

Über binomische Facultäten und deren Coefficienten.

Von F. J. Studnička in Prag.

Nennt man das Product von n binomischen Factoren

$$(1) \quad \prod_{k=1}^n (x + a_k) \equiv (x + a_1)(x + a_2)(x + a_3) \dots (x + a_n)$$

eine binomische Facultät, so stellen die in der zugehörigen Summenform

$$(2) \quad \prod (x + a_k) = x^n + k_n^1 x^{n-1} + k_n^2 x^{n-2} + \dots + k_n^n$$

auftauchenden Coefficienten

$$k_n^1, k_n^2, k_n^3, \dots, k_n^n,$$

welche Productensummen aller möglichen Combinationen der n Elemente

$$(3) \quad a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$$

und zwar der Reihe nach der

$$1., 2., 3., \dots, n^{\text{ten}}$$

Classe ausdrücken, sogenannte Facultätscoefficienten vor, so dass darnach zu gelten hat

$$(4) \quad \begin{aligned} k_n^1 &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n, \\ k_n^2 &= a_1 a_2 + a_1 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n, \\ &\dots\dots\dots \\ k_n^n &= a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_n. \end{aligned}$$

Ihre Werte werden bekanntlich¹⁾ durch die Formel

¹⁾ Siehe: Studnička „Beitrag zur Theorie der Potenz- und Combinations-determinanten“, Sitzb. d. kön. böhm. Ges. d. Wiss. 1897, Nr. I.

$$(5) \quad k_n^i = \frac{(a_1^0 a_2^1 a_3^2 \dots a_{n-i}^{n-i-1} a_{n-i+1}^{n-i+1} \dots a_n^n)}{\delta_n}$$

dargestellt, wobei der Zähler eine Potenzdeterminante n^{ten} Grades, der Nenner aber die zugehörige einfache Potenzdeterminante, welche durch das alternierende Product

$$(6) \quad (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_3 - a_2) \dots (a_n - a_{n-1}) = \delta_n$$

sich ausdrücken lässt, bildet.

In dieser Allgemeinheit, wo die Zahlenreihe (3) keinen Bedingungen unterworfen erscheint, bieten nun die Facultätscoefficienten kein besonderes Object einer weiteren Untersuchung, verwandeln sich jedoch sofort in einfachere und interessantere Formen, sobald diese Zahlengrößen bestimmte Gesetze befolgen.

Der einfachste Fall tritt offenbar ein, wenn

$$(7) \quad a_k = 1, \quad (k = 1, 2, 3, \dots, n)$$

indem dann aus der Facultät (1) sich die Potenz

$$\prod_{k=1}^n (x + a_k) = (x + 1)^n$$

entwickelt und der zugehörige Coefficient die Form

$$(8) \quad k_n^i = n_i = \frac{n!}{i!(n-i)!} = \frac{n^{i-1}}{i!}$$

annimmt, wobei das Kramp'sche Facultätssymbol verwendet erscheint.

Wie diese Binomialcoefficienten aus der Formel (5) direct sich ergeben, zeigt die zugehörige Relation ¹⁾

$$(9) \quad a_k \left| \frac{\Delta_n}{\delta_n} = \frac{m_1}{1!} \cdot \frac{m_2}{2!} \cdot \frac{m_3}{3!} \dots \frac{m_{n-1}}{(n-1)!} \cdot M_m, \right.$$

wenn hiebei allgemein die Bezeichnung

$$(10) \quad \Delta_n = (a_1^0 a_2^{m_1} a_3^{m_2} \dots a_n^{m_{n-1}})$$

und gleichzeitig speciell analog

$$(11) \quad M_m = (m_1^0 m_2^1 m_3^2 \dots m_{n-1}^{n-2})$$

eingeführt wird.

Den nächst anzuführenden besonderen Fall erhalten wir, wenn in der Zahlenreihe (3)

$$a_k = k, \quad (k = 1, 2, 3, \dots, n)$$

¹⁾ Ibid. Formel (14).

