

## Die Mächtigkeit der Borelschen Mengen.

Von

F. HAUSDORFF in Greifswald.

Ein System von Mengen, dem auch die Summe

$$M_\sigma = \mathfrak{S}(M_1, M_2, M_3, \dots)$$

von abzählbar vielen Mengen des Systems angehört, heiße ein  $\sigma$ -System; ein System, dem auch der Durchschnitt

$$M_\delta = \mathfrak{D}(M_1, M_2, M_3, \dots)$$

von abzählbar vielen Mengen des Systems angehört, heiße ein  $\delta$ -System; ein System, das beide Eigenschaften hat, ein  $(\sigma\delta)$ -System. Wir bilden das kleinste  $(\sigma\delta)$ -System, dem alle Gebiete\*) angehören, und bezeichnen die Mengen dieses Systems als *Borelsche Mengen*. Wir wollen der Einfachheit wegen annehmen, daß es sich um Punktmengen in einem euklidischen Raume von beliebig vielen Dimensionen handelt (auf andere Räume, in denen unsere Betrachtungen gültig bleiben, wird an einigen Stellen hingewiesen); da man dann auch von Würfeln statt von Gebieten ausgehen kann, so haben die Borelschen Mengen, wenigstens die beschränkten und gewisse unbeschränkte unter ihnen,\*\*) ein Lebesguesches Maß und werden bekanntlich „im Borelschen Sinne meßbar“ (*mesurables B*) genannt. Zu den Borelschen Mengen gehören der Reihe nach:

- (1) die Gebiete  $G$ ,
- (2) die Durchschnitte  $G_\delta$  aus abzählbar vielen Gebieten (die Summen  $G_\sigma$  aus abzählbar vielen, ja sogar die Summen aus beliebig vielen Gebieten sind selbst wieder Gebiete),

\*) Wie in meinem Buche: Grundzüge der Mengenlehre (Leipzig 1914), das ich unter der Abkürzung G. d. M. zitiere, verstehe ich unter einem Gebiet eine Menge, die nur innere Punkte hat (aber, im Gegensatz zum üblichen Sprachgebrauch, nicht notwendig zusammenhängend ist), also das Komplement einer abgeschlossenen Menge.

\*\*) Nach der Maßtheorie von C. Carathéodory: Über das lineare Maß von Punktmengen, Gött. Nachr. (1914), die auch das Maß  $\infty$  zuläßt, sind alle Borelschen Mengen meßbar.

(3) die Summen  $G_{\delta\sigma}$  aus abzählbar vielen Mengen  $G_\delta$  (die Durchschnitte  $G_{\delta\delta}$  aus solchen sind wieder Mengen  $G_\delta$ ),

(4) die Durchschnitte  $G_{\delta\sigma\delta}$  aus abzählbar vielen Mengen  $G_{\delta\sigma}$  und so fort für endliche Indizes, dann weiter

( $\omega$ ) die Durchschnitte aus abzählbar vielen Mengen der Klassen (1) (2) (3)  $\dots$ ,

( $\omega + 1$ ) die Summen aus abzählbar vielen Mengen der Klasse ( $\omega$ ) und so fort für transfinite Indizes der zweiten Cantorschen Zahlenklasse. Um dies Bildungsgesetz zu präzisieren, definieren wir also für jede Ordnungszahl  $\alpha$  ( $1 \leq \alpha < \Omega$ ) durch Induktion folgendermaßen eine Mengenkategorie ( $\alpha$ ):

Zur Klasse (1) gehören die Gebiete.

Für ungerades  $\alpha = 2\beta + 1 > 1$  gehören zur Klasse ( $\alpha$ ) die Summen aus abzählbar vielen Mengen von niederen Klassen ( $\xi$ ),  $\xi < \alpha$ .

Für gerades  $\alpha = 2\beta$  gehören zur Klasse ( $\alpha$ ) die Durchschnitte aus abzählbar vielen Mengen von niederen Klassen ( $\xi$ ),  $\xi < \alpha$ .

