

### III. Ueber Messung kleiner electricischer Widerstände; von C. Dieterici.

Bei electricischen Versuchen kommt es vor, dass man einen Strom in zwei Zweige zu theilen wünscht, in denen die Intensitäten ein sehr grosses und genau bekanntes Verhältniss haben, z. B. wenn man die Intensität eines starken electricischen Stromes mit einem empfindlichen Galvanometer messen will. Zu diesem Zwecke hat man dann den beiden Zweigen Widerstände zu geben, welche in einem sehr kleinen scharf zu bestimmenden Verhältniss zu einander stehen. Den grösseren dieser Widerstände mit Genauigkeit nach der Siemens'schen Einheit zu messen, bietet keine Schwierigkeit, bei der Bestimmung des kleineren treten jedoch Schwierigkeiten auf; ja schon der Begriff des Widerstandes bedarf hier einer Erläuterung, da das, was hier Widerstand zu nennen ist, damit sich die Stromstärken umgekehrt wie die Widerstände verhalten, mit bedingt ist durch die Art, wie den Enden des gut leitenden Zweiges die Electricität zu- und abgeführt wird. Solche kleine Widerstände zu messen, ist die im Folgenden behandelte Aufgabe.

Die Methode der Messung ist dieselbe, wie sie G. Kirchhoff und G. Hansemann<sup>1)</sup> angewendet haben, um die electricische Leitungsfähigkeit von Stäben mit rechteckigem Querschnitt zu messen; sie beruht auf der Anwendung eines Differentialgalvanometers *D* (Fig. 1), dessen Windungen so eingestellt werden können, dass ein Strom, der sie hintereinander durchläuft, keine Ablenkung der Magnetnadel hervorbringt. Dem Drahte, dessen oben definirter Widerstand  $\rho$  gemessen werden soll, wird der von einer Kette *E* kommende Strom durch zwei an seine Enden angelöthete Drähte zu- und abgeführt. Zwei andere ebenfalls an seine Enden angelöthete Drähte werden durch das eine Gewinde des Galvanometers zu einer Nebenschliessung verbunden. Der electricische Strom wird dann von dem zu messenden Drahtwiderstande

1) G. Kirchhoff u. G. Hansemann, Wied. Ann. **13**, p. 406. 1881 und Berl. Ber. 1. Juli 1880.

zu einem Vergleichswiderstand  $P$ , von welchem ebenfalls eine das zweite Galvanometergewinde enthaltende Nebenschliessung ausgeht, geleitet, durchläuft diesen und kehrt zur Kette zurück. Als Vergleichswiderstand ist eine Quecksilberplatte verwendet von der Gestalt eines Doppel- $\Gamma$ , d. h. eine Platte, welche besteht aus zwei parallelen Streifen, die durch einen Querstreifen verbunden sind. Die Gestalt der Platte ist dem Drahtsystem, dessen Widerstand gemessen werden soll, nachgebildet. Zwei parallele und gleichgerichtete Streifenenden,

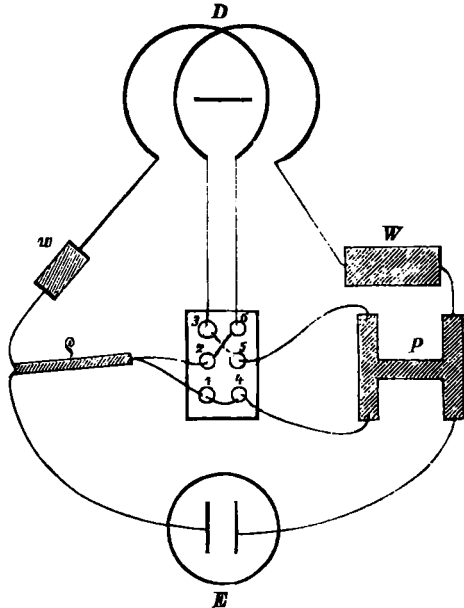


Fig. 1.

welche den angelötheten Zuleitungsdrähten entsprechen, sind durch die Hauptleitung, die beiden anderen Streifenenden sind durch das zweite Galvanometergewinde verbunden. In dieser Platte ist der Widerstand berechenbar aus den Dimensionen und der Leitungsfähigkeit der Substanz.

