Das vollständige Formensystem der binären Form 7^ter Ordnung.

Von

Frhr. v. Gall in Oppenheim.

Nach Herrn Prof. Gordan's Untersuchungen*) erhält man das volle System der binären Form a_x^7 aus folgenden 29 nach dem Grad in den Coefficienten geordneten Formen A_i

$$
\begin{array}{llll}
1)\ a_x^7 = f; & & & \\
2)\ H_x^{10} = (ff)^2; & \varkappa_x^6 = (ff)^4; & & \\
3)\ \gamma_x^{11} = (f\varkappa)^1; & \varepsilon_x^9 = (f\varkappa)^2; & r_x^3 = (f\varkappa)^5; & T_x^{15} = (fH)^1; \\
4)\ \Delta_x^8 = (\varkappa\varkappa)^2; & p_x^4 = (\varkappa\varkappa)^4; & \zeta_x^{14} = (H\varkappa)^1; & \\
5)\ \eta_x^7 = (r\varkappa)^1; & g_x^5 = (r\varkappa)^2; & & \\
6)\ \tau_x^2 = (rr)^2; & \beta_x^8 = (\varkappa p)^1; & & \\
7)\ \vartheta_x^5 = (pr)^1; & \alpha_x = (pr)^3; & & \\
8)\ \lambda_x^6 = (\tau\varkappa)^1; & \mu_x^4 = (\tau\varkappa)^2; & & \\
9)\ Q_x^3 = (r\tau); & 10)\ \nu_x^2 = (r\alpha); & 11)\ \varphi_x^3 = (p\alpha); & \\
12)\ R = (\tau\tau)^2; & 13)\ \varrho_x = (\tau\alpha); & 14)\ \psi_x^4 = (\vartheta\alpha); & \\
16)\ \sigma_x^2 = (Q\alpha); & 17)\ \omega_x = (\nu\alpha) = (r\alpha^2)^2; & & \\
20)\ A = (\varrho\alpha) = (\tau\alpha^2)^2; & & & \\
23)\ h_x = (\sigma\alpha) = (Q\alpha^2)^2; & & & \\
30)\ B = (h\alpha) = (\sigma\alpha^2)^2 = (Q\alpha^3)^3, & & &
\end{array}
$$

indem man mit ihnen noch die Covariante $l_x^2 = (ff)^6$ und deren Invariante $C = (ll)^2$ verbindet; und zwar sind von den vielen möglichen Ueberschiebungen von l^ϱ über Producte $A_i A_k \ldots$ beizubehalten:

---

*) Gordan. Ueber das Formensystem binärer Formen. Leipzig. Teubner 1875.

1) Die Ueberschiebungen $(A_i l^\varrho)^{2\varrho}$;
2) Von den Ueberschiebungen $(A_i l^\varrho)^{2\varrho-1}$ diejenigen, bei denen
   a) A_i keine Functionaldeterminante nicht linearer Formen ist,
   b) A_i eine Functionaldeterminante von der Ordnung 2ϱ ist,
   c) oder eine Functionaldeterminante von der Ordnung 2ϱ zweier Formen ungerader Ordnung,

3) unter den Ueberschiebungen $(A_i A_\varkappa, f^\varrho)^{2\varrho}$ diejenigen, bei denen die Ordnungen von A_i und $A_\varkappa$ ungerade Zahlen sind, die zusammen 2ϱ betragen und bei denen A_i und $A_\varkappa$ nicht gleichzeitig Functionaldeterminanten sind. (Vergleiche hierüber das erwähnte Werk von Gordan). Die letzte Kategorie von Ueberschiebungen liefert nur Invarianten. Es ist wesentlich der Zweck der nachfolgenden Untersuchung zu zeigen, dass die meisten derselben reducibel sind. Dagegen sind nur wenige der erhaltenen Covarianten auf andere zurückzuführen. Ich werde nachstehend die auf oben definirte Weise erlangten Bildungen, nach dem Grade in den Coefficienten der ursprünglichen Form a_x^7 geordnet, aufzählen und bei jedem Grade die möglichen Reductionen angeben. Ich verstehe dabei unter $(i, \varkappa)$ eine Form i^{ten} Grades in den Coefficienten und $\varkappa^{\text{ter}}$ Ordnung in den x.

Formen 1. Grades.

$$f = a_x^7 = (1, 7).$$

Formen 2. Grades.

(2, 2)	(2, 6)	(2, 10)
l_x^2	$\varkappa_x^6$	H_x^{10}.

Formen 3. Grades.

(3, 3)	(3, 5)	(3, 7)	(3, 9)	(3, 11)	(3, 15)
r_x^3	$(fl)^2$	$(fl)^1$	ε	γ	T.

Formen 4. Grades.

(4, 0)	(4, 4)	(4, 6)	(4, 8)	(4, 10)	(4, 14)
C	1) p	$(\varkappa l)^1$	1) Δ	$(Hl)^1$	ζ.
	2) $(\varkappa l)^2$		2) $(Hl)^2$		

Formen 5. Grades.

(5, 1)	(5, 3)	(5, 5)	(5, 7)	(5, 9)	(5, 13)
$(rl)^2$	1) $(rl)^1$	1) g	1) η	1) $(\gamma l)^2$	$(Tl)^2$
	2) $(fl^2)^4$	2) $(fl^2)^3$	2) $(\varepsilon l)^2$	2) $(\varepsilon l)^1$.	

Formen 6. Grades.

Nach Formel 1) Seite 40 des angeführten Werkes von Herrn Gordan ist: $\Delta = \frac{2}{3}(fr) + L$, wenn ich unter L eine Bildung verstehe, die das Symbol l enthält. Es ist mithin $(\Delta l)^1$, $(\Delta l^2)^3$ und $(\Delta l^3)^5$ auszulassen, $(\Delta l^4)^7$ dagegen nicht, weil $(fr)^1$ Functionaldeterminante zweier Formen ungerader Ordnung und von der Ordnung 8 ist. Es bleiben daher die Bildungen:

(6, 2)	(6, 4)	(6, 6)	(6, 8)	(6, 12)
1) τ	1) $(\varkappa l^2)^3$	1) $(Hl^2)^4$	1) β	$(\zeta l)^2$
2) $(\varkappa l^2)^4$	2) $(pl)^1$	2) $(\Delta l)^2$	2) $(Hl^2)^3$	
3) $(pl)^2$				

Formen 7. Grades.