Die Mengen aller Klassen ( $\alpha$ ) und nur diese sind die Borelschen Mengen. Jede Borelsche Menge gehört einer niedrigsten Klasse und dann allen folgenden an, da man ja

$$M = \mathfrak{S}(M, M, M, \dots) = \mathfrak{D}(M, M, M, \dots)$$

schreiben kann. Infolgedessen ist es offenbar erlaubt, jede ungerade Klasse ( $\alpha = 2\beta + 1$ ) für  $\alpha > 1$  aus den Summen und jede gerade Klasse ( $\alpha = 2\beta + 2$ ), deren Index keine Limeszahl ist, aus den Durchschnitten von abzählbar vielen Mengen der *unmittelbar vorhergehenden* Klasse ( $\alpha - 1$ ) zu bilden, wie wir oben bei Aufstellung der ersten Klassen getan haben; oder es ist auch, wie wir nachher tun wollen, erlaubt, jede *ungerade* Klasse ( $\alpha$ ) aus den Summen von abzählbar vielen Mengen *gerader* Klassen ( $\xi$ ) und jede *gerade* Klasse ( $\alpha$ ) aus den Durchschnitten von abzählbar vielen Mengen *ungerader* Klassen ( $\xi$ ) zu bilden ( $\xi < \alpha$ ).

Man kann bei der Darstellung der Borelschen Mengen auch von *abgeschlossenen Mengen* statt von Gebieten ausgehen. Wir bilden die Klasse [ $\alpha$ ] aus den *Komplementen* der Mengen der Klasse ( $\alpha$ ), so daß sich hier die folgenden Klassen ergeben:

[1] die abgeschlossenen Mengen  $F$ ,

[2] die Summen  $F_\sigma$  aus abzählbar vielen abgeschlossenen Mengen,

[3] die Durchschnitte  $F_{\sigma\delta}$  aus abzählbar vielen Mengen  $F_\sigma$ ,

[4] die Summen  $F_{\sigma\delta\sigma}$  aus abzählbar vielen Mengen  $F_{\sigma\delta}$

usf.; man hat in allem Vorhergehenden nur die beiden Operationen Summe und Durchschnitt zu vertauschen. Diese Komplemente der Borelschen Mengen sind aber wieder die Borelschen Mengen, nur in einer etwas

anderen Klasseneinteilung; denn da jedes  $F$  ein  $G_\delta$  und jedes  $G$  ein  $F_\sigma$  ist (das gilt in jedem metrischen Raume; G. d. M., S. 306), so ist die Klasse  $[\alpha]$  in der Klasse  $(\alpha + 1)$  und die Klasse  $(\alpha)$  in der Klasse  $[\alpha + 1]$  enthalten.

*Summe* und *Durchschnitt* von zwei (oder endlich vielen) Mengen der Klasse  $(\alpha)$  ist wieder von dieser Klasse. Wenn diese Eigenschaft nämlich einem System von Mengen  $M$  zukommt, so kommt sie auch den Mengen  $M_\sigma$  und den Mengen  $M_\delta$  zu; sie überträgt sich also von den Gebieten auf alle folgenden Klassen. In diesem Falle kann man die  $M_\sigma$  als Summen *aufsteigender* Mengenfolgen darstellen, d. h.

$$M_\sigma = \mathfrak{S}(M_1, M_2, M_3, \dots), \quad M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \subseteq \dots$$

annehmen, indem man andernfalls  $M_n$  durch  $\mathfrak{S}(M_1, M_2, \dots, M_n)$  ersetzt, welche Summe wieder ein  $M$  ist; ebenso die  $M_\delta$  als Durchschnitte *absteigender* Mengenfolgen. Die *Differenz* zweier Mengen der Klasse  $(\alpha)$  ist Durchschnitt einer Menge der Klasse  $(\alpha)$  mit einer Menge der Klasse  $[\alpha]$ , also Durchschnitt von zwei speziellen Mengen der Klasse  $(\alpha + 1)$ , demnach selbst von der Klasse  $(\alpha + 1)$ , übrigens ebenso von der Klasse  $[\alpha + 1]$ . Alles dies gilt auch von den Komplementklassen  $[\alpha]$ .

Man kann die Frage aufwerfen, ob die wiederholte Summen- und Durchschnittsbildung wirklich zu immer neuen Mengen führt; es könnte ja sein, daß schon eine bestimmte Klasse  $(\alpha)$  ein  $(\sigma\delta)$ -System ist, so daß alle Borelschen Mengen in Wahrheit von dieser oder noch geringerer Klasse wären. Das hängt natürlich von dem Raume ab, dem unsere Mengen angehören; in einem Raum mit nur abzählbar vielen Punkten wäre jede Punktmenge höchstens abzählbar, also ein  $F_\sigma$ . Im euklidischen Raum existieren aber Borelsche Mengen von beliebig hoher Klasse, die sich nicht auf solche niederer Klasse reduzieren: das geht aus dem Zusammenhang\*) der Borelschen Mengen mit den Baireschen Funktionen und aus dem (a. a. O. bewiesenen) Satz von H. Lebesgue hervor, daß es Bairesche Funktionen beliebig hoher Klasse gibt, die sich nicht auf solche niederer Klasse reduzieren.

