

Sulle trasformazioni delle superficie isoterme.

(Di PASQUALE CALAPSO, a Palermo.)

PREFAZIONE.

Fin da quando studiai per la prima volta il problema delle superficie isoterme (*), osservai una nuova trasformazione per queste superficie che mi si presentò nel seguente modo:

Siano x_1, y_1, z_1 le coordinate di un punto mobile sopra una superficie isoterma I , riferita alle sue linee di curvatura (u, v) ; e siano rispettivamente:

X_1, Y_1, Z_1 i coseni direttori della tangente alla linea v ,

X_2, Y_2, Z_2 i coseni direttori della tangente alla linea u ,

X_3, Y_3, Z_3 i coseni direttori della normale alla superficie.

Indicando con

$$ds^2 = e^{2\varphi} (du^2 + dv^2) \quad (A)$$

l'elemento lineare della superficie I e con r_1, r_2 i raggi principali di curvatura, si hanno le formole note

$$\left. \begin{array}{ll} \frac{\partial x_1}{\partial u} = e^\varphi X_1 & \frac{\partial x_1}{\partial v} = e^\varphi X_2 \\ \frac{\partial X_1}{\partial u} = -\frac{\partial \varphi}{\partial v} X_2 - \frac{e^\varphi}{r_2} X_3 & \frac{\partial X_1}{\partial v} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} X_2 \\ \frac{\partial X_2}{\partial u} = \frac{\partial \varphi}{\partial v} X_1 & \frac{\partial X_2}{\partial v} = -\frac{\partial \varphi}{\partial u} X_1 - \frac{e^\varphi}{r_1} X_3 \\ \frac{\partial X_3}{\partial u} = \frac{e^\varphi}{r_2} X_1 & \frac{\partial X_3}{\partial v} = \frac{e^\varphi}{r_1} X_2 \end{array} \right\} \quad (B)$$

(*) CALAPSO, *Sulle superficie a linee di curvatura isoterme* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XVII, p. 275].

in cui le funzioni φ , r_1 , r_2 soddisfano all'equazione di GAUSS e di CODAZZI, cioè :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + \frac{e^{\varphi}}{r_1 r_2} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{e^{\varphi}}{r_2} \right) &= \frac{e^{\varphi}}{r_1} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{e^{\varphi}}{r_1} \right) &= \frac{e^{\varphi}}{r_2} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \end{aligned} \right\} \quad (C)$$

Io ho attaccato direttamente l'integrazione di questo sistema introducendo due funzioni ausiliarie ω , Ω con la posizione

$$\frac{e^{\varphi}}{r_2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega + \Omega), \quad \frac{e^{\varphi}}{r_1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega - \Omega). \quad (D)$$

La funzione Ω è invariante della superficie I rispetto alle inversioni di potenza $= -1$; ho trovato allora per la funzione Ω l'equazione differenziale alle derivate parziali di quarto ordine

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} \left(\frac{1}{\Omega} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u \partial v} \right) + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left(\frac{1}{\Omega} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u \partial v} \right) + \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} (\Omega^2) = 0. \quad (E)$$

Ho introdotto altresì un secondo invariante della superficie I rispetto alle inversioni, cioè

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2 - \omega \Omega = -J. \quad (E)$$

Ho allora osservato l'esistenza di una nuova superficie isoterma I_2 , per la quale gl'invarianti sono

$$\Omega, \quad J + 2m,$$

con m costante arbitraria.

La determinazione della superficie I_2 si compie mediante l'integrazione del sistema completo

$$\left. \begin{aligned} 2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial u^2} &= \left(\frac{\partial \tau}{\partial u} \right)^2 - \left(\frac{\partial \tau}{\partial v} \right)^2 + \frac{1}{2} (\Omega^2 - \Omega_1^2 - 2 \Omega \Omega_1) - (J + 2m) \\ 2 \frac{\partial^3 \tau}{\partial u \partial v} &= 2 \frac{\partial \tau}{\partial u} \frac{\partial \tau}{\partial v} - \frac{2}{\Omega} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u \partial v} \\ 2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial v^2} &= \left(\frac{\partial \tau}{\partial v} \right)^2 - \left(\frac{\partial \tau}{\partial u} \right)^2 + \frac{1}{2} (\Omega^2 - \Omega_1^2 + 2 \Omega \Omega_1) + (J + 2m) \end{aligned} \right\} \quad (F)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Omega_1}{\partial u} - \frac{\partial \Omega}{\partial u} &= (\Omega_1 + \Omega) \frac{\partial \tau}{\partial u} \\ \frac{\partial \Omega_1}{\partial v} + \frac{\partial \Omega}{\partial v} &= (\Omega_1 - \Omega) \frac{\partial \tau}{\partial v} \end{aligned} \right\} \quad (G)$$

nelle funzioni incognite τ e Ω_1 ; l'elemento lineare della I_2 è

$$e^{2\tau} (du^2 + dv^2), \quad (H)$$

e i raggi principali di curvatura sono

$$\frac{e^\tau}{r''_2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\Omega_1 + \Omega), \quad \frac{e^\tau}{r''_1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\Omega_1 - \Omega). \quad (K)$$