(7, 1)	(7, 3)	(7, 5)	(7, 7)	(7, 11)
1) α	1) $(fl^3)^5$	1) ϑ	1) $(\gamma l^2)^4$	$(Tl^2)^4$
2) $(fl^3)^6$	2) $(gl)^2$	2) $(\varepsilon l^2)^4$	2) $(\varepsilon l^2)^3$	
3) $(rl^2)^3$		3) $(\eta l)^2$		
		4) $(gl)_1$		

Formen 8. Grades.

(8, 0)	(8, 2)	(8, 4)	(8, 6)	(8, 10)
1) $(\varkappa l^3)^6$	1) $(\varkappa l^3)^5$	1) μ	1) λ	$(\zeta l^2)^4$
2) $(pl^2)^4$	2) $(pl^2)^3$	2) $(Hl^3)^6$	2) $(Hl^3)^5$	
3) $(\tau l)^2$	3) $(\tau l)_1$	3) $(\Delta l^2)^4$	3) $(\beta l)^2$	

Formen 9. Grades.

(9, 1)	(9, 3)	(9, 5)	(9, 9)
1) $(fl^4)^7$	1) Q	1) $(\gamma l^3)^6$	$(Tl^3)^6$
2) $(gl^2)^4$	2) $(\varepsilon l^3)^6$	2) $(\varepsilon l^3)^5$	
3) $(\alpha l)^1$	3) $(\eta l^2)^4$		
	4) $(gl^2)^3$		
	5) $(\vartheta l)^2$		

Formen 10. Grades.

(10, 2)	(10, 4)	(10, 8)
1) ν	1) $(Hl^4)^7$	$(\zeta l^3)^6$
2) $(Hl^4)^8$	2) $(\beta l^2)^4$	
3) $(\Delta l^3)^6$	3) $(\lambda l)^2$	
4) $(\mu l)^2$	4) $(\mu l)^1$	

Formen 11. Grades.

(11, 1)	(11, 3)	(11, 7)
1) $(\varepsilon l^4)^8$	1) $(\gamma l^4)^8$	$(T l^4)^8$
2) $(\eta l^3)^6$	2) $(\varepsilon l^4)^7$	
3) $(g l^3)^5$	3) φ	
4) $(\vartheta l^2)^4$		
5) $(Q l)^2$		

Formen 12. Grades.

(12, 0)		(12, 2)		(12, 6)
1) R	4) $(r^2 l^3)^6$	1) $(H l^5)^9$	4) $(\lambda l^2)^4$	$(\xi l^4)^8$
2) $(H l^5)^{10}$	5) $(\mu l^2)^4$	2) $(\Delta l^4)^7$	5) $(\mu l^2)^3$	
3) $(\Delta l^4)^8$	6) $(\nu l)^2$	3) $(\beta l^3)^6$	6) $(\nu l)^1$	

Formen 13. Grades.

(13, 1)		(13, 3)	(13, 5)
1) ϱ	5) $(\vartheta l^3)^5$	$(\varphi l)_1$	$(T l^5)^{10}$
2) $(\gamma l^5)^{10}$	6) $(Q l^2)^3$		
3) $(\varepsilon l^5)^9$	7) $(\varphi l)^2$		
4) $(\eta l^4)^7$			

Formen 14. Grades.

(14, 0)	(14, 4)
1) $(fr,\ l^5)^{10}$	1) ψ
2) $(\beta l^4)^8$	2) $(\xi l^5)^{10}$
3) $(\lambda l^3)^6$	
4) $(r \cdot \alpha,\ l^2)^4$	

Formen 15. Grades.

(15, 1)	(15, 3)
1) $(\gamma l^6)^{11}$	$(T l^6)^{12}$
2) $(\varphi l^2)^3$	
3) $(\varrho l)^1$	

Formen 16. Grades.

Bei den Bildungen dieses Grades treten zuerst zerfallende Invarianten auf. Denke ich mir nun alle Formen L geordnet:

1) nach dem Gesammtgrad α,
2) nach dem Grade β in den Coefficienten der 29 Formen A_i,
3) nach der Höhe γ der Ueberschiebung mit einer Potenz von l,

so werde ich zunächst jede Form L auslassen können, die auf höhere Formen L zurückführbar ist, weil sie dadurch niedere Dimension in den Coefficienten A_i annimmt, und ferner jede Form L, die auf niedere Ueberschiebungen mit l^ϱ zurückzubringen ist. Lässt sich daher ein Product $A_i A_\varkappa$ mit Hilfe einer Syzygante identisch reduciren auf ein Aggregat von Producten Z_i von mehr als 2 Formen, oder von Producten G_i zweier Formen gerader Ordnung oder auf Producte J_i, die eine Invariante zum Factor besitzen, so lässt sich die Ueberschiebung $(A_i A_\varkappa, l^\varrho)^{2\varrho}$, wie sie die oben genannte Categorie 3) der Ueberschiebungen von Formen A_i mit Potenzen von l fordert, im ersten und zweiten Fall darstellen als ein Product von Formen niederen Gesammtgrades α und einer Summe von niederen Ueberschiebungen mit l^ϱ. Im dritten Falle führt die Ueberschiebung sofort auf eine Summe von Producten von Formen niederen Gesammtgrades α. Die Ueberschiebung $(A_i A_\varkappa, l^\varrho)^{2\varrho}$ ist daher auszulassen. In den meisten Fällen lassen sich diese Syzyganten sofort hinschreiben. Nur einige Male wie bei den 2 Invarianten (16, 0) bedarf es hierzu breiterer Rechnung. Hier sind es die Invarianten $(r \cdot g, l^4)^8$ und $(f \cdot \alpha, l^4)^8$ die besonderer Betrachtung bedürfen. Dabei leistet die Gordan'sche Identität III, pag. 11 des genannten Werkes das Nöthige. Für $\begin{pmatrix} \varkappa & p & \varkappa \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ giebt diese die Relation:

$$L + \frac{3}{25} \tau \varkappa = \frac{3}{2} (\Delta p)^2 + \frac{5}{28} p^2,$$

mit Hilfe der Formeln pag. 40 gleichen Ortes. Berücksichtigen wir die dort gegebene Identität:

$$\Delta = \frac{2}{3} (fr)^1 + L$$

und entwickeln $\begin{pmatrix} f & r & p \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} r & \varkappa & r \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, so ergiebt sich

$$((fr)^1 p)^2 + L + \frac{5}{42} p^2 = -\frac{4}{5} (\eta r)^1 - \frac{6}{35} g r$$

und

$$(\eta r)^1 + \frac{5}{7} g r = \frac{1}{2} \tau \varkappa.$$

Mit Benutzung dieser Werthe findet man dann die Syzygante:

$$L + \frac{13}{25} \tau \varkappa - \frac{2}{5} g r - \frac{5}{84} p^2 = 0.$$

Es ist mithin

$$g \cdot r = \sum (G + L)$$

und daher $(g \cdot r, l^4)^8$ auszulassen.