gesetzt wird, worauf unsere binomische Facultät sich in

$$(12) \quad (x+1)^{n_1} = (x+1)(x+2)(x+3) \dots (x+n)$$

verwandelt, welche in entwickelter Form die Reihe

$$(13) \quad (x+1)^{n_1} = x^n + n|_1 x^{n-1} + n|_2 x^{n-2} + \dots + n|_n$$

bietet, wo die Facultätscoefficienten durch die recurrente Formel

$$(14) \quad \overline{n-1}|_{k-1} \cdot n + \overline{n-1}|_k = n|_k$$

gegeben sind, welche ihre Grundeigenschaft ausdrückt, und zu der a priori sich ergebenden Relation

$$(15) \quad n|_n = n!$$

führt, während ihre independente Darstellung durch die Formel

$$(16) \quad n_k = \frac{\delta_k}{k!}$$

ausgedrückt erscheint, wobei ¹⁾

$$(17) \quad \delta_k = \begin{vmatrix} (n+1)_2 & , & -1, & 0 & , & \dots, & 0 \\ (n+1)_3 & , & n_2, & -2 & , & \dots, & 0 \\ (n+1)_4 & , & n_3, & (n-1)_2 & , & \dots, & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ (n+1)_{k+1}, & n_k, & (n-1)_{k-1}, & \dots, & (n-k+2)_2 \end{vmatrix}.$$

Aus Formel (13) folgt zunächst die Relation

$$(18) \quad \sum_{k=0}^n n|_k = (n+1)! ,$$

während bekanntlich von den Binomialcoefficienten gilt;

$$\sum_{k=0}^n n_k = 2^n$$

ebenso erhält man daraus wie bei den letztgenannten Coefficienten

$$(19) \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k n|_k = 0.$$

Stellt man nun diese Facultätscoefficienten nach Pascals Vorgange in ein dreieckiges Schema, so erhält man für die ersten

¹⁾ Siehe: Studnička „Über eine neue Formel der Combinatorik“, Sitzb. d. kön. böhm. Ges. d. Wiss. 1878.

und daher weiter, sofern $(x + a)$ vereint bleibt,

$$\Pi (x + a_k) = (x + a)^n + n'_{|_1} (x + a)^{n-1} + n'_{|_2} (x + a)^{n-2},$$

wobei der Formel (13) analog

$$n' = n - 1$$

zu nehmen ist; werden nun die angezeigten Potenzen entwickelt, so ergibt sich schließlich

$$(26) \quad \Pi (x + a_k) = x^n + n_{|_1} x^{n-1} + n_{|_2} x^{n-2} + \dots + n_{|_n},$$

wenn wir die neuen Facultätscoefficienten mit dem Symbol $n_{|_k}$ bezeichnen. Dabei erhält man speciell

$$(27) \quad n_{|_1} = n_1 a + n'_{|_1} d,$$

oder wenn wir das letzte Symbol $n'_{|_1}$ mit Hilfe der Formel (16) ersetzen,

$$n_{|_1} = n_1 a + n_2 d,$$

was die bekannte Summenformel der zugehörigen arithmetischen Reihe vorstellt. Ebenso erhalten wir weiter

$$(28) \quad \begin{aligned} n_{|_2} &= n_2 a^2 + n'_{|_1} (n-1)_1 a d + n'_{|_2} d^2, \\ n_{|_3} &= n_3 a^3 + n'_{|_1} (n-1)_2 a^2 d + n'_{|_2} (n-2)_1 a d^2 + n'_{|_3} d^3, \end{aligned}$$

und allgemein

$$(29) \quad n_{|_k} = \sum_{i=0}^k n'_{|_i} (n-i)_{k-i} \cdot a^{k-i} d^i,$$

woraus zu entnehmen ist, dass im speciellen Falle, wo

$$a = 1, \quad d = 0$$

sich die Binomialcoefficienten einstellen, da dann

$$n_{|_k} = n_k,$$

wenn hingegen darin

$$a = 0, \quad d = 1$$

gesetzt wird, die einfachsten Facultätscoefficienten daraus entstehen, da hiebei

$$n_{|_k} = n'_{|_k}.$$

Neben der independenten Darstellung der neuen Facultäts-coefficienten $n|_k$, wie die Formel (29) liefert, ist noch die recurrente bemerkenswert, welche durch die Relation

$$(30) \quad \overline{n-1}|_{k-1} \cdot (a + \overline{n-1}d) + \overline{n-1}|_k = n|_k$$

ausgedrückt erscheint, aus welcher wieder sich der Formel (15) analog ergibt, was a priori ersichtlich ist,

$$(31) \quad n|_n = a^{n \cdot d},$$

welche Relation für die speciellen Werte

$$a = 1, \quad d = 1$$

eben die Formel (15) liefert.