Um ein paar Beispiele von (linearen) Borelschen Mengen zu nennen: die Menge der rationalen Zahlen ist ein  $F_\sigma$ , aber kein  $G_\delta$ , da sonst auch ihr Komplement ein  $F_\sigma$  und beide von erster Kategorie wären; die Funktion  $f(x)$ , die für rationales  $x$  gleich 1, für irrationales gleich 0 ist, ist eine Bairesche Funktion zweiter und nicht geringerer Klasse, d. h. sie ist zweifacher Limes (Limes von Limites) stetiger Funktionen, aber nicht

\*) H. Lebesgue, Sur les fonctions représentables analytiquement, Journ. de Math. (6) 1 (1905); W. H. Young, On functions and their associated sets of points, Proc. London Math. Soc. (2) 12 (1912).

einfacher. Die Menge der irrationalen Zahlen, in deren Kettenbruchentwicklung die Teilnenner nach  $\infty$  divergieren, ist ein  $F_{\sigma\delta}$ , aber kein  $G_{\delta\sigma}$ ; die Funktion, die in dieser Menge = 1 und sonst = 0 ist, ist eine Baire'sche Funktion dritter und nicht geringerer Klasse\*).

Wir kommen nun zum Zweck dieser Mitteilung, nämlich zum Beweis des Satzes:

**Jede Borelsche Menge ist entweder endlich oder abzählbar oder von der Mächtigkeit des Kontinuums.**

Dies war bisher für die abgeschlossenen Mengen  $F$  durch G. Cantor, für die Gebietsdurchschnitte  $G_\delta$  durch W. H. Young bekannt; ich hatte es (G. d. M., S. 465) noch für die  $G_{\delta\sigma\delta}$  bewiesen, wonach es für die  $G_{\delta\sigma\delta\sigma}$  trivial ist. Insgesamt ergibt dies die Gültigkeit des Satzes für die Mengen

$$G, G_\delta, G_{\delta\sigma}, G_{\delta\sigma\delta}, G_{\delta\sigma\delta\sigma} \text{ und } F, F_\sigma, F_{\sigma\delta}, F_{\sigma\delta\sigma}$$

bis zu den Klassen (5) und [4], also z. B. auch für Differenzen von zwei Mengen aus den Klassen bis (4) und [4]. Das obige Theorem, für die Borelschen Mengen aller Klassen mit endlichem oder unendlichem Index gültig, ist also eine sehr weitgehende Verallgemeinerung der bisher bekannten Mächtigkeitssätze.

Wir nehmen die von den Gebieten ausgehende Darstellung der Borelschen Mengen zu Hilfe und bezeichnen die Klasse ( $\xi$ ) einfacher mit  $\xi$ ; wir erinnern uns ferner, daß Mengen gerader Klasse als Durchschnitte aus Mengen ungerader Klasse, diese als Summen aus Mengen gerader Klasse dargestellt werden konnten, und daß wir die Summen aus aufsteigend geordneten Summanden bilden durften. Es genügt, den Mächtigkeitssatz für die Mengen gerader Klasse zu beweisen. Eine Menge  $A$  von gerader Klasse  $\xi$  stellt sich so dar:

$$A = \mathfrak{D}(A_1, A_2, \dots) = \mathfrak{D}_i A_i,$$

$A_i$  von ungerader Klasse  $\xi_i < \xi$ . Insoweit  $\xi_i = 1$ ,  $A_i$  ein Gebiet ist, ist die Zerlegung beendet; für  $\xi_i > 1$  ist

$$A_i = \mathfrak{S}(A_i^1, A_i^2, \dots) = \mathfrak{S}_p A_i^p,$$

$A_i^p$  von gerader Klasse  $\xi_i^p < \xi_i$ . Weiter ist

$$A_i^p = \mathfrak{D}(A_{i1}^p, A_{i2}^p, \dots) = \mathfrak{D}_k A_{ik}^p,$$

$A_{ik}^p$  von ungerader Klasse  $\xi_{ik}^p < \xi_i^p$ . Wenn  $\xi_{ik}^p > 1$ , ist sodann

$$A_{ik}^p = \mathfrak{S}(A_{ik}^{p1}, A_{ik}^{p2}, \dots) = \mathfrak{S}_q A_{ik}^{pq},$$