Mit steter Berücksichtigung der Gordan'schen Formeln pag. 40 erhält man aus: $\begin{pmatrix} p & r & f \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \varkappa \cdot r & r \\ 0 \;\; 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$L + \frac{1}{3}\alpha \cdot f = -\frac{1}{5}(\varkappa r, r)^2 - \frac{16}{15}(\eta r)^1 + \frac{9}{28} g r,$$

$$(\varkappa r, r)^2 = \frac{25}{28} g r + \frac{2}{3}(\eta r)^1$$

und aus beiden

$$L + \frac{1}{3}\alpha f = \frac{1}{7} g r - \frac{6}{5}(\eta r)_1,$$

oder nach Einsetzung des oben gefundenen Ausdruckes für $(\eta r)_1$:

$$g r - \frac{3}{5}\tau\varkappa - \frac{1}{3}\alpha f + L = 0,$$

d. h. auch

$$\alpha \,.\, f = \sum (G_i + L_i).$$

Es ist demnach auch $(f \cdot \alpha, l^4)^8$ reducibel.

Die Identität: $\begin{pmatrix} p & \alpha & r \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ oder $(\varphi r)^1 = (\vartheta \alpha) + L$,

d. i.

$$\psi = (\varphi r)^1 + L,$$

zeigt, dass ψ Functionaldeterminante nicht linearer Covarianten ist, und dass demnach $(\psi l)^1 = (16, 4)$ auszulassen ist. Es bleiben daher von Formen $(16, i)$

(16, 0)	(16, 2)
1) $(f^2, l^7)^{14}$	1) σ
2) $(\alpha^2, l)^2$	2) $(\zeta l^6)^{12}$
	3) $(\psi l)^2$

Formen 17. Grades.

(17, 1)
1) ω
2) $(T l^7)^{14}$

Formen 18. Grades.

Aus $\begin{pmatrix} r & \alpha & \tau \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ folgt $(Q\alpha)^1 = \sigma = (\nu\tau)^1$; also ist σ ebenfalls Functionaldeterminante nicht linearer Formen und demnach auch $(18, 2) = (\sigma l)^1$ auszulassen. Dagegen ist $(\psi l^2)^3$ als Ueberschiebung der Categorie 2b beizubehalten. Es bleiben daher:

(18, 0)			(18, 2)
1) $(\zeta l^7)^{14}$	4) $(r\eta, l^5)^{10}$	7) $(g\alpha, l^3)^6$	$(\psi l^2)^3$
2) $(fg, l^6)^{12}$	5) $(r\vartheta, l^4)^8$	8) $(\psi l^2)^4$	
3) $(\varepsilon \cdot r, l^6)^{12}$	6) $(rQ, l^3)^6$	9) $(\sigma l)^2$	

Formen 19. Grades.

$$\begin{array}{c} (19,\,1) \\ \hline 1)\ (Tl^8)^{15} \\ 2)\ (\omega l)^1 \end{array}$$

Formen 20. Grades.

Hier erhält man 13 Invarianten, die aber bis auf 2 reducibel sind. Ausser der Invariante A liefert das Gordan'sche Verfahren nämlich:

1) $(f\varepsilon,\, l^8)^{16}$	4) $(f\vartheta,\, l^6)^{12}$	7) $(g^2,\, l^5)^{10}$	10) $(\vartheta\alpha,\, l^3)^6$
2) $(f\eta,\, l^7)^{14}$	5) $(fQ,\, l^5)^{10}$	8) $(\eta\alpha,\, l^4)^8$	11) $(r\varrho,\, l^2)^4$
3) $(\gamma\cdot r,\, l^7)^{14}$	6) $(\varepsilon\alpha,\, l^5)^{10}$	9) $(r\varphi,\, l^3)^6$	12) $(Q\alpha,\, l^2)^4$

13) A.

Aus der Identität $(a\varkappa)r + (\varkappa r)a + (ra)\varkappa = 0$, d. i.

$$\gamma\cdot r - f\cdot\eta - \varkappa\left(\frac{3}{2}\Delta + L\right) = 0$$

erhält man eine Relation zwischen den Producten $\gamma\cdot r$ und $f\eta$.

$\begin{pmatrix} f & f & p \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \varkappa & r & f \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ geben

$$\frac{1}{2}Hp = \frac{1}{5}(\varkappa r,\, f)_1 - \frac{4}{15} f\cdot\eta + L,$$

$$(\varkappa r,\, f)_1 = \frac{1}{3} f\eta - \gamma r$$

und eine 2. Syzygante:

$$\gamma r + f\eta + \frac{5}{2}Hp + L = 0.$$

Durch Combination beider finden wir:

$$\left\{\begin{array}{l} 2\gamma r + \frac{5}{2}Hp - \frac{3}{2}\varkappa\Delta + L' = 0, \\ 2f\eta + \frac{5}{2}Hp + \frac{3}{2}\varkappa\Delta + L'' = 0, \end{array}\right.$$

oder

$$\gamma r = \sum(G + L); \quad f\eta = \sum(G' + L').$$

Es sind daher $(f\eta,\, l^7)^{14}$ und $(\gamma\cdot r,\, l^7)^{14}$ reducibel.

Ein Gleiches findet man für die 4. Invariante. Man hat

$$(pr)a + (ra)p + (ap)r = 0,$$

d. i.

$$f\cdot\vartheta - p\left(\frac{3}{2}\Delta + L\right) - r\left(-\frac{\varkappa r}{5} + L\right) = 0,$$

d. h.

$$f\vartheta = \sum(G + Z + L) \quad \text{und} \quad (f\vartheta,\, l^6)^{12}$$

ist daher auszulassen.