Sind bei der beschriebenen Anordnung die Galvanometerwindungen so eingestellt, dass ein Strom, welcher sie hintereinander durchläuft, keine Ablenkung der Nadel hervorbringt, eine Forderung, welche durch Verbindung der Quecksilbernäpfe 3 und 6 leicht geprüft werden kann, so wird, wenn man nun durch Verbindung der Näpfe 2, 6 und 3, 5 die Windungen nebeneinander einschaltet, im Allgemeinen die Nadel des Galvanometers einen Ausschlag anzeigen. Mit Hülfe von Widerstandsscalen, welche in die Nebenschliessungen ein-

geschaltet sind (in der Figur  $w$  und  $W$ ), kann man dann die Widerstände der Galvanometerdrähte so ändern, dass die Ablenkung der Nadel verschwindet. Seien  $w$  und  $W$  die Widerstände der Galvanometerdrähte in diesem Fall, so ist<sup>1)</sup>:

$$\varrho : P = w : W.$$

Fügt man nun von neuem den Drähten solche Widerstände hinzu, dass die Nadel abermals in der Ruhelage ist, und bezeichnen  $w'$  und  $W'$  die Gesamtwiderstände der Drähte in diesem Falle, so ist ebenso:

$$\varrho : P = w' : W'.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt dann:

$$(1) \quad \varrho = P \frac{w' - w}{W' - W}.$$

Sind demnach die neu hinzugefügten Widerstände bekannt, und kann man  $P$  berechnen, so ist der zu messende Widerstand  $\varrho$  dadurch bestimmt.

Der Widerstand  $P$  ist definirt durch die Gleichung:

$$PJ = \varphi'' - \varphi'.$$

$\varphi'' - \varphi'$  ist die Potentialdifferenz zwischen den beiden Punkten der Platte, von denen die Nebenschliessung ausgeht, und  $J$  bedeutet die Intensität des durch die Hauptleitung der Platte zugeführten electrischen Stromes. Um also  $P$  zu ermitteln, muss ein Ausdruck für das Potential in einer Platte, die die Gestalt eines Doppel- $\gamma$  hat, ermittelt werden, und das ist möglich vermöge einer Methode der conformen Abbildung, welche gestattet, ein von geraden Linien begrenztes ebenes Flächenstück auf einer unendlichen Halbebene abzubilden. Es hat keine Schwierigkeit, für die letztere das Potential anzugeben. Es seien in dieser Halbebene die Coordinaten bestimmt durch die complexe Variable:

$$t = 0 + \tau i,$$

und zwar sei in dieser Halbebene der imaginäre Theil der Variablen  $t$  stets positiv. Die partielle Differentialgleichung, welcher allgemein das Potential  $u$  genügt:

$$\Delta u = 0,$$

---

1) Betreffs der näheren Ausführung vgl. G. Kirchhoff, Berl. Monatsber. Juli 1880.

wird dann, weil das Potential nur von zwei Coordinaten abhängig ist, erfüllt durch den reellen oder auch imaginären Theil irgend einer Function von  $t$ , und nach bekannten Betrachtungen<sup>1)</sup> liefert der reelle Theil, gleich einer Constanten gesetzt, die Curven gleichen Potentials, der imaginäre Theil die Stromcurven. Der obigen Bedingung sowie auch der, dass das Potential in den Einstromungspunkten, deren Coordinaten allgemein mit  $\gamma$  bezeichnet werden mögen, unendlich wird, genügt man also durch:

$$u = \varphi + i\psi = \Sigma \log (t - \gamma).$$

Trennt man durch Einführung der Polarcoordinaten  $r$  und  $\vartheta$  den reellen Theil vom imaginären, so genügt man allen Bedingungen, denen das Potential unterworfen ist, durch

$$(2) \quad \varphi = C - \frac{1}{\pi \lambda \varepsilon} \Sigma E \log r.$$

$\lambda$  bedeutet dabei die Leitungsfähigkeit der Substanz,  $\varepsilon$  die Dicke der Platte  $E$ , die durch einen Einstromungspunkt in der Zeiteinheit zugeführte Electricitätsmenge und  $C$  eine Constante, und es ist:

$$\Sigma E = 0.$$

Das Potential für die Platte von der Gestalt eines Doppel- $\top$  ist also bestimmt, wenn man diejenige Function, welche diese Platte auf der unendlichen Halbebene conform abbildet, in die Gleichung (2) an Stelle der Variablen  $t$  einführt.

Diese Abbildungsfuction zu ermitteln, ermöglicht eine Methode, welche von H. A. Schwarz<sup>2)</sup> angegeben und von Kirchhoff<sup>3)</sup> in der Theorie des Condensators angewendet ist.

Bezeichnet man die Coordinaten der Platte von der Gestalt eines Doppel- $\top$  mit  $z = x + iy$ , so setze man:

$$(3) \quad \frac{dz}{dt} = C(a_1 - t)^{-a_1} (a_2 - t)^{-a_2} \dots \dots \dots (a_n - t)^{-a_n}$$

wo  $C$  eine im Allgemeinen complexe Constante,  $a_1 a_2 \dots a_n$  reelle Constanten,  $a_1 a_2 \dots a_n$  rational sein sollen. Das  $t$ -Ge-

1) Vgl. Kirchhoff, Mechanik. p. 274 ff.

2) H. A. Schwarz, Crelle's Journ. 70.

