INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEL MASSIMO COMUN DIVISORE E DEL MINIMO COMUNE MULTIPLO DI PIÙ FUNZIONI ALGEBRICHE INTERE DI UNA SOLA VARIABILE.

Nota di **Giovanni Z. Giambelli** (Torino).

Adunanza del 28 luglio 1907.

La ricerca delle condizioni, affinchè r equazioni ad una incognita abbiano più radici in comune, è stata trattata in modo completo solo quando $r = 2$, e non si conosce alcun risultato notevole pel caso di $r > 2$ [1]). Nella presente Nota si tratterà tale questione generale, ossia il problema:

Determinare le condizioni necessarie e sufficienti, affinchè più funzioni algebriche intere di una sola variabile comunque prese ad u ad u ammettano M.C.D. e M.C.M. di dati gradi [2]).

Di questo problema, che si può pensare come una introduzione alla teoria del M.C.D. e del M.C.M. di più funzioni algebriche intere di una sola variabile, si sono trovate nel § 4 due soluzioni, conseguenze immediate di alcune questioni ausiliarie trattate nei §§ 1, 2, 3. Tra i risultati di questi §§ vi è un nuovo modo di enunciare la condizione necessaria e sufficiente, affinchè due equazioni abbiano più radici in comune, considerando l'annullamento di una matrice simile a quella ricavata dal determinante di SYLVESTER (o di EULERO), i cui elementi però sono le funzioni *aleph* di WRONSKI delle radici delle due equazioni. Inoltre sono state trovate le formole per la costruzione del M.C.D. e del M.C.M. di due, o più, funzioni algebriche intere di una sola variabile [3]).

§ 1.

Definizioni. — Proposizioni e formole ausiliarie.

Si designi con:

S_i $(i = 1, 2, \ldots, s+1)$ la funzione simmetrica fondamentale $\sum x_0 x_1 \ldots x_{i-1}$ di grado i nelle $x_0, x_1, \ldots, x_s$;

[1]) Cfr. l'Articolo: *Rationale Funktionen einer Veränderlichen; ihre Nullstellen*, di E. NETTO, nella « Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften », Band I, Teil 1 (1898), pp. 227-254.

[2]) M.C.D. e M.C.M. significano rispettivamente *massimo comun divisore* e *minimo comune multiplo*.

[3]) Dovendo spesso ricordare alcuni risultati della mia Nota: *Alcune proprietà delle funzioni simmetriche caratteristiche* [Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XXXVIII (1903), pp. 823-844], si designerà col simbolo $\mathfrak{N}$ tale Nota.

V_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ la funzione aleph di ordine i delle $x_0, x_1, \ldots, x_s$, ossia la funzione simmetrica delle $x_0, x_1, \ldots, x_s$, ottenuta dallo sviluppo $(x_0 + x_1 + \cdots + x_s)^i$, quando in luogo di ciascuno dei coefficienti polinomiali si ponga l'unità.

Si convenga di porre:

$$S_0 = V_0 = 1,$$
$$S_i = V_i = 0, \text{ se } i \text{ è negativo},$$
$$S_i = 0, \text{ se } i \text{ è maggiore di } s + 1.$$

Particolarizzando rispettivamente la (4) del § 2 e la (6) del § 3 di $\mathfrak{R}$ si ottengono facilmente le formole:

$$V_i = \sum_{u=0}^{u=i-1} (-1)^{i-u-1} V_u . S_{i-u} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots), \tag{1}$$

$$S_i = \sum_{u=0}^{u=i-1} (-1)^{i-u-1} S_u . V_{i-u} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots). \tag{2}$$

Si consideri poi il gruppo delle $t + 1$ lettere $x'_0, x'_1, \ldots, x'_t$ e si designi con:

T_i $(i = 1, 2, \ldots, t + 1)$ la funzione simmetrica fondamentale di grado i nelle $x'_0, x'_1, \ldots, x'_t$;

W_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ la funzione aleph di ordine i nelle $x'_0, x'_1, \ldots, x'_t$;

colla convenzione di porre:

$$T_0 = W_0 = 1,$$
$$T_i = W_i = 0, \text{ se } i \text{ è negativo},$$
$$T_i = 0, \text{ se } i \text{ è maggiore di } t + 1.$$

Supposto $0 \leqq p \leqq \min(s, t)$, si designino inoltre rispettivamente con X_i, Y_i le S_i, V_i, quando si faccia $x_{p+1} = x_{p+2} = \cdots = x_s = 0$, e si designino rispettivamente con $(S - X)_i$, $(V - Y)_i$ le S_i, V_i, quando si faccia $x_0 = x_1 = \cdots = x_p = 0$.

Evidentemente

$$X_0 = Y_0 = (S - X)_0 = (V - Y)_0 = 1,$$
$$X_i = Y_i = (S - X)_i = (V - Y)_i = 0, \text{ se } i \text{ è negativo},$$
$$X_i = 0, \text{ se } i \text{ è maggiore di } p + 1,$$
$$(S - X)_i = 0, \text{ se } i \text{ è maggiore di } s - p.$$

Da queste definizioni si ottengono subito le formole:

$$S_i = \sum_{u=0}^{u=i} X_u . (S - X)_{i-u} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots), \tag{3}$$

$$V_i = \sum_{u=0}^{u=i} Y_u . (V - Y)_{i-u} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

Eliminando le X_u $(i = 0, 1, \ldots, i - 1)$ tra le prime $i + 1$ formole (3) ed applicando la formola di P. Gordan sulle funzioni simmetriche caratteristiche (ossia la formola duale di quella del Trudi, cfr. il teorema enunciato alla fine del § 5 di $\mathfrak{R}$) rispetto alle $(V - Y)_u$ $(u = 1, 2, \ldots, i)$, e similmente eliminando le Y_u $(u = 0, 1, \ldots, i - 1)$

tra le prime $i+1$ formole (4) ed applicando la formola del TRUDI (cfr. pure il § 5 di $\mathfrak{N}$) rispetto alle $(S-X)_u$ $[u=1, 2, \ldots, \min(i, s-p)]$, si ricavano le formole inverse delle (3) e delle (4), ossia:

$$X_i = \sum_{u=0}^{u=i} (-1)^{i-u} S_u . (V-Y)_{i-u} \qquad (i=0, 1, 2, \ldots), \tag{5}$$

$$Y_i = \sum_{u=0}^{u=i} (-1)^{i-u} V_u . (S-X)_{i-u} \qquad (i=0, 1, 2, \ldots). \tag{6}$$

Ricordando che $0 \leqq p \leqq \min(s, t)$, si designi con:

$M(S, T; s, t, p)$ la matrice di $s+t+2-2p$ linee e di $s+t+2-p$ colonne nella quale gli elementi della colonna $(i+1)^{\text{sima}}$ $(i=0, 1, \ldots, s+t+1-p)$ sono:

$$S_i, \quad S_{i-1}, \ldots, S_{i-t+p}, \quad T_i, \quad T_{i-1}, \ldots, T_{i-s+p};$$

$M(V, W; s, t, p)$ la matrice di $s+t+2-2p$ linee e di $s+t+2-p$ colonne, nella quale gli elementi della colonna $(i+1)^{\text{sima}}$ $(i=0, 1, \ldots, s+t+1-p)$ sono:

$$V_i, \quad V_{i-1}, \ldots, V_{i-s+p}, \quad W_i, \quad W_{i-1}, \ldots, W_{i-t-p}.$$

Colla locuzione « *matrice nulla* » s'intende che siano nulli tutti i determinanti di ordine massimo contenuti nella matrice.