Ebenso sind die Invarianten 5, 6, 7 reducibel. Die Identitäten $\begin{pmatrix} r & \varkappa & g \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} g & r & \varkappa \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ geben:

$$g^2 - r \cdot (g\varkappa)^2 = 2[(rg)^1 \varkappa]^1 + \frac{1}{3} \varkappa \cdot (rg)^2.$$

Nun findet man aus $\begin{pmatrix} r & \varkappa & r \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$(gr)_1 = \lambda + L \quad \text{und} \quad ((gr)^1 \varkappa)_1 = (\lambda \varkappa)_1 + L.$$

λ ist aber auch Functionaldeterminante und man hat daher nach einem bekannten Satz (Clebsch: Bin. Formen, Seite 117):

$$(\lambda \varkappa)_1 = \frac{1}{6} \varkappa \mu - \frac{1}{2} \tau \Delta$$

und endlich

$$g^2 - r(g\varkappa)^2 = -\frac{1}{3} \varkappa \mu + \tau \Delta + \frac{1}{3} \varkappa (rg)^2.$$

Man hat nun nicht nöthig die restirenden Covarianten $(g\varkappa)^2$ und $(rg)^2$ besonders zu untersuchen. Eine Abzählung unter den 29 Formen A_i ergiebt

$$\begin{cases} (g\varkappa)^2 = (7, 7) = c \cdot pr + L, \\ (gr)^2 = (8, 4) = d \cdot \mu + L. \end{cases}$$

Dieses Verfahren wird von nun an bei den meisten Fällen sicher und schnell zur Aufstellung der gewünschten Syzyganten führen. Es ist daher schliesslich:

$$g^2 = \sum (G + Z + L)$$

und demnach $(g^2, l^5)^{10}$ reducibel.

Ferner geben $\begin{pmatrix} f & \varkappa & \alpha \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \alpha & a & \varkappa \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ zusammen die auch anderweit zu erhaltende Relation

$$\varepsilon \cdot \alpha = ((\varkappa \alpha) f)_1 + ((f\alpha) \varkappa)_1.$$

Seite 41 finden wir nun bei Gordan:

$$\begin{cases} (f\alpha) = +\frac{6}{5} (\eta r)^2 - \frac{9}{7} (gr)_1 + L, \\ (\varkappa \alpha) = -\frac{3}{5} r\tau + L. \end{cases}$$

Benutzen wir die oben gefundene Gleichung $(gr)^1 = \lambda + L$, so giebt:

$$\begin{pmatrix} r & \varkappa & r \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} : (\eta r)^2 = -\frac{3}{7} \lambda + L,$$

und es wird

$$(f\alpha)_1 = -\frac{9}{5} + L$$

und

$$\varepsilon \cdot \alpha = -\frac{3}{5} (r\tau, f)_1 - \frac{9}{5} (\lambda \varkappa)_1 + L.$$

Die von Gordan pag. 40 gegebene Formel $(r\tau, \varphi)^\varrho$ liefert

$$(r\tau, f)_1 = \frac{3}{5}\tau \cdot (rf)_1 + \frac{2}{5} r(\tau f)_1,$$

in welcher

$$(fr) = \frac{3}{2}\Delta + L \quad \text{und} \quad (f\tau)^1 = (7, 7) = c \cdot pr + L$$

zu setzen ist. Es ist also endlich, wenn wir noch den oben gefundenen Werth für $(\lambda\varkappa)_1$ benützen.

$$\varepsilon \cdot \alpha = \sum (G + Z + L)$$

und daher auch:

$$(\varepsilon \cdot \alpha, l^5)^{10}$$

auszulassen.

Aus

$$(r\tau) f + (\tau f) r + (fr)\tau = 0$$

folgt sofort:

$$Q \cdot f = \sum (G + Z + L)$$

und die Reducibilität von

$$(fQ, l^5)^{10}.$$

Analog giebt: $(r\varkappa)\alpha + (\varkappa\alpha) r + (\alpha r)\varkappa = 0$

$$\eta \cdot \alpha + r\left(-\frac{3}{5} r\tau + L\right) - \varkappa \cdot v = 0,$$

und

$$\eta \cdot \alpha = \sum (G + Z + L).$$

Es ist also auch $(\eta . \alpha, l^4)^8$ auszulassen. Ferner lassen sich zwei, die Producte $r \cdot \varphi$ und $\vartheta \cdot \alpha$ enthaltende Syzyganten entwickeln. Die erste liefert die Identität:

$$(p\alpha) r + (\alpha r) p + (rp)\alpha = 0$$

in der Form:

$$\varphi \cdot r - vp - \vartheta\alpha = 0.$$

Die zweite beansprucht noch einmal grössere Rechnung.

Aus $\begin{pmatrix} p & r & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ findet man:

$$\vartheta \cdot \alpha = (p\alpha, r)^1 + \frac{1}{5}\varphi \cdot r,$$

oder da

$$p \cdot \alpha = \frac{36}{25}(Q\varkappa)^2 + L$$

ist (vergl. Formel 19, pag. 41 von Gordan), so ist

$$\vartheta \cdot \alpha = \frac{36}{25}\left((Q\varkappa)^2 r\right)^1 + \frac{1}{5}\varphi \cdot r + L.$$

Mit weiterer Benützung der Gordan'schen Formel Seite 41, für $(Q\varkappa)^3$

und der aus der Theorie der cubischen Formen bekannten Gleichungen für $(Q\,r)^i$ erhält man aus $\begin{pmatrix} Q & \varkappa & r \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$:

$$((Q\varkappa)^2\,r)^1 + \frac{20}{9}\,\varphi \cdot r = \frac{1}{2}\,(\tau^2\varkappa)^2 - \frac{1}{3}\,R \cdot \varkappa.$$

Da aber $\begin{pmatrix} \tau & \tau & \varkappa \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ giebt:

$$(\tau^2\varkappa)^2 = \mu\tau - \frac{1}{3}\,R\varkappa,$$

so hat man endlich:

$$((Q\varkappa)^2\,r))_1 = \frac{1}{2}\,\mu\,\tau - \frac{1}{2}\,R\,\varkappa - \frac{20}{9}\,\varphi \cdot r$$

und

$$\vartheta \cdot \alpha = \frac{18}{25}\,\mu\tau - \frac{18}{25}\,R \cdot \varkappa - 3\varphi \cdot r + L.$$

Verbinden wir diese beiden eben erhaltenen Syzyganten, so sieht man dass $\vartheta \cdot \alpha$ und $\varphi \cdot r$ Ausdrücke von der Form sind

$$\sum (G + J + L)$$

und dass mithin $(\vartheta \cdot \alpha,\ l^3)^6$ und $(\varphi \cdot r,\ l^3)^6$ auszulassen sind.