3) Kirchhoff, Berl. Monatsber. März 1877. Auf diese Abhandlung verweist der Verf. betreffs der näheren Ausführung der Abbildungsmethode.

biet, welches durch diese Beziehung auf einem nur von geraden Linien begrenzten  $z$ -Gebiete abgebildet wird, wenn die nöthigen Bestimmungen getroffen sind, um die Vieldeutigkeit von  $dz/dt$  zu heben, ist begrenzt durch die reelle  $\sigma$ -Axe und einen um den Punkt  $t=0$  mit unendlich grossem Radius gezogenen Halbkreis, der auf der positiv imaginären Seite der  $\sigma$ -Axe liegt; ausgeschlossen bleiben unendlich kleine Flächen, welche durch Halbkreise begrenzt sind, die mit unendlich kleinem Radius  $\varepsilon$  um die auf der reellen  $\sigma$ -Axe liegenden Punkte  $a_1 a_2 \dots a_n$  gezogen sind. Während dann  $t$  die geradlinigen Theile seiner Begrenzung durchläuft, durchläuft auch  $z$  seine geraden Begrenzungslinien. Den Punkten  $a_1 \dots a_n$  im  $t$ -Gebiet entsprechen die Ecken der  $z$ -Figur; während  $t$  die um diese Punkte gezogenen unendlich kleinen Halbkreise durchläuft, durchläuft  $z$  Kreisbögen, die um die Ecken mit unendlich kleinem oder unendlich grossem Radius gezogen sind, oder endlich gerade Linien von endlicher Länge, die in der Unendlichkeit liegen;  $\alpha_1 \pi, \alpha_2 \pi \dots \alpha_n \pi$  sind die Winkel, welche zwei aufeinander folgende Begrenzungsstücke des  $z$ -Gebietes im positiven Sinne bilden, d. h. in dem Sinne, in welchem die  $x$ -Axe um  $\frac{1}{2}\pi$  gedreht werden muss, um der  $y$ -Axe parallel zu werden. Dem unendlich grossen Halbkreise im  $t$ -Gebiete endlich entspricht im  $z$ -Gebiet ebenfalls ein unendlich grosser oder unendlich kleiner Kreisbogen.

Ist also das  $z$ -Gebiet bekannt, so ist zunächst  $n$  bekannt, da  $(n+1)$  die Anzahl der im Endlichen liegenden geraden Begrenzungsstücke ist; ferner sind die Grössen  $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$  bekannt, da  $\alpha_1 \pi, \alpha_2 \pi \dots \alpha_n \pi$  die Winkel bedeuten, welche je zwei aufeinander folgende dieser Begrenzungslinien in dem angegebenen positiven Sinne mit einander bilden. Die Grössen  $a$  und  $C$  können theilweise beliebig gewählt werden, theilweise sind sie aus den Dimensionen und der Lage des  $z$ -Gebietes zu bestimmen.

Um nach dieser Methode das  $z$ -Gebiet, welches aus zwei parallelen Streifen besteht, die durch einen Querstreifen, der zur Richtung der Längsstreifen senkrecht ist, verbunden sind, auf der positiv imaginären  $t$ -Halbebene abzubilden, mögen zunächst die parallelen Längsstreifen als unendlich lang an-

genommen sein. Der Nullpunkt des  $z$ -Coordinatensystems sei in der Mitte der einen längsten Seite, die  $x$ -Axe in Richtung der Längsstreifen, die  $y$ -Axe in Richtung des Querstreifens angenommen; endlich sei  $a$  die Breite der Längsstreifen,  $2c$  die Breite,  $b$  die Länge des Querstreifens.

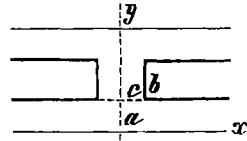


Fig. 2.

Die Abbildung dieses Gebietes auf dem bezeichneten  $t$ -Gebiete geschieht dann durch die Beziehung:

$$(4) \quad N \frac{dz}{dt} = \lambda^2 \mu^2 \frac{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}}{(1-\lambda^2 t^2)(1-\mu^2 t^2)}.$$

$Nk\lambda\mu$  sind dabei positive reelle Constanten, von denen  $k < 1$ ,  $\mu < k < 1$  und  $\lambda > 1$  ist.

Den unendlich kleinen Halbkreisen, die im  $t$ -Gebiete um die Punkte  $t = \pm 1/\lambda$  und  $t = \pm 1/\mu$  gezogen sind, entsprechen im  $z$ -Gebiete vier gerade Linien, für welche nach den angegebenen Bezeichnungen ist:

$$\begin{array}{llll} 1) x = +\infty & 2) x = -\infty & 3) x = +\infty & 4) x = -\infty \\ y \circ \dots a & y \circ \dots a & y a + b \dots 2a + b & y a + b \dots 2a + b. \end{array}$$

Dem unendlich grossen Halbkreise im  $t$ -Gebiete entspricht im  $z$ -Gebiet ein unendlich kleiner Halbkreis, der um den Punkt  $x = 0$ ,  $y = 2a + b$  gezogen ist.