---

\*) R. Baire, Sur la représentation des fonctions discontinues, Acta Math. 30 (1906).

danach wieder

$$A_{ik}^{pq} = \mathfrak{D}(A_{ik1}^{pq}, A_{ik2}^{pq}, \dots) = \mathfrak{D}_l A_{ikl}^{pq}$$

usw. Wie nun aber auch die natürlichen Zahlenfolgen  $ikl \dots, pqr \dots$  gewählt sein mögen, so muß unter den ungeraden abnehmenden Ordnungszahlen

$$\xi_i > \xi_{ik}^p > \xi_{ikl}^{pq} > \dots$$

nach einer endlichen Zahl von Schritten die Zahl 1, also unter den entsprechenden Mengen ein Gebiet auftreten (übrigens kann natürlich auch eine Menge gerader Klasse sich auf eine Menge niederer Klasse, insbesondere auf ein Gebiet reduzieren). Wir nahmen soeben mit dem Erscheinen eines Gebiets die Zerlegung als beendet an, wollen aber jetzt lieber verabreden, daß wir sie auch dann gemäß der Formel

$$G = \mathfrak{S}(G, G, G, \dots) = \mathfrak{D}(G, G, G, \dots)$$

fortsetzen; wenn z. B.  $A_{ik}^p = G$ , so soll auch

$$A_{ik}^p = A_{ik}^{pq} = A_{ikl}^{pq} = A_{ikl}^{pqr} = \dots = G$$

sein. Auf diese Weise sind alle Mengen, sowohl die mit gleich vielen oberen (Summen-) und unteren (Durchschnitts-)Indizes, wie auch die mit einem unteren Index mehr, definiert, und es muß auch in der Reihe der Mengen

$$A_i^p, A_{ik}^{pq}, A_{ikl}^{pqr}, \dots$$

schließlich ein Gebiet auftreten.

Nehmen wir nun an,  $A$  sei abzählbar. Wegen  $A \subseteq A_1 = \mathfrak{S}_p A_1^p$  ist  $A = \mathfrak{S}_p \mathfrak{D}(A, A_1^p)$ ; unter diesen abzählbar vielen Summanden muß sich also gewiß ein unabzählbarer befinden, etwa  $\mathfrak{D}(A, A_1^{p_1})$ . Es seien  $x_1, x_2$  zwei Verdichtungspunkte\*) von und in dieser Menge; wir umgeben sie als Mittelpunkte mit abgeschlossenen Kugeln  $V_1, V_2$ , die keinen Punkt gemein haben und, falls  $A_1^{p_1}$  ein Gebiet ist, diesem Gebiet angehören, also

$$(G) \quad V_1 + V_2 \subseteq A_1^{p_1};$$

die beigezeichnete Bezeichnung (G) soll, wie auch im folgenden, bedeuten,

\*)  $x$  heißt Verdichtungspunkt von  $M$ , wenn in jeder Umgebung von  $x$  abzählbar viele Punkte von  $M$  liegen. Im euklidischen Raum (allgemeiner in einem metrischen Raum mit abzählbarer dichter Teilmenge) hat jede unabzählbare Menge Verdichtungspunkte, und alle bis auf höchstens abzählbar viele gehören ihr selbst an. — Eine „abgeschlossene Kugel“  $V$  mit dem Mittelpunkt  $x$  und dem Radius  $\varrho$  ist die Menge der Punkte, die von  $x$  eine Entfernung  $\leq \varrho$  haben, ein „Kugelgebiet“  $U$  die Menge der Punkte, die von  $x$  eine Entfernung  $< \varrho$  haben.

daß die betreffende Ungleichung dann und nur dann gefordert wird, wenn die rechtsstehende Menge ein Gebiet ist. In diesem Falle kann ja die obige Bedingung gestellt werden, da  $x_1, x_2$  Punkte von  $A_1^{p_1}$  sind. Sind  $U_1, U_2$  die zu  $V_1, V_2$  gehörigen Kugelgebiete mit denselben Mittelpunkten und Radien, so ist

$$\mathfrak{D}(U_\alpha, A, A_1^{p_1})$$

unabzählbar für  $\alpha = 1, 2$  (im folgenden sollen  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  beliebige von den Ziffern 1, 2 sein).