È importante dimostrare:

TEOREMA I. — *Supposto* $0 \leqq p < \min(s, t)$, *se è nulla la matrice* $M(V, W; s, t, p)$ *e non è nulla la matrice* $M(V, W; s, t, p+1)$, *allora è di conseguenza nulla la matrice* $M(S, T; s, t, p)$ *e non è nulla la matrice* $M(S, T; s, t, p+1)$; *supposto* $p=\min(s, t)$, *se è nulla la matrice* $M(V, W; s, t, p)$, *allora è di conseguenza nulla la matrice* $M(S, T; s, t, p)$. *Valgono le proprietà inverse.*

È sufficiente dimostrare solo il teorema diretto, essendo facilissimo modificare la seguente dimostrazione per le proprietà inverse.

Se per convenzione si attribuisce il valore zero

alle σ_u per cui $u \geqq s-p+1$,

alle τ_u per cui $u \geqq t-p+1$,

per l'ipotesi che è nulla la $M(V, W; s, t, p)$ segue che il sistema delle $s+t+2-p$ equazioni

$$\sum_{u=0}^{u=i} V_u . \sigma_{i-u} = \sum_{u=0}^{u=i} W_u . \tau_{i-u} \qquad (i=0, 1, \ldots, s+t+1-p) \tag{7}$$

è soddisfatto da valori non tutti nulli delle incognite omogenee $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{s-p}, \tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{t-p}$. Inoltre saranno diverse da zero almeno una delle $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{s-p}$ ed almeno una delle $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{t-p}$, altrimenti sarebbero nulle tutte le $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{s-p}$ e tutte le $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{t-p}$. Quindi quando è $p=\min(s, t)$, si ottiene subito $\sigma_0=\tau_0 \neq 0$; ma anche se è $p<\min(s, t)$, deve essere $\sigma_0=\tau_0\neq 0$, perchè se fosse $\sigma_0=\tau_0=0$, allora dalle (7) si ricaverebbe che è nulla la $M(V, W; s, t, p+1)$ contro l'ipotesi.

Per dimostrare che le incognite omogenee $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{s-p}, \tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{t-p}$

soddisfano pure al sistema delle $s+t+2-p$ equazioni

$$(8)\qquad \sum_{u=0}^{u=i}(-1)^u S_{i-u}\tau_u = \sum_{u=0}^{u=i}(-1)^u T_{i-u}\sigma_u \qquad (i=0,1,\dots,s+t+1-p),$$

basterà provare per $i \geqq 2$ che tra le $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{s-p}, \tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{t-p}$ sussiste la $(i+1)^{\text{sima}}$ equazione delle (8), facendo uso dell'ipotesi che tra le $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{s-p}$, $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{t-p}$ sussistano le prime i equazioni delle (8), perchè il sistema delle prime due equazioni delle (8) è identico al sistema delle prime due equazioni delle (7).

Da questa ipotesi e tenendo conto delle (7) risulta l'equazione

$$\sum_{v=0}^{v=i-1}(-1)^v\left[\sum_{u=0}^{u=v+1}V_u\,.\,\sigma_{v-u+1}\right]\cdot\left[\sum_{u=0}^{u=i-v-1}(-1)^u S_{i-v-u-1}\,.\,\tau_u\right]$$
$$=\sum_{v=0}^{v=i-1}(-1)^v\left[\sum_{u=0}^{u=v+1}W_u\,.\,\tau_{v-u+1}\right]\cdot\left[\sum_{u=0}^{u=i-v-1}(-1)^u T_{i-v-u-1}\,.\,\sigma_u\right],$$

la quale, per mezzo della (2) [ossia semplificando il primo membro per mezzo delle formole

$$S_u = \sum_{v=0}^{v=u-1}(-1)^{u-v-1}S_v\,.\,V_{u-v} \qquad (u=1,2,3,\dots)$$

ed il secondo membro per mezzo delle formole

$$T_u = \sum_{v=0}^{v=u-1}(-1)^{u-v-1}T_v\,.\,W_{u-v} \qquad (u=1,2,3,\dots)],$$

diventa:

$$\sum_{u=0}^{u=i-1}(-1)^u[S_{i-u}\sigma_0+(-1)^{i-u-1}\sigma_{i-u}]\tau_u = \sum_{u=0}^{u=i-1}(-1)^u[T_{i-u}\cdot\tau_0+(-1)^{i-u-1}\tau_{i-u}]\sigma_u\,.$$

Siccome semplificando quest'ultima equazione si ottiene la $(i+1)^{\text{sima}}$ equazione delle (8) a meno del fattore di proporzionalità non nullo $\sigma_0=\tau_0$, si conclude che sussiste il sistema di tutte le $s+t+2-p$ equazioni (8), e quindi è nulla la matrice $M(S, T; s, t, p)$ e non è nulla la $M(S, T; s, t, p+1)$, perchè non è $\sigma_0=\tau_0=0$.

§ 2.

La matrice di Sylvester delle funzioni aleph e la condizione affinchè due equazioni ad una incognita abbiano più radici in comune.