$$\begin{array}{ll} \text{Den Punkten } t = \pm 1 & \text{entspricht } z = \pm c + ia \\ t = \pm 1/k & z = \pm c + i(a + b). \end{array}$$

Integriert man den vorigen Ausdruck (4) über die um die Punkte  $t = 1/\lambda$  und  $t = 1/\mu$  mit dem unendlich kleinen Radius  $\varepsilon$  gezogenen Halbkreise, so kann man für  $t = 1/\lambda$  den Ausdruck (4) schreiben:

$$N dz = A \frac{dt}{\left(\frac{1}{\lambda} - t\right)},$$

wo  $A$  das Product der übrigen sieben linearen Factoren bezeichnet, wenn man in ihnen  $t = 1/\lambda$  setzt.

Durch Integration folgt dann:

$$N \int dz = -A \left[ \log \left( \frac{1}{\lambda} - t \right) \right]_{t = \frac{1}{\lambda} - \varepsilon}^{t = \frac{1}{\lambda} + \varepsilon}$$

und wenn man setzt:

$$\left(\frac{1}{\lambda} - t\right) = \varepsilon (\cos \omega - i \sin \omega), \text{ also } \log \left(\frac{1}{\lambda} - t\right) = \log \varepsilon - i \omega,$$

wo  $\omega$  von 0 bis  $\pi$  wächst, so folgt:

$$Nia = A i \pi.$$

Dasselbe Verfahren für den Fall  $t = 1/\mu$  angewendet, gibt dann die Beziehung:

$$\frac{2N}{\pi \lambda^2 \mu^2} a = \frac{\sqrt{\lambda^2 - 1} \cdot \lambda^2 - k^2}{\lambda} \frac{1}{\lambda^2 - \mu^2} = \frac{\sqrt{\mu^2 - 1} \cdot \mu^2 - k^2}{\mu} \frac{1}{\mu^2 - \lambda^2},$$

woraus: 
$$\frac{\sqrt{\lambda^2 - 1} \cdot \lambda^2 - k^2}{\lambda} = - \frac{\sqrt{\mu^2 - 1} \cdot \mu^2 - k^2}{\mu}$$

und weiter 
$$\lambda = \frac{k}{\mu} \quad \text{folgt.}$$

Den Ausdruck (4) kann man schreiben unter der Form:

$$N \frac{dz}{dt} = \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}} \left\{ \frac{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}{(1-\lambda^2 t^2)(1-\mu^2 t^2)} \right\} \lambda^2 \mu^2$$

oder:

$$N \frac{dz}{dt} = \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}} \left\{ A + B \frac{t^2}{1-\mu^2 t^2} + C \frac{t^2}{1-\lambda^2 t^2} \right\} \lambda^2 \mu^2,$$

wo  $A = 1,$

$$B = \frac{k^2 - \mu^2 \cdot 1 - \mu^2}{\mu^2 - \lambda^2}, \quad C = \frac{k^2 - \lambda^2 \cdot 1 - \lambda^2}{\lambda^2 - \mu^2}$$

bedeutet. Setzt man nun:

$$t = \sin am(uk), \quad \mu = k \sin am(\beta k),$$

so ist nach obiger Beziehung zwischen  $\mu$ ,  $k$  und  $\lambda$  bei der Jacobi'schen Bezeichnungsweise:

$$\lambda = k \sin am(\beta + iK'k).$$

Durch Integration vermittelt elliptischer Integrale dritter Gattung folgt dann:

$$Nz = k^2 u + \frac{B k^2}{k^2 \sin am \beta \cos am \beta \Delta am \beta} II(u, \beta) \\ + \frac{C k^2}{k^2 \sin am \beta \cos am \beta \Delta am \beta} II(u, \beta + iK')$$

oder:

$$Nz = k^2 u + \frac{k^2 \sin am \beta \cos am \beta \Delta am \beta}{k^2 \sin^4 am \beta - 1} II(u, \beta) \\ - \frac{k^2 \sin am \beta \cos am \beta \Delta am \beta}{1 - k^2 \sin^4 am \beta} II(u, \beta + iK')$$

oder: 
$$Nz = k^2 u - \frac{1}{2} k^2 \sin am 2\beta \{ II(u, \beta) + II(u, \beta + iK') \}.$$