Leicht ergeben sich die Ausdrücke für die Producte $\varkappa \cdot \varrho$ und $Q \cdot \alpha$. Aus

$$(\tau\alpha)\,r + (\alpha r)\,\tau + (r\tau)\,\alpha = 0$$

hat man sofort:

$$\varrho \cdot r - \nu\tau + Q\alpha = 0.$$

Aus $\begin{pmatrix} r & Q & p \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ hat man:

$$-\frac{1}{2}\,(\tau^2 p)^2 + \frac{1}{3}\,R \cdot p = L + \frac{2}{3}\,\alpha \cdot Q.$$

Berücksichtigt man den von Gordan Seite 41 gegebenen Ausdruck für $(p\tau)^2$, so giebt $\begin{pmatrix} \tau & \tau & p \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$:

$$(\tau^2\,p)^2 = -\frac{2}{5}\,\nu\tau - \frac{1}{3}\,Rp + L.$$

Es ist daher $Q\alpha$ und damit auch ϱr von der Form:

$$\sum (G + J + L)$$

und demnach

$$(Q\alpha,\ l^2)^4 \quad \text{und} \quad (r \cdot \varrho,\ l^2)^4$$

auszulassen.

Es bleiben daher nur von Formen $(20, i)$:

$(20, 0)$
1) $(f\varepsilon,\ l^8)^{16}$
2) A

Formen 22. Grades.

Hier liefert das Gordan'sche Verfahren die 10 Invarianten

1) $(f\gamma,\ l^9)^{18}$	4) $(\eta \cdot g,\ l^6)^{12}$	7) $(f\varrho,\ l^4)^8$	10) $(\alpha \cdot \varrho,\ l)^2$
2) $(\varepsilon \cdot g,\ l^7)^{14}$	5) $(f\varphi,\ l^5)^{10}$	8) $(gQ,\ l^4)^8$	
3) $(\gamma \cdot \alpha,\ l^6)^{12}$	6) $(g\vartheta,\ l^5)^{10}$	9) $(\alpha\varphi,\ l^2)^4$	

Von diesen sind aber nur die 1., 9. und 10. irreducibel. Aus

$$(f\varkappa)\,\alpha + (\varkappa\alpha)\,f + (\alpha f)\,\varkappa = 0$$

folgt sofort:

$$\gamma \cdot \alpha = \sum (G + Z + L)$$

und die Ueberflüssigkeit der dritten. Aus

$$(r\varkappa)\,g + (\varkappa g)\,r + (g r)\,\varkappa = 0$$

ergiebt eine Abzählung leicht das Gleiche für die vierte. Denn es ist

$$(\varkappa g) = (7, 9) = c \cdot f\tau + L$$

und

$$(g r) = (8, 6) = L + d \cdot \lambda.$$

Aus den Identitäten

$$(p\alpha)\,f + (\alpha f)\,p + (fp)\,\alpha = 0$$

und

$$(pr)\,g + (rg)\,p + (gp)\,r = 0$$

folgt sofort die Ueberflüssigkeit von $(f \cdot \varphi,\ l^5)^{10}$ und wegen

$$(rg) = d\lambda + L \quad \text{und} \quad (gp) = (9, 7) = L$$

auch diejenige der 6. Invariante. Das Ausscheiden der 7. und 8. ergiebt sich aus den Identitäten:

$$(\tau\alpha)\,f + (\alpha f)\,\tau + (f\tau)\,\alpha = 0; \qquad (r\tau)\,g + (\tau g)\,r + (gr)\,\tau = 0,$$

weil

$$(f\tau) = (7, 7) = c \cdot pr + L; \qquad (f\alpha) = d\lambda + L;$$
$$(\tau g) = (11, 5) = e \cdot p\alpha + L$$

ist. Eine kleine Rechnung verlangt nur das Reduciren der 2. Invariante. Da $(fg)^1$ Functionaldeterminante ist, so ist nach einem bekannten Satze:

$$((fg)^1\,\varkappa)_1 = \frac{1}{10}\,(fg)^2 \cdot \varkappa + \frac{1}{2}\,g \cdot \varepsilon - \frac{1}{2}\,f \cdot (g\varkappa)_2.$$

Bezeichnen wir nun mit Π nachfolgend immer eine Bildung, die sich durch ein Aggregat von zerfallenden Gliedern und Gliedern L ersetzen lässt, so ist $(fg)^1$ als Form

$$(6,10) = d \cdot p\varkappa + L, \quad (g\varkappa)_2 = (7, 7) = \Pi, \quad (fg)_2 = (6, 8) = c \cdot \beta + \Pi,$$

wie man durch Abzählung aus den 29 Gordan'schen Formen erhält. Daher ist:

$$g \cdot \varepsilon = \sum (Z + G + L) + 2d \cdot (p\varkappa,\ \varkappa)_1.$$

$\begin{pmatrix} p & \varkappa & \varkappa \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ zeigt aber, dass

$$(p\varkappa,\ \varkappa)_1 = -\frac{2}{5}\beta\varkappa$$

ist, daher ist

$$g \cdot \varepsilon = \sum (Z + G + L)$$

und auch die 2. Invariante reducibel. Es bleiben daher die 3 Invarianten:

(22, 0)
1) $(f \cdot \gamma,\ l^9)^{18}$
2) $(\alpha \cdot \varphi,\ l^2)^4$
3) $(\alpha\varrho \cdot l)^2$.

Formen 23. Grades.

(23, 1)
h

Formen 24. Grades.

Wir erhalten die 9 Invarianten:

1) $(\varepsilon^2,\ l^9)^{18}$;	3) $(\gamma \cdot g,\ l^8)^{16}$;	5) $(\varepsilon\vartheta,\ l^7)^{14}$	6) $(\varepsilon Q,\ l^6)^{12}$
2) $(rT,\ l^9)^{18}$;	4) $(\varepsilon\eta,\ l^8)^{16}$;	—	—

7) $(g \cdot \varphi,\ l^4)^8$

8) $(g\varrho,\ l^3)^6$

9) $(r\omega,\ l^2)^4$.

Die Zerlegung der ersten derselben bedarf noch einiger Rechnung. Es ist:

$$((f\varepsilon)^1\,\varkappa)^1 = -\frac{1}{14}\varkappa(a\varepsilon)^2 + \frac{1}{2}\varepsilon(a\varkappa)^2 - \frac{1}{2}a(\varepsilon\varkappa)^2.$$

Da aber wegen $\begin{pmatrix} a & \varkappa & a \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$:

$$(f\varepsilon)^1 = (\varkappa H)^1 + L$$

ist, so hat man auch

$$((f\varepsilon)^1\,\varkappa)^1 = -\frac{9}{14}\varkappa(H\varkappa)_2 + \frac{1}{2}H \cdot \Delta,$$

und durch Verbindung beider:

$$\varepsilon^2 = -\frac{9}{7}\varkappa(H\varkappa)^2 + H \cdot \Delta + \frac{1}{7}\varkappa(a\varepsilon)^2 + f \cdot (\varepsilon\varkappa)^2.$$

Es ist aber

$(H\varkappa)_2$ und $(a\varepsilon)^2 = (4,\ 12) = \Pi$ und $(\varepsilon\varkappa)^2 = (5,\ 11) = \Pi$

und daher

$$\varepsilon^2 = \sum (G + Z + L) \quad \text{und } (\varepsilon^2,\ l^9)^{18}$$

reducibel.