Posto

$$(9)\qquad F=\sum_{i=0}^{i=s+1}a_i x^{s+1-i}, \quad F'=\sum_{i=0}^{i=t+1}b_i x^{t+1-i},$$

si considerino le due equazioni ad una incognita x:

$$(10)\qquad F=0,$$

$$(10')\qquad F'=0,$$

dei rispettivi gradi $s+1$, $t+1$; senza togliere nulla alla generalità è *lecito supporre* $a_0=b_0=1$. Si designino con $x_0, x_1, \dots, x_s$ le $s+1$ radici della (10) e con x'_0,

$x'_1, \ldots, x'_t$ le $t+1$ radici della (10'); inoltre si faccia la convenzione di porre

$$a_i = 0, \text{ se } i \text{ è negativo, oppure maggiore di } s+1,$$
$$b_i = 0, \text{ se } i \text{ è negativo, oppure maggiore di } t+1.$$

Tenendo conto delle notazioni introdotte nel § 1, dalla citata formola di P. Gordan (cfr. il teorema enunciato alla fine del § 5 di $\mathfrak{M}$) segue:

$$(11)\quad V_i = (-1)^i \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_i \\ a_0 & a_1 & \ldots & a_{i-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{-(i-2)} & a_{-(i-3)} & \ldots & a_1 \end{vmatrix}, \quad W_i = (-1)^i \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & \ldots & b_i \\ b_0 & b_1 & \ldots & b_{i-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{-(i-2)} & b_{-(i-3)} & \ldots & b_1 \end{vmatrix}$$
$$(i = 1, 2, 3, \ldots).$$

Essendo sempre $0 \leq p \leq \min(s, t)$, si designi con $M(a, b;\ s, t, p)$ la matrice, che si può chiamare *matrice di* Sylvester *dei coefficienti*, di $s + t + 2 - 2p$ linee e di $s + t + 2 - p$ colonne, nella quale gli elementi della colonna $(i+1)^{\text{sima}}$ $(i = 0, 1, \ldots, s + t + 1 - p)$ sono

$$a_i, \quad a_{i-1}, \ldots, a_{i-t+p}, \qquad b_i, \quad b_{i-1}, \ldots, b_{i-s+p}.$$

Evidentemente si ha:

Teorema II. — *Se è nulla la matrice $M(a, b;\ s, t, p)$, è pure nulla la matrice $M(S, T;\ s, t, p)$, ed inversamente.*

Così, la nota proposizione:

Affinchè $F = 0$, $F' = 0$ abbiano in comune solo $p+1$ radici, occorre e basta che sia nulla la $M(a, b;\ s, t, p)$ ed inoltre, quando è $p < \min(s, t)$, non nulla la $M(a, b;\ s, t, p+1)$,

per mezzo dei teoremi I, II si potrà trasformare nel seguente modo:

Teorema III. — *Affinchè le equazioni $F = 0$, $F' = 0$ abbiano in comune solo $p+1$ radici, occorre e basta che sia nulla la matrice $M(V, W;\ s, t, p)$ ed inoltre, quando è $p < \min(s, t)$, non nulla la matrice $M(V, W;\ s, t, p+1)$.*

Quindi risulta come nella ricerca delle condizioni, affinchè due equazioni ad una incognita abbiano più radici in comune, si possa prendere in considerazione, invece del determinante di Bezout o della matrice di Sylvester dei coefficienti, una nuova matrice simile a questa, gli elementi della quale non sono i coefficienti delle due date equazioni, ma le funzioni aleph delle loro radici, funzioni che si ottengono subito dai coefficienti per mezzo delle (11). Questa nuova matrice $M(V, W;\ s, t, p)$ si può chiamare *matrice di* Sylvester *delle funzioni aleph*.

La matrice di Sylvester delle funzioni aleph è importante poi, perchè è suscettibile d'una notevole generalizzazione, che non ha luogo per quella dei coefficienti. Si definirà *matrice ampliata di* Sylvester *delle funzioni aleph* e si designerà col simbolo $M(V, W;\ s, t, p, n)$ la matrice di $s + t + 2 - 2p$ linee e di $n+1$ colonne, nella quale gli elementi della colonna $(i+1)^{\text{sima}}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ sono

$$V_i, \quad V_{i-1}, \ldots, V_{i-t+p}, \qquad W_i, \quad W_{i-1}, \ldots, W_{i-s+p}.$$

Supposto che le equazioni (10), (10') abbiano in comune solo $p+1$ radici, allora solo $p+1$ delle $x_0, x_1, \ldots, x_s$ saranno uguali a $p+1$ delle $x'_0, x'_1, \ldots, x'_t$; per fissare le idee si abbia

$$x_0 = x'_0, \qquad x_1 = x'_1, \ldots, x_p = x'_p.$$

Detta $(T-X)_i$ la T_i, quando si faccia $x'_0 = x'_1 = \cdots = x'_p = 0$, ed osservando che evidentemente

$$(T-X)_0 = 1,$$
$$(T-X)_i = 0, \text{ se } i \text{ è negativo, oppure maggiore di } t-p,$$

dalla (3) segue:

$$(12) \qquad (S_i - T_i) + \sum_{u=1}^{u=t-p} S_{i-u} \cdot (T-X)_u - \sum_{u=1}^{u=s-p} T_{i-u} \cdot (S-X)_u = 0 \qquad (i=0, 1, 2, \ldots, n)$$

e similmente dalla (6):

$$(13) \quad (V_i - W_i) + \sum_{u=1}^{u=s-p} (-1)^u V_{i-u} \cdot (S-X)_u - \sum_{u=1}^{u=t-p} (-1)^u W_{i-u} \cdot (T-X)_u = 0 \quad (i=0, 1, 2, \ldots, n).$$

Mentre le (12) diventano evanescenti, se è $n \geq s+t+2-p$, le (13) invece sono sempre vere equazioni comunque grande sia n; onde, eliminando dalle (13) le $(-1)^u \cdot (S-X)_u$ $(u=1, 2, \ldots, s-p)$ e le $(-1)^u \cdot (T-X)_u$ $(u=1, 2, \ldots, t-p)$, segue che è nulla la matrice $M(V, W; s, t, p, n)$, qualunque sia n. Siccome poi tale matrice $M(V, W; s, t, p, n)$ è pure nulla, quando le equazioni (10), (10') hanno in comune più di $p+1$ radici, si conclude:

Teorema IV. — *Se le equazioni $F=0$, $F'=0$ hanno in comune $p+1$ radici, allora è nulla qualsiasi matrice ampliata di* Sylvester *delle funzioni aleph, ossia è nulla la matrice*

$$M(V, W; s, t, p, N),$$

dove N è un intero finito, ma grande quanto si vuole.

Si considerino ora le funzioni simmetriche caratteristiche (cfr. il § 1 di $\mathfrak{N}$) delle radici delle due equazioni $F=0$, $F'=0$. Perciò si designi con $\{h_0, h_1, \ldots, h_s\}_s$, essendo $h_0, h_1, \ldots, h_s$ interi tali che $0 \leq h_0 < h_1 < \cdots < h_s$, la funzione simmetrica caratteristica

$$\begin{vmatrix} x_0^{h_0} & x_1^{h_0} & \ldots & x_s^{h_0} \\ x_0^{h_1} & x_1^{h_1} & \ldots & x_s^{h_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_0^{h_s} & x_1^{h_s} & \ldots & x_s^{h_s} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_0 & x_1 & \ldots & x_s \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_0^s & x_1^s & \ldots & x_s^s \end{vmatrix}$$

nelle $x_0, x_1, \ldots, x_s$. Quando invece delle $x_0, x_1, \ldots, x_s$ si considerano le $x'_0, x'_1, \ldots, x'_t$, allora si designerà con $\{h'_0, h'_1, \ldots, h'_t\}'_t$ la funzione simmetrica caratteristica $\{h'_0, h'_1, \ldots, h'_t\}_t$ nelle $x'_0, x'_1, \ldots, x'_t$.