Gleichzeitig erhalten wir den Formeln (18) und (19) analog die Relationen, die auch Formel (25) direct liefert

$$(32) \quad \sum_{k=0}^n n|_k = (1+a)^{n \cdot d}$$

was sich ebenfalls specialisieren ließe, und

$$(33) \quad \sum_{k=1}^n (-1)^k n|_k = 0,$$

sofern wir auch a mit 1 identificieren.

Sind nun diese Facultätscoefficienten für bestimmte arithmetische Reihen einmal bekannt, so kann man sie zur bequemen Auswertung von zugehörigen Potenzdeterminanten verwenden, da hiebei zur Formel (20) und (23) noch

$$(34) \quad \delta_n = 1! 2! 3! \dots (n-1)! d^n$$

hinzutritt. Darnach ist z. B.

$$(1^0 3^1 5^2 7^4 9^5) = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 3, & 5, & 7, & 9 \\ 1, & 3^2, & 5^2, & 7^2, & 9^2 \\ 1, & 3^4, & 5^4, & 7^4, & 9^4 \\ 1, & 3^5, & 5^5, & 7^5, & 9^5 \end{vmatrix} = 1! 2! 3! 4! 2^{10} \cdot 230,$$

indem aus Formel (28) sich ergibt

$$5|_2 = 10 + 10 \cdot 4 \cdot 2 + 35 \cdot 2^2 = 230.$$

Ebenso erhält man unter Verwendung der zugehörigen Facultätscoefficienten

$$(2^2 5^3 8^3 11^5) \equiv \begin{vmatrix} 1, 1, 1, 1 \\ 2, 5, 8, 11 \\ 2^3, 5^3, 8^3, 11^3 \\ 2^5, 5^5, 8^5, 11^5 \end{vmatrix} = 1! 2! 3! 3^6 \cdot \begin{vmatrix} 231, 806 \\ 1, 26 \end{vmatrix},$$

was auch die directe Ausrechnung bestätigt.

Wollten wir auf diesem Wege weiter schreiten, so könnten wir statt der Zahlenreihe (3) eine geometrische Progression wählen, so dass wir die binomische Facultät

$$\prod_{k=1}^n (x + q^k) = (x + q)(x + q^2)(x + q^3) \dots (x + q^n)$$

erhielten, welche für den speciellen Wert

$$x = -1$$

von Heine¹⁾ aufgestellt und behandelt wurde, so dass wir hier nicht mehr darauf eingehen wollen.

Anmerkung.

Da wir die einfache binomische Facultät (12) auch nach Facultäten der einzelnen Monome entwickeln können, so erlangen wir parallel mit der Formel (13) noch die Relation

$$(35) \quad (x+1)^{n+1} = x^{n+1} + n_1 x^{n-1+1} \cdot 1! + n_2 x^{n-2+2} \cdot 2! + \dots + n!,$$

wobei Binomialcoefficienten auftreten. Wird also nach Potenzen entwickelt, so intervenieren hiebei Facultätscoefficienten; wird jedoch nach Facultäten geordnet, so treten in der betreffenden Reihe Binomialcoefficienten auf, woraus sich interessante Zahlenidentitäten ableiten lassen.

So hat man z. B.

$$\begin{aligned} & 4^{4|1} + 4_1 \cdot 4^{3|1} + 4_2 \cdot 4^{2|1} \cdot 2! + 4_3 \cdot 4^{1|1} \cdot 3! + 4! \\ &= 4^4 + 4|_1 \cdot 4^3 + 4|_2 \cdot 4^2 + 4|_3 \cdot 4 + 4|_4 = 1680, \end{aligned}$$

was auch durch die bekannte Identität

$$2^{n|4} = (n+1)^{n|1}$$

bestätigt erscheint, da im vorliegenden Falle hieraus

¹⁾ Handbuch, I. pag. 109.

$$2^{n|4} = 2^{4|4} = 2.6.10.14 = 1680$$

erhalten wird.

Unter Verwendung von Formel (26) ergibt sich ebenso

$$\begin{aligned} x^{4|2} + 4_1 x^{3|2} \cdot 1 + 4_2 x^{2|2} 1^{2|2} + 4_3 x^{1|2} 1^{3|2} + 4_4 \cdot 1^{4|2} \\ = x^4 + 4_{|1} x^3 + 4_{|2} x^2 + 4_{|3} x + 4_{|4}, \end{aligned}$$

wobei nach Formel (31) bestätigt wird, dass

$$4_4 \cdot 1^{4|2} = 4_{|4} = 1.3.5.7.$$

Wie sich diese „problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres“, noch weiterspinnen ließen, bleibe diesmal unbeachtet.