2) Wegen

$$(Hf)\, r + (fr)\, H + (rH)\, f = 0$$

und

$$(fr)_1 = \frac{3}{2} \Delta + L, \qquad (rH) = (5,\ 11) = \Pi,$$

ist

$$T \cdot r = \sum (G + Z + L).$$

3) Aus

$$(f\varkappa)\, g + (\varkappa g)\, f + (gf)\, \varkappa = 0$$

und

$$(\varkappa g) = (7,\ 9) = \Pi, \qquad (fg) = (6,\ 10) = \Pi$$

folgt dasselbe für $\gamma \cdot g$.

4) Durch

$$(r\varkappa)\, \varepsilon + (\varkappa \varepsilon)\, r + (\varepsilon r)\, \varkappa = 0$$

und

$$(\varkappa \varepsilon) = (5,\ 13) = \Pi; \qquad (\varepsilon r) = (6,\ 8) = c \cdot \beta + \Pi$$

wird $\eta \cdot \varepsilon$ reducirt.

5) Die Identität:

$$(pr)\, \varepsilon + (r\varepsilon)\, p + (\varepsilon p)\, r = 0$$

und die Relationen für (εr) und $(\varepsilon p) = (7,\ 11) = \Pi$ zeigen, dass $(\vartheta \cdot \varepsilon,\ l^7)^{14}$ auszulassen ist.

6)
$$(r\tau)\, \varepsilon + (\tau \varepsilon)\, r + (\varepsilon r)\, \tau = 0$$

in Verbindung mit

$$(\tau \varepsilon) = (9,\ 9) = \Pi,$$

liefert die Relation

$$Q \cdot \varepsilon = \sum (G + Z + L).$$

Wir haben ferner:

7)
$$(p\alpha)\, g + (\alpha g)\, p + (gp)\, \alpha = 0$$

oder

$$\varphi \cdot g + p \cdot (12,\ 4) + \alpha \cdot (9,\ 7) = 0,$$

worin $(12,\ 4)$ und $(9,\ 7)$ aber Π sind.

8)
$$(\tau\alpha)\, g + (\alpha g)\, \tau + (g\tau)\, \alpha = 0,$$
$$\varrho \cdot g + \tau \cdot (12,\ 4) + \alpha \cdot (11,\ 5) = 0,$$

wo $(11,\ 5)$ auch ein Π ist.

9)
$$(\nu\alpha)\, r + (\alpha r)\, \nu + (r\nu)\, \alpha = 0,$$
$$\omega \cdot r - \nu^2 + \alpha \cdot (13,\ 3) = 0, \qquad (13,\ 3) = \Pi.$$

Die letzten 3 Identitäten beweisen auch das Ausfallen der letzten 3 Invarianten. Es bleiben daher *keine Formen* 24. *Grades* übrig.

Formen 25. Grades.

$$\frac{(25,\,1)}{(h\,l)^1}$$

Formen 26. Grades.

Nach Gordan erhält man die Invarianten

1) $(fT,\,l^{11})^{22}$; 2) $(\gamma\cdot\varepsilon,\,l^{10})^{20}$; 3) $(T\alpha,\,l^8)^{16}$; 4) $(\varepsilon\cdot\varphi,\,l^6)^{12}$

$\left\{\begin{array}{l} 5)\ (\varepsilon\cdot\varrho,\,l^5)^{10} \\ 6)\ (\eta\cdot\varphi,\,l^5)^{10}\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} 7)\ (f\omega,\,l^4)^8 \\ 8)\ (\eta\cdot\varrho,\,l^4)^8 \\ 9)\ (\vartheta\varphi,\,l^4)^8\end{array}\right.$ $\begin{array}{l} 10)\ (\vartheta\varrho,\,l^3)^6 \\ 11)\ (Q\varphi,\,l^3)^6\end{array}$

12) $(Q\cdot\varrho,\,l^2)^4$ 13) $(\alpha\cdot\omega,\,l)^2$.

Man erhält zu diesen 13 Invarianten die entsprechenden Syzyganten:

2) $$(f\varkappa)\,\varepsilon + (\varkappa\varepsilon)\,f + (\varepsilon f)\,\varkappa = 0$$
oder
$$\gamma\cdot\varepsilon + f\cdot(5,\,13) + \varkappa\cdot(4,\,14) = 0,$$
wo $(5,\,13)$ und $(4,\,14)$ Formen Π sind.

3) $$(Hf)\,\alpha + (f\alpha)\,H + (\alpha H)\,f = 0$$
oder
$$T\cdot\alpha + H\cdot(c\cdot\lambda + L) + (9,\,9)\cdot f = 0; \qquad (9,\,9) = \Pi.$$

4) $$(p\alpha)\,\varepsilon + (\alpha\varepsilon)\,p + (\varepsilon p)\,\alpha = 0;$$
d. i.
$$\varphi\cdot\varepsilon + p\cdot(10,\,8) + \alpha\cdot(7,\,11) = 0;$$
wo $(10,\,8)$ und $(7,\,11)$ Π sind.