Applicando la formola del Trudi (cfr. il § 5 di $\mathfrak{N}$) il teorema IV diventa:

Teorema V. — *Essendo $k_0, k_1, \ldots, k_{s+t+1-2p}$ interi qualunque soddisfacenti alle disuguaglianze $0 \leq k_0 < k_1 < \cdots < k_{s+t+1-2p}$, si chiami $\Pi_{k_0 k_1 \ldots k_{s+t+1-2p}}$ la funzione*

$$\sum \pm \{0, 1, \ldots, p-1, h_p, h_{p+1}, \ldots, h_s\}_s \cdot \{0, 1, \ldots, p-1, h'_p, h'_{p+1}, \ldots, h'_t\}'_t,$$

dove la sommatoria è estesa a tutti i valori delle $h_p, h_{p+1}, \ldots, h_s, h'_p, h'_{p+1}, \ldots, h'_t$, *per cui* $h_p, h_{p+1}, \ldots, h_s, h'_p, h'_{p+1}, \ldots, h'_t$ *è una qualunque permutazione degli interi* $k_0 + p, k_1 + p, \ldots, k_{s+t+1-2p} + p$, *tale che*

$$h_p < h_{p+1} < \cdots < h_s, \qquad h'_p < h'_{p+1} < \cdots < h'_t,$$

e dove si attribuisce a ciascun termine il segno $+$, *oppure* $-$, *secondochè* $h_p, h_{p+1}, \ldots, h_s, h'_p, h'_{p+1}, \ldots, h'_t$ *è una permutazione pari, oppure dispari della serie di numeri* $k_0 + p, k_1 + p, \ldots, k_{s+t+1-2p} + p$.

Se le equazioni $F = 0$, $F' = 0$ *hanno in comune* $p + 1$ *radici, allora sono nulle tutte le funzioni*

$$\Pi_{k_0 k_1 \ldots k_{s+t+1-2p}}$$

§ 3.

Costruzione del M.C.D. e del M.C.M. di due funzioni algebriche intere di una sola variabile.

Nell'ipotesi che le equazioni $F = 0$, $F' = 0$ abbiano in comune solo $p + 1$ radici, si considerino delle (12) e delle (13) quelle per cui $i = 1, 2, \ldots, s + t + 1 - p$, ossia i sistemi:

$$(12') \qquad (S_i - T_i) + \sum_{u=1}^{u=t-p} S_{i-u} \cdot (T - X)_u - \sum_{u=1}^{u=s-p} T_{i-u} \cdot (S - X)_u = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, s+t+1-p),$$

$$(13') \quad (V_i - W_i) + \sum_{u=1}^{u=s-p} (-1)^u V_{i-u} \cdot (S - X)_u - \sum_{u=1}^{u=t-p} (-1)^u W_{i-u} \cdot (T - X)_u = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, s + t + 1 - p).$$

Si chiamino:

$\Delta_a(k)$ $[k = 0, 1, \ldots, \min(s, t)]$ il determinante di $(s + t - 2k + 2)^{\text{simo}}$ ordine, nel quale gli elementi della linea $(j + 1)^{\text{sima}}$ $(j = 0, 1, \ldots, s + t - 2k + 1)$ sono:

$$a_j, \quad a_{j-1}, \ldots, a_{j-t+k}, \quad b_j, \quad b_{j-1}, \ldots, b_{j-s+k};$$

$\Delta_V(k)$ $[k = 0, 1, \ldots, \min(s, t)]$ il determinante di $(s + t - 2k + 2)^{\text{simo}}$ ordine, nel quale gli elementi della linea $(j + 1)^{\text{sima}}$ $(j = 0, 1, \ldots, s + t - 2k + 1)$ sono:

$$V_j, \quad V_{j-1}, \ldots, V_{j-s+k}, \quad W_j, \quad W_{j-1}, \ldots, W_{j-t+k}.$$

Dalla citata formola del Trudi (cfr. il § 5 di $\mathfrak{N}$) e da quella di P. Gordan (cfr. il teorema enunciato alla fine del § 5 di $\mathfrak{N}$) si ottiene la notevole relazione:

$$(14) \qquad \Delta_a(k) = (-1)^{(s-k+1)(t-k+1)} \Delta_V(k) \quad (k = 0, 1, \ldots, \min(s, t)\ ^{4)}).$$

Indicando poi per brevità:

con $M(a, b)_p$ la matrice di $s + t - 2p$ linee e di $s + t + 1 - 2p$ colonne, nella quale gli elementi della linea j^{sima} $(j = 1, 2, \ldots, s + t - 2p)$ sono

$$a_j - b_j, \quad a_{j-1}, \quad a_{j-2}, \ldots, a_{j-t+p}, \quad b_{j-1}, \quad b_{j-2}, \ldots, b_{j-s+p};$$

4) Di questa relazione si è tenuto conto implicitamente nel § 7 della mia Memoria: *Ordine di una varietà più ampia di quella rappresentata coll'annullare tutti i minori di dato ordine estratti da una data matrice generica di forme* [Memorie del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, serie 3ª, vol. X (1904), pp. 101-134].

con $M(V, W)_p$ la matrice di $s+t-2p$ linee e di $s+t+1-2p$ colonne, nella quale gli elementi della linea j^{sima} $(j = 1, 2, \ldots, s+t-2p)$ sono

$$V_j - W_j, \quad V_{j-1}, \quad V_{j-2}, \ldots, V_{j-s+p}, \quad W_{j-1}, \quad W_{j-2}, \ldots, W_{j-t+p},$$

si chiamino:

$D_a(k)$ il determinante di $(s+t-2p)^{\text{simo}}$ ordine ricavato dalla $M(a, b)_p$ togliendo in questa la colonna $(k+1)^{\text{sima}}$;

$D_V(k)$ il determinante di $(s+t-2p)^{\text{simo}}$ ordine ricavato dalla $M(V, W)_p$ togliendo in questa la colonna $(k+1)^{\text{sima}}$, dove $k = 0, 1, \ldots, s+t-2p$.