Diese Menge ist nun  $\subseteq A_2 = \mathfrak{S}_p A_2^p$ , woraus wir wie oben schließen, daß eine der Mengen  $\mathfrak{D}(U_\alpha, A, A_1^{p_1}, A_2^p)$  für geeignetes  $p$  unabzählbar ist; da wir die  $A_2^p$  mit dem Index  $p$  aufsteigend annehmen konnten, so reichen wir mit einem genügend großen  $p = p_2$  für beide Fälle  $\alpha = 1, 2$  aus; es ist also

$$\mathfrak{D}(U_\alpha, A, A_1^{p_1}, A_2^{p_2})$$

unabzählbar. Diese Menge ist aber wieder  $\subseteq A_{11}^{p_1} = \mathfrak{S}_q A_{11}^{p_1 q}$ , und wir schließen wieder, daß für genügend großes  $q = q_{11}$

$$\mathfrak{D}(U_\alpha, A, A_1^{p_1}, A_2^{p_2}, A_{11}^{p_1 q_{11}})$$

unabzählbar ist für beide Werte  $\alpha$ . Es seien  $x_{\alpha 1}, x_{\alpha 2}$  zwei Verdichtungs-  
punkte von und in dieser Menge; wir umgeben sie als Mittelpunkte mit abgeschlossenen Kugeln  $V_{\alpha 1}, V_{\alpha 2}$  ohne gemeinsamen Punkt, die in  $U_\alpha$  und, falls die Mengen  $A_2^{p_2}, A_{11}^{p_1 q_{11}}$  Gebiete sind, auch in diesen Gebieten liegen, also

$$V_{\alpha 1} + V_{\alpha 2} \subseteq U_\alpha;$$

$$(G) \quad V_{\alpha 1} + V_{\alpha 2} \subseteq A_2^{p_2}, \quad V_{\alpha 1} + V_{\alpha 2} \subseteq A_{11}^{p_1 q_{11}};$$

jede der beiden letzten Bedingungen wird dann und nur dann gestellt, wenn die rechts stehende Menge ein Gebiet ist. Ist  $U_{\alpha\beta}$  das Kugelgebiet mit gleichem Mittelpunkt und Radius wie  $V_{\alpha\beta}$ , so ist

$$\mathfrak{D}(U_{\alpha\beta}, A, A_1^{p_1}, A_2^{p_2}, A_{11}^{p_1 q_{11}})$$

unabzählbar für alle vier Wertepaare  $\alpha, \beta$ .

Deuten wir noch den nächsten Schritt des Verfahrens an. Die letztgenannte Menge ist Teilmenge von

$$A_3 = \mathfrak{S}_p A_3^p, \quad A_{12}^{p_1} = \mathfrak{S}_q A_{12}^{p_1 q}, \quad A_{21}^{p_2} = \mathfrak{S}_q A_{21}^{p_2 q}, \quad A_{111}^{p_1 q_{11}} = \mathfrak{S}_r A_{111}^{p_1 q_{11} r},$$

und durch wiederholte Anwendung des Schlusses von einer unabzählbaren Summe auf die Unabzählbarkeit eines ihrer abzählbar vielen Summanden ergibt sich, daß

$$\mathfrak{D}(U_{\alpha\beta}, A, A_1^{p_1}, A_2^{p_2}, A_3^p, A_{11}^{p_1 q_{11}}, A_{12}^{p_1 q_{12}}, A_{21}^{p_2 q_{21}}, A_{111}^{p_1 q_{11} r_{111}})$$

für genügend große Werte  $p_3, q_{12}, q_{21}, r_{111}$  in allen vier Fällen  $\alpha, \beta$  un abzählbar ist. Zu zwei Verdichtungspunkten von und in dieser Menge werden abgeschlossene Kugeln  $V_{\alpha\beta 1}, V_{\alpha\beta 2}$  ohne gemeinsamen Punkt konstruiert derart, daß

$$(G) \quad \begin{aligned} &V_{\alpha\beta 1} + V_{\alpha\beta 2} \subseteq U_{\alpha\beta}, \\ &V_{\alpha\beta 1} + V_{\alpha\beta 2} \subseteq A_3^{p_3}, A_{12}^{p_1 q_{12}}, A_{21}^{p_2 q_{21}}, A_{111}^{p_1 q_{11} r_{111}}, \end{aligned}$$

letztere Ungleichungen nur insoweit gefordert, als die rechtsseitigen Mengen Gebiete sind. Die oben zuletzt stehende Durchschnittsmenge bleibt un abzählbar, wenn man  $U_{\alpha\beta}$  durch  $U_{\alpha\beta\gamma}$ , das zu  $V_{\alpha\beta\gamma}$  gehörige Kugelgebiet, ersetzt. Beim nächsten Schritt würden die Mengen mit der unteren Indizessumme 4 hinzukommen ( $A_4, A_{13}, \dots, A_{1111}$  mit genügend großen letzten oberen Indizes) usw. usw.