5) $$(\tau\alpha)\,\varepsilon + (\alpha\varepsilon)\,\tau + (\varepsilon\tau)\,\alpha = 0,$$
d. i.
$$\varrho\cdot\varepsilon + \tau\cdot(10,\,8) + \alpha\cdot(9,\,9) = 0;$$

6) $$(p\alpha)\,\eta + (\alpha\eta)\,p + (\eta p)\,\alpha = 0,$$
d. i.
$$\varphi\cdot\eta + p\cdot(12,\,6) + \alpha\cdot(9,\,9) = 0; \qquad (12,\,6) = \Pi;$$

7) $$(\nu\alpha)\,f + (\alpha f)\,\nu + (f\nu)\,\alpha = 0,$$
d. i.
$$\omega\cdot f + \nu(c\cdot\lambda + L) + \alpha\cdot(11,\,7) = 0; \qquad (11,\,7) = \Pi;$$

8) $$(\tau\alpha)\,\eta + (\alpha\eta)\,\tau + (\eta\tau)\,\alpha = 0,$$
d. i.
$$\varrho\cdot\eta + \tau\cdot(12,\,6) + \alpha\cdot(11,\,7) = 0.$$

9) $$(p\alpha)\,\vartheta + (\alpha\vartheta)\,p + (\vartheta p)\,\alpha = 0,$$
d. i.
$$\varphi\cdot\vartheta + p(14,\,4) + \alpha(11,\,7) = 0; \qquad (14,\,4) = c\cdot\psi + \Pi.$$

10) $$(\tau\alpha)\,\vartheta + (\alpha\vartheta)\,\tau + (\vartheta\tau)\,\alpha = 0,$$
d. i.
$$\varrho \cdot \vartheta + \tau \cdot (14, 4) + \alpha(13, 5) = 0; \qquad (13, 5) = \Pi.$$

11) $$(r\tau)\,\varphi + (\tau\varphi)\,r + (\varphi r)\,\tau = 0;$$
d. i.
$$Q \cdot \varphi + r \cdot (17, 3) + \tau \cdot (14, 4) = 0; \qquad (17, 3) = \Pi.$$

12) $$(r\tau)\,\varrho + (\tau\varrho)\,r + (\varrho r)\,\tau = 0,$$
d. i.
$$Q \cdot \varrho + r \cdot (19, 1) + \tau \cdot (16, 2) = 0,$$
wo $(19, 1) = \Pi$ und $(16, 2) = c \cdot \sigma + \Pi$ ist.

Es bleiben daher nur:

(26, 0)
1) $(fT, l^{11})^{22}$
2) $(\alpha \cdot \omega, l)^2$

Formen 28. Grades.

Unser Verfahren liefert die Invarianten:

1) $(Tg, l^{10})^{20}$, 2) $(\gamma \cdot \varphi, l^7)^{14}$, 3) $(\gamma \cdot \varrho, l^6)^{12}$,

$\left\{\begin{array}{l} 4)\ (g\omega, l^3)^6 \\ 5)\ (\varphi^2, l^3)^6 \end{array}\right.$ 6) $(\varphi\varrho, l^2)^4$, 7) $(\varrho^2 l)^2$.

Die Ueberflüssigkeit aller dieser Bildungen ergiebt sich sofort aus folgenden Syzyganten;

1) $$(Hf)\,g + (fg)\,H + (gH)\,f = 0,$$
oder
$$T \cdot g + H \cdot (6, 10) + f \cdot (7, 13) = 0; \qquad (6, 10) \text{ und } (7, 13) \text{ sind } \Pi.$$

2) $$(f\varkappa)\,\varphi + (\varkappa\varphi)\,f + (\varphi f)\,\varkappa = 0$$
oder
$$\gamma \cdot \varphi + f \cdot (13, 7) + \varkappa \cdot (12, 8) = 0; \qquad (13, 7) \text{ und } (12, 8) \text{ sind } \Pi.$$

3) $$(f\varkappa)\,\varrho + (\varkappa\varrho)\,f + (\varrho f)\,\varkappa = 0$$
oder
$$\gamma \cdot \varrho + f \cdot (15, 5) + \varkappa(14, 6) = 0; \qquad (15, 5) \text{ und } (14, 6) \text{ sind } \Pi.$$

4) $[(\nu\alpha)\,g] = 0$, wie wir von jetzt an die stets angewandte Identität $(\nu\alpha)\,g + (\alpha g)\,\nu + (g\nu)\,\alpha = 0$ der Kürze wegen immer bezeichnen wollen, oder
$$\omega \cdot g + (12, 4)\,\nu + \alpha \cdot (15, 5) = 0.$$

5) $[(p\alpha)\,\varphi] = 0$ oder: $\varphi^2 + p \cdot (18, 2) + \alpha \cdot (15, 5) = 0.$

6) $[(\tau\alpha)\varphi] = 0$ oder: $\varrho \cdot \varphi + \tau \cdot (18, 2) + \alpha \cdot (17, 3) = 0,$

7) $[(\tau\alpha)\varrho] = 0$ oder: $\varrho^2 + \tau \cdot (20, 0) + \alpha \cdot (19, 1) = 0.$

Es fallen daher alle Formen $(28, i)$ aus.

Formen 30. Grades.

Man erhält die Invarianten:

1) $(\varepsilon T, l^{12})^{24}$; 2) $(\varepsilon\omega, l^5)^{10}$; 3) $(\eta\omega, l^4)^8$; 4) $(\vartheta\omega, l^3)^6$;

$\begin{cases} 5)\ (rh, l^2)^4 \\ 6)\ (Q\omega, l^2)^4 \end{cases}$ 7) B.

Das Ausfallen der 6 ersten ergiebt sich aus nachfolgenden Identitäten:

1) $[(Hf)\varepsilon] = 0$ oder: $T\varepsilon + H \cdot (4, 14) + f \cdot (5, 17) = 0;$

$(4, 14) = c \cdot \xi + \Pi.$

2) $[(\nu\alpha)\varepsilon] = 0$ oder: $\omega \cdot \varepsilon + \nu \cdot (10, 8) + \alpha \cdot (13, 9) = 0,$

3) $[(r\varkappa)\omega] = 0$ oder: $\eta \cdot \omega + r \cdot (19, 5) + \varkappa \cdot (20. 2) = 0,$

4) $[(pr)\omega] = 0$ oder: $\vartheta \cdot \omega + p \cdot (20, 2) + r \cdot (21, 3) = 0,$

5) $[(\sigma\alpha)r] = 0$ oder: $h \cdot r - \sigma \cdot \nu + \alpha \cdot (19, 3) = 0,$

6) $[(r\tau)\omega] = 0$ oder: $Q \cdot \omega + r \cdot (23, 1) + \tau \cdot (20, 2) = 0;$

$(23, 1) = c \cdot h + \Pi,$

ist also auf 5) zurückführbar. Es *bleibt daher* nur die *Invariante B.*

Auszulassende Formen vom 32. bis 48. Grad.

Man erhält nach Gordan ausser diesen noch 20 Invarianten höherer Grade, deren Ueberflüssigkeit sich aus den beigefügten Syzyganten ergiebt.

