 \end{vmatrix}.$$

*) Nell' enunciato di Hurwitz si suppongono positivi $a_0, D_1, \cdots, D_{n-1}, a_n$. Può capitare, sebbene sia poco probabile, in qualche questione pratica, che i segni dei coefficienti siano più difficili a stabilirsi che i segni dei D_ν; perciò noi osserviamo

Sommiamo i prodotti così ottenuti, e sostituiamo tali somme al posto degli elementi dell' ultima colonna di (4). Con ciò il determinante Δ_5 viene a moltiplicarsi per D_3 che è l' aggiunto dell' ultimo elemento di (5) e di (6); ed otteniamo:

$$D_3\Delta_5 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 0 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & 0 \\ a_9 & a_8 & a_7 & a_6 & a_5 & D_4 \\ -r^5 & r^4 & -r^3 & r^2 & -r & \Delta_3 \end{vmatrix}.$$

Sviluppando secondo l' ultima colonna, otteniamo:

$$D_3\Delta_5 = \Delta_3 D_5 + rD_4\Delta_4,$$

infatti l' aggiunto di D_4 è precisamente $-r\Delta_4$, col segno $-$, cioè $r\Delta_4$.

In modo analogo, che soltanto a scanso di simboli ingombranti non descriviamo per disteso, noi possiamo scrivere genericamente:

(7) $$D_{\nu-1}\Delta_{\nu+1} = \Delta_{\nu-1}D_{\nu+1} + rD_\nu\Delta_\nu.$$

Questa formula vale per $\nu = 2, 3, \cdots, n-2$; e vale, come facilmente si vede, anche per $\nu = n-1$ quando si ponga $D_n = a_n D_{n-1}$.*)

Se noi supponiamo che i D siano positivi e che $\frac{\Delta_\nu}{\Delta_{\nu-1}}$ ed r abbiano le parti reali positive, allora la stessa proprietà vale per $\frac{\Delta_{\nu+1}}{\Delta_\nu}$.

Sia ora $r = \alpha + i\beta$, con α positivo e β diverso da zero, un numero complesso, e sia $r' = \alpha - i\beta$ il conjugato; poniamo

$$(x+r)(x+r') = x^2 + kx + l.$$

I numeri k ed l sono reali positivi. I determinanti Θ_ν, analoghi ai D_ν, Δ_ν, formati coi coefficienti del polinomio $\Psi(x) = f(x)(x^2+kx+l)$, hanno tutti i loro elementi reali positivi, sebbene ciò non avvenga per i Δ_ν, che ne hanno anche di complessi.

Sarà, per esempio,

$$\Theta_2 = \begin{vmatrix} a_1 + ka_0 & a_0 \\ a_3 + ka_2 + la_1 & a_2 + ka_1 + la_0 \end{vmatrix}.$$

Come la formula (7), così anche vale evidentemente l' analoga formula

(8) $$\Delta_{\nu-1}\Theta_{\nu+1} = \Theta_{\nu-1}\Delta_{\nu+1} + r'\Delta_\nu\Theta_\nu.$$

---

che per la nostra dimostrazione non è essenziale, ma soltanto sbrigativo, badare anche al segno dei coefficienti di $f(x)$.

*) Volendo, si potrebbe estendere la validità della (7) fino ad n, ponendo $D_{n+1} = 0$, ma non ci sarà necessario.

Se $\frac{\Delta_\nu}{\Delta_{\nu-1}}$, $\frac{\Delta_{\nu+1}}{\Delta_\nu}$, r' hanno le parti reali positive, e se $\Theta_{\nu-1}$ e Θ_ν, sono grandezze reali positive, anche la grandezza reale $\Theta_{\nu+1}$ sarà positiva.

Osserviamo che la prima parte del teorema di Hurwitz, cioè la necessità che gli elementi (3) siano positivi affinchè f sia un polinomio di Hurwitz, vale senz' altro se f è un polinomio di 2° grado.

Ammettiamola fino al grado n, e vediamo se vale per $n+1$. Intanto un polinomio di Hurwitz di grado $n+1$ si ottiene da un polinomio di Hurwitz di grado n, moltiplicando per $x+r$, dove r è un numero reale positivo, o di un polinomio di Hurwitz di grado $n-1$, moltiplicando per $(x+r)(x+r') = x^2+kx+l$, dove k ed l sono reali positivi. Ma allora le nostre considerazioni ci assicurano che i relativi elementi della catena (3) risultano, tranne eventualmente l' ultimo, tutti positivi. Circa l' ultimo, per evitare discussioni (ben facili, peraltro) relative alle formule (7), (8), ci appoggeremo alla formula (3) del n. I, 3.