Nelle formole relative alla superficie I_2 si hanno quattro costanti arbitrarie: una è la costante m che esplicitamente comparisce nelle equazioni (F) e (G), e le altre tre vengono introdotte dall'integrazione.

Precisamente nel passaggio dalla superficie isotérma I alla superficie isotérma I_2 consiste la trasformazione da me osservata e indicata con C_m ; essa non è riducibile ad una inversione perchè, fino a tanto che m è diverso da zero, altera l'invariante I ; non è riducibile ad una trasformazione di CHRISTOFFEL perchè quest'ultima cambia la funzione Ω ; non è nemmeno riducibile ad una D_m perchè quest'ultima trasforma appunto la funzione Ω nella funzione Ω_1 proveniente dall'integrazione del sistema (F) (G) con $m \neq 0$.

La medesima trasformazione fu da me osservata una seconda volta in una Memoria posteriore (*) studiando una notevole classe di superficie, che per un teorema di GUICHARD si connette con la teoria delle superficie isoterme.

La superficie generica (N) della classe in discorso è definita dalla seguente proprietà caratteristica:

« Il existe une surface (N') ayant même image sphérique de ses lignes de courbure que la surface (N), et telle que si r_1 et r_2 sont les rayons de courbure principaux de (N), r'_1 et r'_2 les rayons correspondantes de (N'), on ait

$$r_1 r'_2 + r_2 r'_1 = \text{const.},$$

la constante n'étant pas nulle ».

(*) CALAPSO, *Alcune superficie di Guichard e le relative trasformazioni* [Annali di Matematica, t. XI della serie III, pag. 201 e seguenti].

Il teorema di GUICHARD che connette la teoria di queste superficie con la teoria delle superficie isoterme, può enunciarsi nel modo seguente:

Data una superficie (N) si possono determinare ∞^2 congruenze armoniche alle linee di curvatura di (N) tali che le tangenti isotrope alla superficie nel punto N incontrino il raggio della congruenza in punti A_1, A_2 che descrivono due superficie isoterme I, I_1 corrispondentisi per involuppo di sfere. Inversamente partendo dalle superficie I ed I_1 e considerando la congruenza descritta dalla congiungente i punti A_1, A_2 che si corrispondono in I e I_2 , si ha una congruenza ciclica; il centro del circolo è il punto medio di $A_1 A_2$ ed il raggio è $\frac{i}{2} \overline{A_1 A_2}$; le superficie ortogonali ai circoli sono tutte superficie (N) le cui tangenti isotrope passano per i punti A_1 e A_2 .

Nel presente lavoro allo scopo di studiare a fondo la trasformazione C_m è fatto un breve ritorno al citato teorema di GUICHARD, in guisa da ottenere il passaggio dalla superficie isoterma I alla superficie isoterma I_1 nella forma data da DARBOUX (*).

Le formole generali della trasformazione D_m si deducono pure dalle equazioni (F), (G); cioè: *partiamo da una superficie isoterma I ed integriamo il sistema completo (F) (G); ponendo*

$$\begin{aligned}\psi &= e^{\varphi - \tau}; & \lambda &= e^{-\tau} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \tau}{\partial u} \right) \\ \mu &= e^{-\tau} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial \tau}{\partial v} \right); & w &= e^{-\tau} \frac{1}{\sqrt{2}} (\Omega_1 - \omega) \\ \sigma &= \frac{\lambda^2 + \mu^2 + w^2}{2m\psi}\end{aligned}$$

otteniamo un sistema di funzioni trasformatrici. Inversamente determinato un sistema di funzioni trasformatrici se ne deduce una soluzione del sistema (F), (G) ponendo

$$e^{\tau} = \frac{e^{\varphi}}{\psi}, \quad \Omega_1 = \omega + \sqrt{2} e^{\varphi} \frac{w}{\psi}.$$

Dopo questo teorema si vede intimamente la natura della trasformazione C_m ; invero partendo da una superficie I e da un sistema di funzioni trasfor-