Evidentemente i simboli $D_a(0)$, $\Delta_a(p+1)$ hanno lo stesso significato e così pure $D_V(0)$, $\Delta_V(p+1)$, onde per la (14) si ottiene:

$$(15) \quad D_a(0) = \Delta_a(p+1) = (-1)^{(s-p)(t-p)} D_V(0) = (-1)^{(s-p)(t-p)} \Delta_V(p+1).$$

Per l'ipotesi fatta che le $F = 0$, $F' = 0$ abbiano in comune solo $p+1$ radici, tenendo conto della 6ª proposizione della importante Nota: *Ueber den gemeinsamen Factor zweier binären Formen* [5]) del Prof. M. NOETHER, risulta:

$$\Delta_a(0) = \Delta_a(1) = \cdots = \Delta_a(p) = 0, \qquad \Delta_a(p+1) \neq 0.$$

Quindi, osservando che è nulla la $M(a, b;\, s, t, p)$, dalle (12′) si ottengono le relazioni:

$$(16) \qquad D_a(k) = \lambda . (T - X)_k \qquad (k = 0, 1, \ldots, t-p),$$

$$(16') \qquad (-1)^{t-p-1} D_a(k) = \lambda . (S - X)_{k-t+p} \qquad (k = t-p+1,\ t-p+2, \ldots, s+t-2p);$$

e analogamente, osservando che è nulla la $M(V, W;\, s, t, p)$, dalle (13′):

$$(17) \qquad D_V(k) = (-1)^{(s-p)(t-p)} \lambda . (S - X)_k \qquad (k = 0, 1, \ldots, s-p),$$

$$(17') \qquad (-1)^{s-p-1} D_V(k) = (-1)^{(s-p)(t-p)} \lambda . (T - X)_{k-s+p} \qquad (k = s-p+1,\ s-p+2, \ldots, s+t-2p),$$

dove il fattore di proporzionalità λ non è nullo, essendo per la (15) uguale a $\Delta_a(p+1)$.

Concludendo per le (17), (16) si può enunciare:

TEOREMA VI. — *Se le funzioni algebriche intere F, F' ammettono come M.C.D. una funzione Φ di grado $p+1$ in x, allora le funzioni aleph Y_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ di ordine i delle radici dell'equazione in x $\Phi = 0$ sono date dalle formole:*

$$Y_i = \sum_{k=0}^{k=\min(i, s-p)} (-1)^k V_{i-k} \frac{D_V(k)}{D_V(0)}.$$

TEOREMA VII. — *Se le funzioni algebriche intere F, F' ammettono come M.C.M. una funzione Ψ di grado $s+t-p+1$ in x, allora*

$$\Psi = \sum_{i=0}^{i=s+t+1-p} \sum_{k=0}^{k=\min(i, t-p)} (-1)^k a_{i-k} \frac{D_a(k)}{D_a(0)} x^{s+t+1-p-i}.$$

Le funzioni aleph Y_i si possono evidentemente scrivere sotto forma di quoziente di due determinanti, dei quali il denominatore è $D_V(0)$, e così pure i coefficienti di Ψ

---

5) Sitzungsberichte der Physikalisch-medicinischen Societät in Erlangen, Heft XXVII (1895), pp. 110-115.

si possono scrivere sotto forma di quoziente di due determinanti, dei quali il denominatore è $D_a(0)$.

Similmente dalle (16'), (17') si ottengono teoremi analoghi a quelli ora enunciati; inoltre, tanto dalle (16), (16') quanto dalle (17), (17') si ottengono subito le funzioni quozienti $F:\Phi$, $F':\Phi$.

§ 4.

Risoluzione del problema generale del M.C.D. e del M.C.M. di più funzioni algebriche intere di una sola variabile.

Posto

$$(18)\quad F_1 = \sum_{i=0}^{i=m_1+1} a(1;\, i)x^{m_1-i+1},\quad F_2 = \sum_{i=0}^{i=m_2+1} a(2;\, i)x^{m_2-i+1},\ \ldots,\ F_r = \sum_{i=0}^{i=m_r+1} a(r;\, i)x^{m_r-i+1},$$

si considerino le r funzioni algebriche intere di una sola variabile x:

$$F_1,\quad F_2,\ \ldots,\ F_r.$$

Senza togliere nulla alla generalità è *lecito supporre*

$$a(1;\, 0) = a(2;\, 0) = \cdots = a(r;\, 0) = 1;$$

inoltre è utile fare la convenzione di attribuire il valore zero alle $a(h;\, i)$, per cui i è negativo, oppure maggiore di m_h+1, essendo h uno qualunque degli interi $1, 2, \ldots, r$.

Essendo sempre $h = 1, 2, \ldots, r$, si designi con $V(h;\, i)(i = 1, 2, 3, \ldots)$ la funzione aleph di ordine i delle radici dell'equazione in x $F_h = 0$, e si convenga di porre

$$V(h;\, 0) = 1,$$
$$V(h;\, i) = 0, \text{ se } i \text{ è negativo.}$$

Per la citata formola di P. GORDAN (cfr. il teorema enunciato alla fine del § 5 di $\mathfrak{N}$) segue:

$$V(h;\, i) = (-1)^i \begin{vmatrix} a(h;\, 1) & a(h;\, 2) & \ldots & a(h;\, i) \\ a(h;\, 0) & a(h;\, 1) & \ldots & a(h;\, i-1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a(h;\, -i+2) & a(h;\, -i+3) & \ldots & a(h;\, 1) \end{vmatrix} \quad (i = 1, 2, 3, \ldots).$$

Applicando rispettivamente in modo opportuno i teoremi VI, VII, si risolve subito il problema generale del M.C.D. e del M.C.M. delle funzioni intere $F_1, F_2, \ldots, F_r$, cioè si possono ottenere in funzione delle $a(h;\, i)$, o delle $V(h;\, i)$, le condizioni necessarie e sufficienti, affinchè le $F_1, F_2, \ldots, F_r$ prese ad u ad u $(u = 2, 3, \ldots, r)$ ammettano M.C.D. e M.C.M. di dati gradi.

Essendo $h_1, h_2, \ldots, h_u$ una combinazione qualunque di u degli interi $1, 2, \ldots, r$ si chiamino:

1° $i(h_1, h_2, \ldots, h_u) + 1$ il dato grado del M.C.D. delle $F_{h_1}, F_{h_2}, \ldots, F_{h_u}$,

2° $t(h_1, h_2, \ldots, h_u) + 1$ il dato grado del M.C.M. delle $F_{h_1}, F_{h_2}, \ldots, F_{h_u}$.

Questi numeri $i(h_1, h_2, \ldots, h_u)$ possono essere interi positivi, oppure uguali a zero, o a -1; essi ed i numeri $t(h_1; h_2, \ldots, h_u)$ soddisfano ad ovvie disuguaglianze, che per brevità si tralascieranno di scrivere.