I. (32, 0).

1) $(T \cdot \varphi, l^9)^{18}$; $[(Hf)]\varphi = 0$

oder:

$$T \cdot \varphi + H \cdot (12, 8) + f \cdot (13, 11) = 0.$$

2) $(T \cdot \varrho, l^8)^{16}$; $[(Hf)\varrho] = 0$

oder:

$$T \cdot \varrho + H \cdot (14, 6) + f \cdot (15, 9) = 0.$$

3) $(\gamma \cdot \omega, l^6)^{12}$; $[(f\varkappa)\omega] = 0$

oder:

$$\gamma \cdot \omega + f \cdot (19, 5) + \varkappa \cdot (18, 6) = 0.$$

4) $(f \cdot h, l^4)^8$; $[(\sigma\alpha)f] = 0$

oder:

$$f \cdot h + \sigma(c \cdot \lambda + L) + \alpha \cdot (17, 7) = 0.$$

oder: 5) $(\varphi \cdot \omega,\ l^2)^4; \quad [(p\alpha)\,\omega] = 0$

$$\varphi \cdot \omega + p(24, 0) + \alpha(21, 3) = 0.$$

oder: 6) $(\alpha \cdot h,\ l)^2; \quad [(\nu\varrho)\,\alpha] = 0$ *)

$$h \cdot \alpha + A \cdot \nu - \omega\varrho = 0.$$

oder: 7) $(\varrho \cdot \omega,\ l)^2; \quad (\tau\alpha)\,\omega + (\alpha\omega)\,\tau + (\omega\tau)\,\alpha = 0$ **)

$$h \cdot \alpha + \omega\varrho + \tau \cdot (24, 0) = 0.$$

Die beiden letzten bestimmen $h \cdot \alpha$ und $\varrho\omega$ in der gewünschten Weise.

II. (34, 0).

oder: 1) $(gh,\ l^3)^6; \quad [(\sigma\alpha)\,g] = 0$

$$h \cdot g + \sigma \cdot (12, 4) + \alpha \cdot (21, 5) = 0.$$

III. (36, 0).

oder: 1) $(T\omega,\ l^8)^{16}; \quad [(Hf)\,\omega] = 0$

$$T \cdot \omega + H \cdot (18, 6) + f \cdot (19, 9) = 0.$$

oder: 2) $(\varepsilon h,\ l^5)^{10}; \quad [(\sigma\alpha)\,\varepsilon] = 0$

$$h \cdot \varepsilon + \sigma \cdot (10, 8) + \alpha \cdot (19, 9) = 0.$$

oder: 3) $(\eta h,\ l^4)^8; \quad [(r\varkappa)\,h] = 0$

$$\eta \cdot h + r \cdot (25, 5) + \varkappa \cdot (26, 2) = 0.$$

oder: 4) $(\vartheta h,\ l^3)^6; \quad [(pr)\,h] = 0$

$$\vartheta \cdot h + p \cdot (26, 2) + r \cdot (27, 3) = 0.$$

oder: 5) $(Qh,\ l^2)^4; \quad [(r\tau)\,h] = 0$

$$Q \cdot h + r \cdot (29, 1) + \tau \cdot (26, 2) = 0.$$

oder: 6) $(\omega^2,\ l)^2; \quad [(\nu\alpha)\,\omega] = 0$

$$\omega^2 + \nu \cdot (24, 0) + \alpha \cdot (27, 1) = 0.$$

---

*) Aus $\begin{pmatrix} \tau & \alpha & \nu \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} r & \alpha & \tau \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ folgt $h = (\nu\varrho)^1$.

**) Aus $\begin{pmatrix} r & \alpha^2 & \tau \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ erhält man $h = (\omega\tau)$.

IV. (38, 0).

d. i.: 1) $(\gamma \cdot h,\ l^6)^{12}$; $[(f\varkappa)\,h] = 0$

$$\gamma \cdot h + f \cdot (25, 5) + \varkappa \cdot (24, 6) = 0.$$

d. i.: 2) $(\varphi \cdot h,\ l^2)^4$; $[(p\alpha)\,h] = 0$

$$\varphi \cdot h - p \cdot B + \alpha \cdot (27, 3) = 0.$$

d. i.: 3) $(\varrho \cdot h,\ l)^2$; $[(\tau\alpha)\,h] = 0$

$$\varrho \cdot h - \tau \cdot B + \alpha \cdot (29, 1) = 0.$$

V. (42, 0).

d. i.: 1) $(T \cdot h,\ l^8)^{16}$; $[(Hf)\,h] = 0$

$$T \cdot h + H \cdot (24, 6) + f \cdot (25, 9) = 0.$$

d. i.: 2) $(\omega \cdot h,\ l)^2$; $[(\sigma\alpha)\,\omega] = 0$

$$h \cdot \omega + \sigma \cdot (24, 0) + \alpha \cdot (33, 1) = 0.$$

VI. (48, 0).

d. i.: 1) $(h^2 l)^2$; $[(\sigma\alpha)\,h] = 0$

$$h^2 - \sigma \cdot B + \alpha \cdot (39, 1) = 0.$$

Zum Schlusse geben wir noch eine Uebersicht über die erhaltenen Formen: Wir entnehmen derselben, dass die von Herrn Prof. Sylvester im American Journal II. Bd., pag. 230 veröffentlichte Tabelle meist nur in den höchsten Ordnungen jedes Grades von der unsrigen abweicht. Namentlich enthält die erstere keine der Formen der letzten schiefen Reihe von (5, 13) bis (16, 2). Aus mir gewordenen brieflichen Mittheilungen des Herrn Sylvester entnehme ich aber, dass es demselben später gelungen ist, die Existenz einer Form (5, 13) nachzuweisen, (vergl. hierüber besonders eine Note von Herrn Hammond in den Proceedings of the London Math. Soc. XIV, 85—88) und dass er es für wahrscheinlich hält, dass neben seinen Grundformen deshalb noch viele andere vorhanden sind. Weitere Unterschiede sind folgende: Sylvester hat $(10, 4)^3$, $(22, 0)^1$ und keine Formen (13, 3), (18, 2), (19, 1), (20, 0), (23, 1), (25, 1), (26, 0), (30, 0).

Uebersicht über das volle System.

	Ordnung in den Variabeln															
Grad in den Coefficienten	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1								1								
2			1				1				1					
3				1		1		1		1		1				1
4	1				2		1		2		1				1	
5		1		2		2		2		2				1		
6			3		2		2		2				1			
7		3		2		4		2				1				
8	3		3		3		3				1					
9		3		5		2				1						
10			4		4				1							
11		5		3				1								
12	6		6				1									
13		7		1		1										
14	4				2											
15		3		1												
16	2		3													
17		2														
18	9		1													
19		2														
20	2															
22	3															
23		1														
25		1														
26	2															
30	1															

Oppenheim a./R., 28. October 1887.