Führt man nun  $\vartheta$ -Functionen ein und berücksichtigt, dass aus der obigen Relation zwischen  $\lambda$ ,  $k$  und  $\mu$ :

$$4Na = \pi k^2 \sin am 2\beta$$

folgt, so ergibt sich:

$$z = \frac{4a}{\pi} \frac{u}{\sin am 2\beta} - \frac{2a}{\pi} \left\{ u \frac{d}{d\beta} \log \vartheta(\beta) \vartheta_1(\beta) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \log \frac{\vartheta(\beta-u) \vartheta_1(\beta-u)}{\vartheta(\beta+u) \vartheta_1(\beta+u)} \right\}$$

oder:

$$z = \frac{a}{\pi} \left\{ 2u \left( \frac{2}{\sin am 2\beta} - \frac{d}{d\beta} \log \vartheta(\beta) \vartheta_1(\beta) \right) - \log \frac{\vartheta(\beta-u) \vartheta_1(\beta-u)}{\vartheta(\beta+u) \vartheta_1(\beta+u)} \right\}.$$

Da nun für  $u = K$ ,  $z = c + ia$  ist, so folgt hieraus:

$$c = \frac{a}{\pi} 2K \left( \frac{2}{\sin am 2\beta} - \frac{d}{d\beta} \log \vartheta(\beta) \vartheta_1(\beta) \right)$$

und somit:

$$(5) \quad z = c \frac{u}{K} - \frac{a}{\pi} \log \frac{\vartheta(\beta-u) \vartheta_1(\beta-u)}{\vartheta(\beta+u) \vartheta_1(\beta+u)}.$$

Die Gleichung:

$$\frac{c}{a} = \frac{2K}{\pi} \left( \frac{2}{\sin am 2\beta} - \frac{d}{d\beta} \log \vartheta(\beta) \vartheta_1(\beta) \right)$$

ist, da:

$$\frac{2}{\sin am 2\beta} = - \frac{d}{d\beta} \log \frac{d}{d\beta} \sin am \beta = \frac{d}{d\beta} \log \frac{\vartheta(\beta) \vartheta_1(\beta)}{\vartheta_2(\beta) \vartheta_3(\beta)}$$

ist, gleichbedeutend mit:

$$\frac{c}{a} = - \frac{2\pi}{\pi} \frac{d}{d\beta} \log \vartheta_2(\beta) \vartheta_3(\beta).$$

Setzt man nun:  $\frac{\pi\beta}{2K} = \gamma$  und  $q = e^{-\pi \frac{K'}{K}}$ , so ist:

$$\frac{d}{d\beta} \log \vartheta_2(\beta) = - \frac{\pi}{2K} \operatorname{tg} \gamma + \frac{2\pi}{K} \sum_1^{\infty} m \frac{(-1)^m q^{2m} \sin 2m\gamma}{1 - q^{2m}}$$

$$\frac{d}{d\beta} \log \vartheta_3(\beta) = \frac{2\pi}{K} \sum_1^{\infty} m \frac{(-1)^m q^m \sin 2m\gamma}{1 - q^{2m}}$$

und folglich:

$$(6) \quad \frac{c}{a} = \operatorname{tg} \gamma - 4 \sum_1^{\infty} m \frac{(-1)^m q^m \sin 2m\gamma}{1 - q^{2m}}.$$

Die Bedingung endlich, dass für  $u = K + iK'z = c + i(a+b)$  ist, liefert die Beziehung:

$$b = c \frac{K'}{K} - 2a \frac{\beta}{K} \quad \text{oder:}$$



$$(7) \quad \log \frac{1}{q} = \frac{b}{c} \pi + 4\gamma \frac{a}{c}.$$

Die Gleichungen (6) und (7) gestatten, die in der Hauptgleichung (5), welche die gesuchte Abbildungsfunktion darstellt, vorkommenden Constanten  $q$  und  $\gamma$  zu berechnen.

Es erübrigt nun noch, die durch Gleichung (2) gegebene Form des Potentials auszudrücken mit Hülfe des Argumentes  $u$ . Es war mit  $\gamma$  allgemein bezeichnet der Ort der Einstromungspunkte; liegen letztere an den Enden der parallelen Längsstreifen des behandelten Leiters, so ist, wie aus der Abbildung hervorgeht,  $\gamma$  reell; folglich ist:

$$r = \sqrt{(\sigma - \gamma)^2 + \tau^2} \quad t = \sigma + \tau i.$$

Setzt man nun  $u = v + wi$ , so wird:

$$\log r = \frac{1}{2} \log \left\{ \left( \frac{\sin amv \cos amiw \Delta amiw}{1 - k^2 \sin^2 amv \sin^2 amiw} \right)^2 - 2\gamma \frac{\sin amv \cos amiw \Delta amiw}{1 - k^2 \sin^2 amv \sin^2 amiw} + \gamma^2 - \left( \frac{\sin amiw \cos amv \Delta amv}{1 - k^2 \sin^2 amv \sin^2 amiw} \right)^2 \right\}.$$

Führt man hier das Argument  $u' = v - wi$  ein, so wird:

$$\log r = \frac{1}{2} \log (\sin amu \sin amu' - \gamma (\sin amu + \sin amu') + \gamma^2).$$

Demnach nimmt das Potential die Form an:

$$(8) \quad \varphi = C - \frac{1}{2\pi\lambda\epsilon} \sum E \log (\sin amu \sin amu' - \gamma (\sin amu + \sin amu') + \gamma^2);$$

dabei ist, wenn der Zustand stationär ist,  $\sum E = 0$ , und  $\gamma$  hat, wenn die Einstromungspunkte an den Enden der parallelen Streifen liegen, die Werthe:

$$\pm \sin am\beta \quad \text{und} \quad \pm \frac{1}{k \sin am\beta}$$

anzunehmen.