È importante invece ricordare le formole fondamentali:

$$(19)\quad \begin{cases} t(h_1, h_2, \ldots, h_u) = \sum_{h'}^{(1)} m_{h_1'} - \sum_{h'}^{(2)} i(h_1', h_2') + \cdots \\ \cdots + (-1)^{u-2} \sum_{h'}^{(u-1)} i(h_1', h_2', \ldots, h_{u-1}') + (-1)^{u-1} i(h_1, h_2, \ldots, h_u), \end{cases}$$

$$(20)\quad \begin{cases} i(h_1, h_2, \ldots, h_u) = \sum_{h'}^{(1)} m_{h_1'} - \sum_{h'}^{(2)} t(h_1', h_2') + \cdots \\ \cdots + (-1)^{u-2} \sum_{h'}^{(u-1)} t(h_1', h_2', \ldots, h_{u-1}') + (-1)^{u-1} t(h_1, h_2, \ldots, h_u), \end{cases}$$

dove $\sum_{h'}^{(v)} (v = 1, 2, \ldots, u-1)$ significa che la sommatoria è estesa a tutte le combinazioni $h_1', h_2', \ldots, h_v'$ di v delle $h_1, h_2, \ldots, h_u$.

Quindi per le (19), (20) segue che tra i vari modi di risolvere il problema generale del M.C.D. e del M.C.M. delle funzioni intere $F_1, F_2, \ldots, F_r$ sono notevoli:

il metodo del M.C.D., cioè l'applicazione ripetuta del solo teorema VI,

il metodo del M.C.M., cioè l'applicazione ripetuta del solo teorema VII.

Metodo del M.C.D.

Nel definire i seguenti simboli occorre l'ipotesi che nessuna delle $i(h_1, h_2, \ldots, h_u)$ sia negativa.

Essendo h_1, h_2 una combinazione qualunque di due degli interi $1, 2, \ldots, r$, si chiamino:

1° $\Delta_V(h_1, h_2; k)[k=0, 1, \ldots, i(h_1, h_2)+1]$ il determinante di $(m_{h_1}+m_{h_2}-2k+2)^{\text{simo}}$ ordine, nel quale gli elementi della linea $(j+1)^{\text{sima}}$ $(j=0, 1, \ldots, m_{h_1}+m_{h_2}-2k+1)$ sono:

$$V(h_1; j),\ V(h_1; j-1), \ldots, V(h_1; j-m_{h_1}+k),\ V(h_2; j),\ V(h_2; j-1), \ldots, V(h_2; j-m_{h_2}+k);$$

2° $D_V(h_1, h_2; k)[k=1, 2, \ldots, m_{h_1}-i(h_1, h_2)]$ il determinante di $[m_{h_1}+m_{h_2}-2i(h_1, h_2)]^{\text{simo}}$ ordine, nel quale gli elementi della linea $(j+1)^{\text{sima}}[j=1, 2, \ldots, m_{h_1}+m_{h_2}-2i(h_1, h_2)]$ sono:

$$V(h_1, j) - V(h_2, j),\quad V(h_1; j-1), \ldots, V(h_1; j-k+1),$$
$$V(h_1; j-k-1), \ldots, V(h_1; j-m_{h_1}+i(h_1, h_2)),\ V(h_2; j-1), \ldots, V(h_2; j-m_{h_2}+i(h_1, h_2));$$

e si convenga di porre

$$D_V(h_1, h_2; 0) = \Delta_V(h_1, h_2; i(h_1, h_2)+1).$$

Più generalmente, essendo $h_1, h_2, \ldots, h_u$ una combinazione qualunque di u degli interi $1, 2, \ldots, r$, si chiamino:

1° $\Delta_V(h_1, \ldots, h_u; k)$ $[k = 0, 1, \ldots, i(h_1, \ldots, h_u) + 1]$ il determinante di $[i(h_1, \ldots, h_{u-1}) + m_{h_u} - 2k + 2]^{\text{simo}}$ ordine, nel quale gli elementi della linea $(j+1)^{\text{sima}}$ $[j = 0, 1, \ldots, i(h_1, \ldots, h_{u-1}) + m_{h_u} - 2k + 1)$ sono:

$$V(h_1, \ldots, h_{u-1}; j),\ V(h_1, \ldots, h_{u-1}; j-1), \ldots, V(h_1, \ldots, h_{u-1}; j-i(h_1, \ldots, h_{u-1})+k),$$
$$V(h_u; j),\quad V(h_u; j-1), \ldots, V(h_u; j-m_{h_u}+k);$$

2° $D_V(h_1, \ldots, h_u; k)$ $[k = 1, 2, \ldots, i(h_1, \ldots, h_{u-1}) - i(h_1, \ldots, h_u)]$ il determinante di $[i(h_1, \ldots, h_{u-1}) + m_{h_u} - 2i(h_1, \ldots, h_u)]^{\text{simo}}$ ordine, nel quale gli elementi della linea $(j+1)^{\text{sima}}[j=1, 2, \ldots, i(h_1, \ldots, h_{u-1})+m_{h_u}-2i(h_1, \ldots, h_u)]$ sono:

$$V(h_1, \ldots, h_{u-1}; j)-V(h_u; j), \quad V(h_1, \ldots, h_{u-1}; j-1), \ldots, V(h_1, \ldots, h_{u-1}; j-k+1)$$
$$V(h_1, \ldots, h_{u-1}; j-k-1), \ldots, V(h_1, \ldots, h_{u-1}; j-i(h_1, \ldots, h_{n-1})+i(h_1, \ldots, h_u)),$$
$$V(h_u; j-1), \ldots, V(h_u; j-m_{h_u}+i(h_1, \ldots, h_u)).$$

Si convenga poi di porre

1° $$D_V(h_1, \ldots, h_u; 0)=\Delta_V(h_1, \ldots, h_u; i(h_1, \ldots, h_u)+1),$$

2° $$V(h_1, \ldots, h_u; j)=\sum_{k=0}^{k=\min[j, i(h_1, \ldots, h_{u-1})-i(h_1, \ldots, h_u)]}(-1)^k V(h_1, \ldots, k_{u-1}; j-k)\frac{D_V(h_1, \ldots, h_u; k)}{D_V(h_1, \ldots, h_u; 0)}$$
$$(j=0, 1, 2, \ldots),$$
$$V(h_1, \ldots, h_u; j)=0, \text{ se } j \text{ è negativo,}$$

attribuendo il valore m_{h_1} al simbolo $i(h_1, \ldots, h_{u-1})$, quando $u=2$ [6]).