(*) *Sur les surfaces isothermiques*. Annales scientifiques de l'école normale supérieure, t. XVI, troisième série, pag. 491 e seguenti. — Vedasi anche BIANCHI, *Annali di Matematica*, t. XI della serie III, pag. 93 e seguenti.

matrici ad essa relative, la superficie isoterma I_2 rimane determinata dall'elemento lineare

$$e^{2\tau} (du^2 + dv^2), \quad \left(e^\tau = \frac{e^p}{\psi} \right)$$

e dalle espressioni dei raggi di curvatura

$$\frac{e^\tau}{r''_2} = \frac{e^p}{r_2} - \frac{e^p}{\psi} w$$

$$\frac{e^\tau}{r''_1} = \frac{e^p}{r_1} - \frac{e^p}{\psi} w.$$

Si vede cioè che la C_m è quella stessa ritrovata dal BIANCHI nel 1905 (*), e indicata dall'autore con T_m .

Inoltre occorre fare una osservazione.

Denotando con φ_1, r'_1, r'_2 gli elementi relativi alla superficie isoterma I_1 , le espressioni precedenti di $\frac{e^\tau}{r''_2}$ e $\frac{e^\tau}{r''_1}$ si possono scrivere

$$\left. \begin{aligned} 2 \frac{e^\tau}{r''_2} &= \left(\frac{e^p}{r_2} - \frac{e^p}{r_1} \right) - \left(\frac{e^{\varphi_1}}{r'_2} - \frac{e^{\varphi_1}}{r'_1} \right) \\ 2 \frac{e^\tau}{r''_1} &= - \left(\frac{e^p}{r_2} - \frac{e^p}{r_1} \right) - \left(\frac{e^{\varphi_1}}{r'_2} - \frac{e^{\varphi_1}}{r'_1} \right) \end{aligned} \right\} \quad (L)$$

segue che *nota una superficie I_1 legata alla I per trasformazione D_m , la superficie I_2 è perfettamente individuata di forma. Di più scambiando tra loro I ed I_1 , la superficie I_2 si cambia nella sua trasformata di Christoffel (**).*

Stabilite così le proprietà fondamentali della trasformazione C_m , viene ripreso il teorema di GUICHARD con la considerazione seguente.

Indichiamo con

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2$$

l'elemento lineare di una superficie (N), e consideriamo due superficie isoterme I, I_1 che si deducono dalla prima col teorema di GUICHARD; consideriamo inoltre la superficie I_2 che si deduce dalla coppia I ed I_1 mediante le (L); si presenta allora il problema di passare dalla superficie I_2 alla superficie (N).

(*) *Complementi alle ricerche sulle superficie isoterme.* Annali di Matematica, t. XII della serie III, pag. 19 e seguenti.

(**) Questo teorema trovasi enunciato nella Memoria del BIANCHI ora citata a pag. 25.

Posto allora

$$\operatorname{tgh} \theta = \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G}}$$

si ha per la funzione θ il sistema simultaneo illimitatamente integrabile

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial u} + i \frac{\partial \tau}{\partial v} &= - \cosh \theta \frac{e^\tau}{r''_2} \\ i \frac{\partial \theta}{\partial v} + \frac{\partial \tau}{\partial u} &= \sinh \theta \frac{e^\tau}{r''_1}. \end{aligned}$$

Queste formole rappresentano per sè sole una trasformazione che fa passare da una nota superficie isoterma I_2 ad infinite superficie N , tali che

$$\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G}} = \operatorname{tgh} \theta.$$

Questa trasformazione, da non confondersi con la trasformazione data dal teorema di GUICHARD, è qui detta trasformazione di BIANCHI generalizzata; perchè se si assume come superficie I_2 una superficie a curvatura media costante essa si riduce ad una trasformazione di BIANCHI.

La trasformazione di BIANCHI generalizzata si connette con la trasformazione singolare D_0 , di cui è la componente elementare; sussiste cioè il teorema:

Se due superficie isoterme sono legate tra loro dalla trasformazione D_0 , esiste una superficie (N) legata rispettivamente alle prime per trasformazioni di Bianchi immaginarie coniugate.