Sind wie in der anfänglich bezeichneten Anordnung zwei Einstromungspunkte vorhanden, welche an zwei gleichgerichteten Streifenenden liegen, so nimmt  $\gamma$  zwei gleichnamige der angegebenen vier Werthe, also etwa  $-\sin am\beta$  und  $-1/k \sin am\beta$  an. Beachtet man ferner, dass für den Rand des Leiters stets  $u = u'$  ist, so kann man das Potential für den Rand des Leiters schreiben unter der einfacheren Form:

$$\varphi = C - \frac{E}{\pi\lambda\epsilon} \log \frac{\sin amu + \frac{1}{k \sin am\beta}}{\sin amu + \sin am\beta}.$$

Die Differenz der Werthe, welche dieser Ausdruck für  $u = \beta$  und  $u = \beta + iK'$  annimmt, dividirt durch  $E$  gibt die gesuchte Grösse  $P$ .

Die Punkte des  $z$ -Gebietes, welche den Werthen  $u = \beta$  und  $u = \beta + iK'$  entsprechen, liegen, wie aus der Abbildung hervorgeht, im Unendlichen; indessen ist in den Längsstreifen schon bei geringer Entfernung vom Nullpunkte das zugehörige  $u$  so wenig von  $\beta$ , resp.  $\beta + iK'$  verschieden, dass man, ohne einen merklichen Fehler zu begehen,  $u = \beta$ , resp.  $\beta + iK'$  setzen darf. Die Potentialdifferenz ist also, wie dies auch der Versuch zeigte, unabhängig von der Entfernung vom Nullpunkte, sofern man nur oberhalb einer gewissen Grenze bleibt. Demnach ist:

$$(9) \quad P = \frac{2}{\pi \lambda \varepsilon} \log \frac{1 + k \sin^2 am \beta}{2 \sqrt{k} \sin am \beta}.$$

Ist die Länge des Querstreifens gross gegen die Breite der Längsstreifen, so ist die Grösse  $K'$  grösser als  $K$ , und dadurch  $q$  und somit auch  $k = 4\sqrt{q}$  sehr klein; man kann dann in (9) das zweite Glied des Zählers vernachlässigen und abkürzend schreiben:

$$(10) \quad P = \frac{2}{\pi \lambda \varepsilon} \log \frac{1}{4 \sqrt{q} \sin am \beta}.$$

Zu den Versuchen, deren Theorie im Vorstehenden entwickelt ist, wurde ein empfindliches Wiedemann'sches Galvanometer angewendet, welches ausserhalb des Rahmens, auf den die die Magnetnadel umgebenden Windungen gewickelt waren, noch eine um eine verticale Axe drehbare Hülfsrolle<sup>1)</sup> trug. Jedes Gewinde des Galvanometers bestand dann aus zwei Theilen von ungleicher Grösse. Die beiden grösseren Theile bildeten zusammen die Hauptrolle, welche die Magnetnadel umgab, und wurden bei den Versuchen von Strömen entgegengesetzter Richtung durchflossen; die beiden kleineren bildeten zusammen die Hülfsrolle; in ihnen waren die Ströme gleichgerichtet. Die Hülfsrolle wirkte also auf die Nadel des Galvanometers wie ein Magnet, dessen magne-

1) Vgl. Kirchhoff u. Hanseman, Wied. Ann. 13. p. 407 ff. 1881.

tische Kraft sich proportional den benutzten Stromintensitäten änderte. Durchlief derselbe Strom hintereinander die beiden Gewinde des Galvanometers [was durch Verbindung der Quecksilbernäpfe 3 und 6 (vgl. Fig. 1) erreicht werden konnte], so konnte der Hilfsrolle eine solche Stellung gegeben werden, dass ihre Wirkung auf die Magnetnadel die Ungleichheit der Wirkungen der beiden Theile der Hauptrolle gerade compensirte. Ist diese Compensation für eine gewisse Stromintensität erreicht, so bleibt sie auch bestehen für nicht erheblich verschiedene Intensitäten, weil die Wirkungen der Hilfsrolle und der Differentialwindungen den Intensitäten proportional sich ändern. Ist jedoch die Stromintensität erheblich von der verschieden, für welche die Compensation erreicht war, so ist das eben Gesagte nicht mehr richtig, weil die Einwirkung des Stromes auf die Nadel aus einer Drehung und einer Verschiebung zusammengesetzt ist, bei erheblich verschiedenen Intensitäten die letztere eine andere wird, und infolge dieser veränderten Stellung auch das Verhalten der drehenden Wirkungen der Gewinde sich ändert. Die Stellung der Hilfsrolle wurde deshalb jedesmal bei einer Stromintensität regulirt, welche von der später zu benutzenden nicht erheblich verschieden war. Die Zuleitungsdrähte zu dem Differentialgalvanometer enthielten ausserdem Siemens'sche Widerstandsetalons, mit Hülfe deren die Widerstände der Galvanometerdrähte beliebig geändert werden konnten.