In modo anche facile si stabilisce la seconda parte del teorema, relativa alla sufficienza.

Siano $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \cdots$ arbitrarî numeri, reali o complessi. Se D_ν è relativo ad $f(x)$, gli analoghi determinanti dello stesso ordine, relativi ai polinomî $f(x)(x^2+\omega_1)$, $f(x)(x^4+\omega_1 x^2+\omega_2)$, $f(x)(x^6+\omega_1 x^4+\omega_2 x^2+\omega_3), \cdots$, hanno lo stesso valore di D_ν. Se noi, per esempio, consideriamo il determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3+\omega_1 a_1 & a_2+\omega_1 a_0 & a_1 \\ a_5+\omega_1 a_3 & a_4+\omega_1 a_2 & a_3+\omega_1 a_1 \end{vmatrix},$$

vediamo subito che esso coincide con

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix};$$

e così avverrebbe se anche nell' ultima linea figurassero gli elementi $a_5+\omega_1 a_3+\omega_2 a_1$ ed $a_4+\omega_1 a_2+\omega_2 a_0$, al posto di $a_5+\omega_1 a_3$, $a_4+\omega_1 a_2$.

E allora ammettiamo che il teorema di Hurwitz, valido senz' altro per il secondo grado, valga fino ad $n-1$, e vediamo se esso si può dedurre per n. Supponiamo, per assurdo, che la catena (3) abbia tutti gli elementi positivi, e che $f(x)=0$ abbia invece qualche radice complessa $\alpha+i\beta$ con α non negativo (e β diverso da zero). Radici reali non negative non ne può avere, perchè i coefficienti sono supposti positivi. Ma intanto deve avere come radice anche la coniugata $\alpha-i\beta$; e dico che, di più, deve avere qualche altra coppia di radici complesse con parte reale positiva. Intanto, se α fosse zero, sarebbe nullo anche D_{n-1}, per la (3) del n. I, 3, mentre che, per ipotesi, è positivo; dunque α è positivo; ma allora, nel secondo membro di questa formula ora citata esiste un fattore negativo; dunque se ne richiede, perchè sia positivo il prodotto, almeno un altro, il quale dovrà rappresentare la semisomma di due altre radici complesse coniugate con parte reale positiva, negativamente prese. Ma allora il polinomio $H(x) = \frac{f(x)}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$ dovrà avere qualche coppia di radici complesse con parte reale positiva; esso è di grado $n-2$, dunque per esso vale il teorema di Hurwitz; e allora i suoi D_ν non potranno essere tutti positivi. Ma i D_ν del polinomio $H(x)$ coincidono in valore coi D_ν del polinomio $f(x)[(x+\alpha)^2+\beta^2]$ (ottenuto col moltiplicare $H(x)$ per potenze pari di x); questi, come si è veduto, coincidono in segno con quelli di $f(x)$, perciò quelli di $f(x)$ non potranno essere tutti positivi, come è nell' ipotesi.

Con ciò rimane interamente stabilito il teorema di Hurwitz.

3. *Osservazioni.* Il teorema di Hurwitz conserva il suo enunciato quando si assuma

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n,$$

perchè un' equazione reciproca di un' equazione di Hurwitz è ancora un' equazione di Hurwitz. Ciò potrebbe servire a chi avesse voglia di estendere il teorema di Hurwitz alle serie di potenze.

Aggiungiamo un' altra osservazione. Per le equazioni di 4° grado, il D_3 è il prodotto delle sei semisomme binarie fra le radici. Se i coefficienti dell' equazione di 4° grado sono positivi, allora le coppie di radici complesse con parte reale non negativa non possono essere due; perchè non ve ne sia neanche una, bisogna e basta che anche il D_3 sia positivo.*)

*) Nel Routh, § 287 si trova già questo risultato. Esso è ivi stabilito in modo più faticoso. Le considerazioni contenute nel nostro n. I, 2 rappresentano un sistematico sviluppo delle idee espresse nel breve cenno fatto dal valente autore. Ma questo breve cenno ci sarebbe certamente sfuggito, se la caratteristica forma del determinante di Hurwitz non ci avesse indotti a vedere in tale determinante un determinante di Sylvester.