So erhält man eine „dyadische“ Menge

$$\Delta = \mathfrak{D}(\sum V_\alpha, \sum V_{\alpha\beta}, \sum V_{\alpha\beta\gamma}, \dots),$$

die von der Mächtigkeit des Kontinuums ist\*). Sie ist nach Konstruktion Teilmenge von

$$D = \mathfrak{D}_G(A_1^{p_1}, A_2^{p_2}, A_3^{p_3}, \dots, A_{11}^{p_1 q_{11}}, A_{12}^{p_1 q_{12}}, A_{21}^{p_2 q_{21}}, \dots, A_{111}^{p_1 q_{11} r_{111}}, \dots)$$

wobei der Durchschnitt aus denjenigen und nur denjenigen Mengen in der Klammer zu nehmen ist, die Gebiete sind; abgesehen davon treten hier die Mengen

$$A_i^{p_i}, A_{ik}^{p_i q_{ik}}, A_{ikl}^{p_i q_{ik} r_{ikl}}, \dots$$

auf und zwar für alle Werte von  $i, k, l, \dots$  und geeignete Werte von  $p_i, q_{ik}, r_{ikl}, \dots$ .

Diese Menge  $D$  ist aber Teilmenge unserer ursprünglichen Menge  $A$ . Wir zeigen, damit gleichbedeutend, daß ein nicht zu  $A$  gehöriger Punkt  $x$  auch nicht zu  $D$  gehört. Wenn  $x$  nicht zu  $A$  gehört, so gehört er mindestens einer Menge  $A_i$  nicht an (für geeignetes  $i$ ). Er gehört dann keiner Menge  $A_i^p$  (für  $p = 1, 2, 3, \dots$ ), insbesondere auch der Menge  $A_i^{p_i}$  nicht an. Er gehört daher mindestens einer Menge  $A_{ik}^{p_i}$  nicht an (für geeignetes  $k$ ), folglich auch der Menge  $A_{ik}^{p_i q_{ik}}$  nicht, also der Menge  $A_{ikl}^{p_i q_{ik}}$  nicht (für geeignetes  $l$ ), der Menge  $A_{ikl}^{p_i q_{ik} r_{ikl}}$  nicht usw. Unter diesen Mengen tritt aber schließlich ein Gebiet  $G$  auf, dem also  $x$  nicht angehört, während  $G$  nach Kon-

\*) Die beschränkten, abgeschlossenen, absteigenden Mengen  $V_\alpha, V_{\alpha\beta}, V_{\alpha\beta\gamma}, \dots$  haben (mindestens) einen Punkt gemein, für jede aus 1, 2 gebildete Ziffernfolge  $\alpha\beta\gamma \dots$ . Das gilt auch in einem „vollständigen“ Raume, wenn man noch die leicht realisierbare Bedingung stellt, daß die Radien dieser Kugeln nach 0 konvergieren (G. d. M. S. 318). Die Menge  $\Delta$  ist übrigens perfekt.

struktion bei der Bildung des Durchschnitts  $D$  zur Verwendung kam, also  $D \subseteq G$  ist.  $x$  kann also nicht zu  $D$  gehören, womit bewiesen ist, daß  $A \supseteq D \supseteq \Delta$  von der Mächtigkeit des Kontinuums ist.

Damit ist also für eine sehr umfassende Kategorie von Mengen die Mächtigkeit geklärt; als einen Schritt zur Lösung des Kontinuumproblems kann man dies freilich kaum auffassen, da die Borelschen Mengen eben doch noch sehr speziell sind und nur ein verschwindend kleines Teilsystem (von der Mächtigkeit  $\aleph$  des Kontinuums) in dem System aller Mengen bilden (das von der Mächtigkeit  $2^{\aleph} > \aleph$  ist).

Wie zu den beiden Hauptpunkten des Beweises (Existenz von Verdichtungspunkten in einer abzählbaren Menge und von gemeinsamen Punkten bei einer absteigenden Folge abgeschlossener Mengen) bemerkt wurde, gilt der Mächtigkeitssatz in jedem vollständigen Raum mit abzählbarer dichter Teilmenge, z. B. auch im Hilbertschen Raume und in gewissen Funktionenräumen (G. d. M., S. 317).

---