Die Herstellung der bei den Versuchen als Vergleichswiderstand verwendeten Platten machte die meiste Schwierigkeit. Es gelang jedoch, eine plane Glasplatte zu finden, bei der die Dickenänderung  $0,1\%$  ihrer Dicke nicht überstieg. Aus dieser wurden kleine Streifen ausgeschnitten, welche die Begrenzung der Platte ausmachen sollten und deshalb an den betreffenden Kanten gut rechtwinklig geschliffen waren. Diese Streifen wurden dann genau parallel so auf eine plane Glasplatte aufgekittet, dass der zwischen den geschliffenen Kanten freigelassene Raum die gewünschten Dimensionen der Platte hatte. Das ganze System wurde durch eine weitere plane Glasplatte von oben her bedeckt. Zwei Enden der parallelen

Streifen wurden nun dicht zugekittet und durch die Verkittung amalgamirte Kupferelectroden geführt. Es wurde sodann der zwischen den Platten frei gebliebene Hohlraum mit sorgfältig von jeder metallischen Beimischung gereinigtem Quecksilber luftfrei gefüllt und dann die noch frei gebliebenen Streifenenden in gleicher Weise, wie die anderen, mit amalgamirten Kupferelectroden versehen und zugekittet. Es ist zu bemerken, dass ein Meniscus des Quecksilbers an den Kanten auch mit einer stark vergrößernden Lupe nicht wahrgenommen werden konnte, sondern dass das Quecksilber den durch die Glaswände begrenzten Hohlraum geometrisch genau auszufüllen schien. Eine Herstellung des Hohlraumes in Holz scheint, abgesehen von der grösseren Schwierigkeit, bei Holz die Dimensionen der Platte in der gewünschten Genauigkeit zu erhalten, auch deswegen nicht praktisch zu sein, weil wegen der an den Holzfasern anhaftenden Luftblasen die luftfreie Füllung erschwert wird.

Das so hergestellte System wurde dann noch zur Sicherung, dass es nicht durch Wärmeänderungen auseinander gesprengt würde, an dem einen Streifenende mit einem mit Quecksilber gefüllten kleinen Glasröhrchen versehen. Die hierdurch entstehende Ungenauigkeit des Quecksilberkörpers betrifft nur das Ende des einen Längsstreifens, beeinflusst also nicht die Genauigkeit der Dimensionen des Querstreifens, auf welche es ja allein ankommt.

Die Dimensionen der Platte waren folgende:

|   |            |
|---|------------|
| Breite des Längs- und des Querstreifens. .  | 11,17 mm,  |
| Länge des Querstreifens . . . . .           | 100 mm,    |
| „ „ Längsstreifens . . . . .                | ca. 95 mm, |
| Dicke des Systems (sphärometrisch gemessen) | 9,217 mm.  |

Berechnet man aus diesen Dimensionen den mit  $P$  bezeichneten Widerstand nach der Formel (10), so erhält man bei 0° C.:

$$P = 0,000\,995\,2 \text{ S.-E.}$$

Messungen, welche angestellt wurden, um die Richtigkeit dieses Widerstandes zu prüfen, bestätigten diese Zahl.

Es wurden dann an die Enden eines Kupferdrahtes von ca. 60 cm Länge und 2,5 mm Durchmesser vier Drähte an-

gelöthet und der Widerstand dieses Drahtsystems in dem eingangs erläuterten Sinne durch Vergleichung mit der Quecksilberplatte gemessen. Gegen Temperaturschwankungen war sowohl das Drahtsystem, wie auch die Quecksilberplatte durch Watte- und Pappumhüllungen möglichst geschützt; die Temperaturen wurden an Normalthermometern jedesmal abgelesen. Die Zuleitungsdrähte zur Quecksilberplatte und zu dem zu messenden Widerstande blieben innerhalb der Messungen völlig unverändert. Im Folgenden theile ich einige Beobachtungssätze mit, welche so schnell ausgeführt wurden, dass innerhalb eines jeden Temperaturschwankungen nicht wahrgenommen werden konnten. Das Verhältniss  $w' - w : W' - W$  ist jedesmal aus der Differenz zweier Messungen ermittelt und mit dem Mittelwerthe dieses Verhältnisses unter Berücksichtigung der Temperatur des Quecksilbers,  $\varrho$  der Widerstand des Kupferdrahtes nach Formel (1) berechnet.