Applicando ripetutamente il teorema VI si conclude:

TEOREMA VIII. — *Affinchè le funzioni algebriche intere $F_1, F_2, \ldots, F_r$ della sola variabile x siano tali che, essendo $h_1, h_2, \ldots, h_u$ $(u=2, 3, \ldots, r)$ una combinazione qualunque di u degli interi $1, 2, \ldots, r$, il M.C.D. di $F_{h_1}, F_{h_2}, \ldots, F_{h_u}$ risulti di grado $i(h_1, \ldots, h_u)+1$, occorre e basta che siano nulli tutti i determinanti*

(21) $$\Delta_V(h_1, \ldots, h_u; k) \qquad [k=0, 1, \ldots, i(h_1, \ldots, h_u)]$$

e non nulli tutti i determinanti

(22) $$\Delta_V(h_1, \ldots, h_u; i(h_1, \ldots, h_u)+1),$$

dove nelle (21), (22) $h_1, h_2, \ldots, h_u$ variano in modo da ottenere tutte quelle combinazioni di u degli interi $1, 2, \ldots, r$, per cui non sia $i(h_1, \ldots, h_u)=-1$.

Inoltre, se non è $i(h_1, \ldots, h_u)=-1$, allora le corrispondenti $V(h_1, \ldots, h_u; j)$ $(j=1, 2, 3, \ldots)$ sono le funzioni aleph delle radici dell'equazione ottenuta uguagliando a zero il M.C.D. delle $F_{h_1}, F_{h_2}, \ldots, F_{h_u}$.

Metodo del M.C.M.

Nel definire i seguenti simboli occorre l'ipotesi che le $t(h_1, h_2, \ldots, h_u)$ siano tali che non risulti

$$t(h_1, \ldots, h_u)=t(h_1, \ldots, h_{u-1})+m_{h_u}+1,$$

dove qui e nel seguito si fa la convenzione di attribuire il valore m_{h_1} al simbolo $t(h_1, \ldots, h_{u-1})$, quando $u=2$.

Essendo h_1, h_2 una combinazione qualunque di due degli interi $1, 2, \ldots, r$ si chiamino:

1° $\Delta_a(h_1, h_2; k)$ $[k=0, 1, \ldots, m_{h_1}+m_{h_2}-t(h_1, h_2)+1]$ il determinante

---

[6]) Nell'applicare le relazioni che servono a calcolare le $V(h_1, \ldots, h_u; k)$ sarà in generale utile, per abbreviare i calcoli, disporre le $h_1, h_2, \ldots, h_u$ in modo, che risulti

$$i(h_1, \ldots, h_{u-1}) \leqq i(h'_1, \ldots, h'_{u-1}),$$

essendo $h'_1, h'_2, \ldots, h'_{u-1}$ una qualunque combinazione delle $h_1, h_2, \ldots, h_u$.

di $(m_{h_1} + m_{h_2} - 2k + 2)^{\text{simo}}$ ordine, nel quale gli elementi della linea $(j+1)^{\text{sima}}$ $(j = 0, 1, \ldots, m_{h_1} + m_{h_2} - 2k + 1)$ sono:

$$a(h_1; j),\ \ a(h_1; j-1), \ldots, a(h_1; j-m_{h_2}+k),\ \ a(h_2; j),\ \ a(h_2; j-1), \ldots, a(h_2; j-m_{h_1}+k);$$

2° $D_a(h_1, h_2; k)$ $[k=1, 2, \ldots, t(h_1, h_2)-m_{h_1}]$ il determ. di $[2.t(h_1, h_2)-m_{h_1}-m_{h_2}]^{\text{simo}}$ ordine, nel quale gli elementi della linea $(j+1)^{\text{sima}}$ $[j=1, 2, \ldots, 2.t(h_1, h_2)-m_{h_1}-m_{h_2}]$ sono:

$$a(h_1; j) - a(h_2; j),\ \ a(h_1; j-1), \ldots, a(h_1; j-k+1),\ \ a(h_1; j-k-1), \ldots,$$
$$a(h_1; j-t(h_1, h_2)+m_{h_1}),\ \ a(h_2; j-1), \ldots, a(h_2; j-t(h_1, h_2)+m_{h_2});$$

e si convenga di porre:

$$D_a(h_1, h_2; 0) = \Delta_a(h_1, h_2; m_{h_1} + m_{h_2} - t(h_1, h_2) + 1).$$

Più generalmente, essendo $h_1, h_2, \ldots, h_u$ una combinazione qualunque di u degli interi $1, 2, \ldots, r$, si chiamino:

1° $\Delta_a(h_1, \ldots, h_u; k)$ $[k = 0, 1, \ldots, t(h_1, \ldots, h_{u-1}) + m_{h_u} - t(h_1, \ldots, h_u) + 1]$ il determinante di $[t(h_1, \ldots, h_{u-1}) + m_{h_u} - 2k + 2]^{\text{simo}}$ ordine, nel quale gli elementi della linea $(j+1)^{\text{sima}}$ $[j = 0, 1, \ldots, t(h_1, \ldots, h_{u-1}) + m_{h_u} - 2k + 1]$ sono:

$$a(h_1, \ldots, h_{u-1}; j),\ \ a(h_1, \ldots, h_{u-1}; j-1), \ldots, a(h_1, \ldots, h_{u-1}; j-m_{h_u}+k),$$
$$a(h_u; j),\ \ a(h_u; j-1), \ldots, a(h_u; j-t(h_1, \ldots, h_{u-1})+k);$$

2° $D_a(h_1, \ldots, h_u; k)$ $[k = 1, 2, \ldots, t(h_1, \ldots, h_u) - t(h_1, \ldots, h_{u-1})]$ il determinante di $[2.t(h_1, \ldots, h_u) - t(h_1, \ldots, h_{u-1}) - m_{h_u}]^{\text{simo}}$ ordine, nel quale gli elementi della linea $(j+1)^{\text{sima}}$ $[j = 1, 2, \ldots, 2.t(h_1, \ldots, h_u) - t(h_1, \ldots, h_{u-1}) - m_{h_u}]$ sono:

$$a(h_1, \ldots, h_{u-1}; j) - a(h_u; j),\ \ a(h_1, \ldots, h_{u-1}; j-1), \ldots, a(h_1, \ldots, h_{u-1}; j-k+1),$$
$$a(h_1, \ldots, h_{u-1}; j-k-1), \ldots, a(h_1, \ldots, h_{u-1}; j-t(h_1, \ldots, h_u)+t(h_1, \ldots, h_{u-1})),$$
$$a(h_u; j-1), \ldots, a(h_u; j-t(h_1, \ldots, h_u)+m_{h_u}).$$

Si convenga poi di porre:

1° $D_a(h_1, \ldots, h_u; 0) = \Delta_a(h_1, \ldots, h_u; t(h_1, \ldots, h_{u-1}) + m_{h_u} - t(h_1, \ldots, h_u) + 1)$,

$$2°\ \ a(h_1, \ldots, h_u; j) = \sum_{k=0}^{k=\min[j,\, t(h_1, \ldots, h_u) - t(h_1, \ldots, h_{u-1})]} (-1)^k a(h_1, \ldots, h_{u-1}; j-k) \frac{D_a(h_1, \ldots, h_u; k)}{D_a(h_1, \ldots, h_u; 0)}$$
$$[j = 0, 1, 2, \ldots, t(h_1, \ldots, h_u) + 1],$$

$a(h_1, \ldots, h_u; j) = 0$, se j è negativo, oppure se è $j > t(h_1, \ldots, h_u) + 1$ [7]).