Questo teorema conduce all'espressione in termini finiti dell'integrale generale del sistema precedente nella funzione θ ; cioè se della superficie isoterma I_2 si conoscono i coseni direttori

$$\begin{array}{ccc} X''_1 & Y''_1 & Z''_1 \\ X''_2 & Y''_2 & Z''_2 \\ X''_3 & Y''_3 & Z''_3 \end{array}$$

degli spigoli del triedro principale, l'espressione più generale di θ è data dalle formole

$$\begin{aligned} \sinh \theta &= \frac{a X''_1 + b Y''_1 + c Z''_1}{a X''_3 + b Y''_3 + c Z''_3} \\ i \cosh \theta &= \frac{a X''_2 + b Y''_2 + c Z''_2}{a X''_3 + b Y''_3 + c Z''_3}, \end{aligned}$$

in cui a, b, c sono costanti arbitrarie soggette alla condizione

$$a^2 + b^2 + c^2 = 0.$$

Stabilite così le proprietà generali delle suddette trasformazioni, vengono sviluppate alcune applicazioni alle superficie minime.

Si perviene allora ai seguenti teoremi:

Una trasformata di Darboux di una superficie minima, quando non è superficie minima, è associata al paraboloide

$$2m(y^2 + z^2) + xy + iz - 4x = 0.$$

Inversamente, fra le trasformate di Darboux di una superficie isoterma associata a questo paraboloide vi è sempre una ed una sola superficie minima.

La trasformazione di BIANCHI generalizzata nel caso delle superficie minime ha la forma

$$\frac{\partial \theta}{\partial u} + i \frac{\partial \varphi}{\partial v} = e^{-\varphi} \cosh \theta$$

$$i \frac{\partial \theta}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} = e^{-\varphi} \sinh \theta.$$

Si deduce allora per θ l'equazione

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = 0,$$

la quale caratterizza il primo invariante della superficie N che si deduce da una superficie minima per trasformazione di BIANCHI. Il secondo invariante di una siffatta superficie N , rispetto alle inversioni di potenza $= -1$, ha l'espressione

$$W = \frac{1}{\sinh \theta \cosh \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} \\ = - \frac{1}{\sinh \theta \cosh \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2}.$$

Esaminando poi il caso di due superficie minime I ed I_1 legate dalla trasformazione D_m , vengono considerate le superficie minime S ed S_1 rispettivamente coniugate alle prime (*). Esse sono le falde focali di una congruenza W .

(*) BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*, vol. II, § 351.

Sulle superficie S ed S_1 si corrispondono oltre ai sistemi coniugati anche i sistemi ortogonali ed in particolare si corrispondono pure le linee di curvatura.

Siffatte congruenze, dette di THYBAUT, sono le sole congruenze W le cui falde focali sono superficie minime.

Vengono qui stabiliti due teoremi sulle congruenze di THYBAUT; cioè:

Se P e P' è una coppia qualunque di punti corrispondenti nelle due falde focali di una congruenza di Thybaut, l'angolo della retta PP' con la linea di curvatura α nel punto P eguaglia l'angolo della medesima con la linea di curvatura β nel punto P' .

La distanza focale t e l'angolo η dei piani focali relativi ad una congruenza di Thybaut sono legati dalla relazione

$$t = \frac{1}{m} \operatorname{tg} \frac{\eta}{2}. \quad (m = \text{cost.}).$$

Se si escludono le congruenze le cui sviluppabili tagliano le superficie focali lungo le linee di curvatura, si può affermare che i teoremi enunciati unitamente alla condizione che sulle superficie focali le linee di curvatura si corrispondono, contengono proprietà caratteristiche delle congruenze di THYBAUT; cioè:

Una congruenza sulle cui falde focali S ed S' si corrispondono le linee di curvatura α , β , tale che l'angolo d'inclinazione del raggio sulla linea α in un punto qualunque di S eguaglia l'angolo d'inclinazione del raggio sulla linea β nel punto corrispondente di S' , è una congruenza di Thybaut.

Una congruenza sulle cui falde focali si corrispondono le linee di curvatura ed in cui la distanza focale e l'angolo dei piani focali sono legati dalla relazione

$$t = \frac{1}{m} \operatorname{tg} \frac{\eta}{2}, \quad (m \text{ costante arbitraria})$$

è una congruenza di Thybaut.

Nella presente Memoria sono soltanto dimostrati i due primi teoremi; la dimostrazione dei due ultimi verrà da me fatta in una nota a parte destinata alle congruenze di THYBAUT.

Infine vengono sviluppate alcune applicazioni alle superficie a curvatura media costante, in cui si perviene ai teoremi seguenti:

Una trasformata di Darboux di una superficie a curvatura media co-

stante, quando non è a curvatura media costante, è isoterma speciale della classe

$$\left(2m + \frac{1}{2}, \quad m, \quad -m, \quad \frac{1}{4} - 2m\right).$$

Inversamente, fra le trasformate di Darboux di una superficie isoterma speciale di questa classe, vi è sempre una ed una sola superficie a curvatura media costante.