| $t_{\text{Hg}}$ | $t_{\text{Cu}}$ | $\omega$ | $\omega$ | $W$         | $W'$        | $\frac{w' - w}{W' - W}$    | $\varrho$                     |
|-----------------|-----------------|----------|----------|-------------|-------------|----------------------------|-------------------------------|
| 15,62°          | 15,5°           | 1 S.-E.  | 8 S.-E.  | 0,228 S.-E. | 4,106 S.-E. | $\frac{1}{0,5528} = 1,809$ | $\varrho_{15,5} = 0,001\ 823$ |
|                 |                 |          | 9        |             | 4,65        |                            |                               |
|                 |                 |          | 10       |             | 5,2         |                            |                               |
|                 |                 |          | 11       |             | 5,76        |                            |                               |
|                 |                 |          | 12       |             | 6,32        |                            |                               |
|                 |                 |          | 18       |             | 6,87        |                            |                               |
| 15,65°          | 16,1            | 1        | 7,9      | 0,198 S.-E. | 4 S.-E.     | 1,813                      | $\varrho_{16,1} = 0,001\ 827$ |
|                 |                 |          | 9,755    |             | 5           |                            |                               |
|                 |                 |          | 11,528   |             | 6           |                            |                               |
|                 |                 |          | 13,34    |             | 7           |                            |                               |
|                 |                 |          | 15,152   |             | 8           |                            |                               |
|                 |                 |          |          |             |             |                            |                               |
| 16,9°           | 17              | 1        | 6,083    | 0,199       | 3 S.-E.     | 1,8174                     | $\varrho_{17} = 0,001\ 833$   |
|                 |                 |          | 7,89     |             | 4           |                            |                               |
|                 |                 |          | 9,714    |             | 5           |                            |                               |
|                 |                 |          | 11,525   |             | 6           |                            |                               |
|                 |                 |          | 13,33    |             | 7           |                            |                               |
|                 |                 |          | 15,16    |             | 8           |                            |                               |

Berechnet man aus den in der Tabelle angegebenen Werthen für  $\varrho$  die Temperaturcoefficienten  $\alpha$ , so folgt:

$$\begin{array}{ll}
 \text{aus } \varrho_{15,5} \text{ und } \varrho_{16,1}, & \alpha = 0,00365, \\
 \text{„ } \varrho_{16,1} \text{ „ } \varrho_{17}, & \alpha = 0,00364, \\
 \text{„ } \varrho_{15,5} \text{ „ } \varrho_{17}, & \alpha = 0,00364.
 \end{array}$$

Die Genauigkeit der ganzen Widerstandsmessung hängt ab von der Genauigkeit, mit welcher das Verhältniss  $w' - w : W' - W$  ermittelt werden kann, und von der Genauigkeit der Quecksilberplatte.

Das Verhältniss  $w' - w : W' - W$  kann, da die Genauigkeit der Siemens'schen Widerstandsscalen  $0,05\%$  ist, einen Fehler mit sich führen, welcher  $0,1\%$  nicht übersteigt. In der That ergab sich der wahrscheinliche Fehler dieses Verhältnisses aus einer Reihe von Beobachtungssätzen zu  $0,075\%$ .

Hierzu kommt der Fehler, der durch die Ungenauigkeit der Dimensionen der Quecksilberplatte verursacht wird. Bei dem benutzten Vergleichskörper beliefen sich diese Ungenauigkeiten noch nicht auf  $0,1\%$ ; nimmt man sämtliche Dimensionen um  $0,1\%$  falsch an, und zwar sämtlich in demselben Sinne, sodass der Fehler der grösstmögliche wird, so erhält man einen Werth für  $P$ , der von dem benutzten um  $0,43\%$  abweicht. Demnach würde unter den gemachten Voraussetzungen der mögliche Fehler der ganzen Messungsmethode  $0,5\%$  betragen können. Im allgemeinen wird der Fehler geringer sein; aber wenn man auch diesen annimmt, dürfte, wenn man die Kleinheit der gemessenen Widerstände in Betracht zieht, auch eine solche Ungenauigkeit zulässig sein.

Die zur Prüfung der entwickelten Methode angestellten Versuche sind im physikalischen Institut der Universität Berlin ausgeführt.

---

#### IV. *Notiz über schwach magnetische und diamagnetische Körper; von P. Silow.*

---

In seinem Aufsätze „Ueber das Maximum der Magnetisirung der diamagnetischen und schwach magnetischen Körper“<sup>1)</sup> bestreitet Hr. Eaton die von mehreren Physikern ausgesprochene Meinung, dass die Magnetisirungszahl  $k$  auch bei jenen Körpern, sowie beim Eisen, Aenderungen erleide je nach der Grösse der Scheidungskraft  $X$ . Insbesondere

---

1) Eaton, Wied. Ann. 14. p. 225. 1881.