Applicando ripetutamente il teorema VII si conclude:

TEOREMA IX. — *Affinchè le funzioni algebriche intere $F_1, F_2, \ldots, F_r$ della sola variabile x siano tali che, essendo $h_1, h_2, \ldots, h_u$ $(u = 2, 3, \ldots, r)$ una combinazione qualunque di u degli interi $1, 2, \ldots, r$, il M.C.M. di $F_{h_1}, F_{h_2}, \ldots, F_{h_u}$ risulti di*

---

[7]) Rispetto alla disposizione più conveniente delle $h_1, \ldots, h_u$ nel calcolo delle $a(h_1, \ldots, h_u; j)$ si può fare un'osservazione analoga a quella fatta per il calcolo del $V(h_1, \ldots, h_u; j)$ nella nota [6]).

grado $t(h_1, \ldots, h_u) + 1$, *occorre e basta che siano nulli tutti i determinanti*

(23) $$\Delta_a(h_1, \ldots, h_u; k) \quad [k=0, 1, \ldots, t(h_1, \ldots, h_{u-1})+m_{h_u}-t(h_1, \ldots, h_u)]$$

e non nulli tutti i determinanti

(24) $$\Delta_a(h_1, \ldots, h_u; t(h_1, \ldots, h_{u-1}) + m_{h_u} - t(h_1, \ldots, h_u) + 1),$$

dove nelle (23), (24) $h_1, h_2, \ldots, h_u$ *variano in modo da ottenere tutte quelle combinazioni di* u *degli interi* $1, 2, \ldots, r$, *per cui non sia* $t(h_1, \ldots, h_u)=t(h_1, \ldots, h_{u-1})+m_{h_u}+1$.

Inoltre, se non è $t(h_1, \ldots, h_u) = t(h_1, \ldots, h_{u-1}) + m_{h_u} + 1$, *allora*

$$\sum_{j=0}^{j=t(h_1,\ldots,h_u)+1} a(h_1, \ldots, h_u; j)\, x^{t(h_1,\ldots,h_u)-j+1}$$

è il M.C.M. delle $F_{h_1}, F_{h_2}, \ldots, F_{h_u}$ [8]).

Casi particolari notevoli.

I teoremi generali VIII, IX, diventano più semplici, quando si fanno alcune ipotesi particolari per i numeri $i(h_1, \ldots, h_u)$ e $t(h_1, \ldots, h_u)$.

Infatti quando si suppone che i numeri $i(h_1, \ldots, h_u)$, qualunque sia u e comunque si scelgano le $h_1, \ldots, h_u$, siano tutti uguali tra loro, allora si può modificare il teorema VIII così:

TEOREMA X. — *Affinchè le funzioni algebriche intere* $F_1, F_2, \ldots, F_r$ *della sola variabile* x, *comunque prese ad* u *ad* u $(u = 2, 3, \ldots, r)$, *ammettano sempre uno stesso M.C.D. di grado* $p + 1$, *essendo* $p \geqq 0$, *occorre e basta che siano nulli tutti i determinanti*

(25) $$\Delta_V(h_1, h_2; k) \qquad (k = 0, 1, \ldots, p)$$

e non nulli tutti i determinanti

(26) $$\Delta_V(h_1, h_2; p + 1),$$

dove nelle (25), (26) h_1, h_2 *variano in modo da ottenere tutte le combinazioni di due degli interi* $1, 2, \ldots, r$, *ed inoltre che siano soddisfatte le relazioni*

$$V(1, 2; j) = V(1, 3; j) = \cdots = V(1, r; j) \qquad (j = 1, 2, \ldots, p + 1),$$

onde segue:

$$V(1, 2; j)=V(1, 3; j)=\cdots=V(1, r; j)=V(2, 3; j)=\cdots=V(2, r; j)=\cdots=V(r-1, r; j)$$
$$(j = 1, 2, \ldots, p + 1).$$

Le $V(1, 2; j)$ $(j = 1, 2, 3, \ldots)$ *sono le funzioni aleph delle radici dell'equazione ottenuta uguagliando a zero il M.C.D. delle* $F_1, F_2, \ldots, F_r$.

Se si suppone invece che i numeri $t(h_1, \ldots, h_u)$, qualunque sia u e comunque si scelgano le $h_1, \ldots, h_u$, siano tutti uguali tra loro, allora si può modificare il teorema IX così:

TEOREMA XI. — *Affinchè le funzioni algebriche intere* $F_1, F_2, \ldots, F_r$ *della sola variabile* x, *comunque prese ad* u *ad* u $(u = 2, 3, \ldots, r)$, *ammettano sempre uno stesso M.C.M. di grado* $m + 1$, *essendo* m *non maggiore della somma di due qualunque delle*

[8]) Per convenzione $t(h_1, \ldots, h_{u-1}) = m_{h_1}$, se $u = 2$.

$m_1, m_2, \ldots, m_r$, occorre e basta che siano nulli tutti i determinanti

$$\Delta_a(h_1, h_2; k) \qquad (k = 0, 1, \ldots, m_{h_1} + m_{h_2} - m) \tag{27}$$

e non nulli tutti i determinanti

$$\Delta_a(h_1, h_2; m_{h_1} + m_{h_2} - m + 1), \tag{28}$$

dove nelle (27), (28) *h_1, h_2, variano in modo da ottenere tutte le combinazioni di due degli interi* 1, 2, ..., *r, ed inoltre che siano soddisfatte le relazioni*

$$a(1, 2; j) = a(1, 3; j) = \cdots = a(1, r; j) \qquad (j = 1, 2, \ldots, m+1),$$

onde segue:

$$a(1, 2; j) = a(1, 3; j) = \cdots = a(1, r; j) = a(2, 3; j) = \cdots = a(2, r; j) = \cdots = a(r-1, r; j)$$
$$(j = 1, 2, \ldots, m+1).$$

La funzione

$$\sum_{j=0}^{j=m+1} a(1, 2; j) x^{m-j+1}$$

è il M.C.M. delle $F_1, F_2, \ldots, F_r$.

Da ultimo è utile osservare che i risultati generali dei teoremi VIII e IX si potrebbero forse semplificare qualora si spingesse ulteriormente, in modo opportuno, la teoria delle funzioni simmetriche caratteristiche.

Torino, 1 agosto 1907.

GIOVANNI Z. GIAMBELLI.