La trasformazione di BIANCHI generalizzata assume nel caso attuale due differenti aspetti secondo che si prende

$$\frac{e^{\varphi}}{r_1} = \cosh \varphi, \quad \frac{e^{\varphi}}{r_2} = \sinh \varphi$$

oppure

$$\frac{e^{\varphi}}{r_1} = \sinh \varphi, \quad \frac{e^{\varphi}}{r_2} = \cosh \varphi.$$

Nel primo caso è una trasformazione di BIANCHI propriamente detta e la superficie N che si deduce è a curvatura totale costante.

Nel secondo caso la superficie N è caratterizzata dall'equazione differenziale

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} - \sinh \theta \cosh \theta = 0 \quad (M)$$

a cui deve soddisfare la funzione θ ; il secondo invariante della superficie ha l'espressione

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{\sinh \theta \cosh \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} - \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{\sinh \theta \cosh \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

È utile osservare che quando la funzione θ è reale, le superficie N sono pure reali; questo fatto ci dà una nuova interpretazione dell'equazione (M) dal punto di vista reale.

Un'altra interpretazione della medesima è nota dalle ricerche del BIANCHI intorno alla regione ideale del paraboloide ellittico (*).

(*) BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*, vol. III, pag. 267.

Venendo poi alla trasformazione C_m abbiamo i seguenti teoremi:

La trasformazione C_m cangia una superficie a curvatura media costante (uguale $+1$) in una superficie isoterma speciale della classe

$$\left(\frac{1}{2} - 2m, \quad 0, \quad mc, \quad \frac{1}{4}\right),$$

con c costante arbitraria.

Inversamente, *una superficie isoterma speciale di questa classe si può sempre considerare come ottenuta da una superficie a curvatura media costante ($=1$) per trasformazione C_m ed in una sola maniera.*

Un caso particolare notevole si ha considerando due superficie I ed I_1 a curvatura media costante, legate dalla trasformazione D_m ; la corrispondente superficie I_2 è in questo caso della classe

$$\left(\frac{1}{2} - 2m, \quad 0, \quad 0, \quad \frac{1}{4}\right),$$

che rientra nel tipo precedente per $c=0$. La superficie I_2 è associata ad una quadrica di rotazione; vi corrisponde per un teorema di GUICHARD una terza superficie a curvatura media costante, legata alle superficie I ed I_1 per trasformazioni di BIANCHI immaginarie coniugate.

Adunque in questo caso particolare la considerazione della trasformazione C_m conduce alla decomposizione di una trasformazione di GUICHARD (*) nelle componenti elementari di BIANCHI.

§ 1.

IL TEOREMA DI GUICHARD.

Ricordiamo che se x, y, z sono le coordinate di un punto di una superficie (N) ed $X_i^{(0)}, Y_i^{(0)}, Z_i^{(0)}$ i coseni direttori dei tre spigoli del triedro principale, hanno luogo le relazioni

$$\frac{\partial x}{\partial u} = e^{\xi} \sinh \theta \cdot X_1^{(0)}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = e^{\xi} \cosh \theta \cdot X_2^{(0)} \quad (I)$$

(*) *Sur la déformation des quadriques de révolution*; Comptes Rendus, anno 1899, t. 128, pag. 232.

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\partial X_1^{(0)}}{\partial u} &= - \left(\operatorname{tgh} \theta \frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial v} \right) X_2^{(0)} + (\cosh \theta + H \sinh \theta) X_3^{(0)} \\
\frac{\partial X_1^{(0)}}{\partial v} &= \left(\coth \theta \frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial u} \right) X_2^{(0)} \\
\frac{\partial X_2^{(0)}}{\partial u} &= \left(\operatorname{tgh} \theta \frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial v} \right) X_1^{(0)} \\
\frac{\partial X_2^{(0)}}{\partial v} &= - \left(\coth \theta \frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial u} \right) X_1^{(0)} + (\sinh \theta + H \cosh \theta) X_3^{(0)} \\
\frac{\partial X_3^{(0)}}{\partial u} &= - (\cosh \theta + H \sinh \theta) X_1^{(0)} \\
\frac{\partial X_3^{(0)}}{\partial v} &= - (\sinh \theta + H \cosh \theta) X_2^{(0)},
\end{aligned} \right\} \quad (I)$$

in cui ξ , θ , H sono una soluzione qualunque delle equazioni

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial u} &= (H + \coth \theta) \frac{\partial \xi}{\partial u}, \quad \frac{\partial H}{\partial v} = (H + \operatorname{tgh} \theta) \frac{\partial \xi}{\partial v}, \\
\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} + \coth \theta \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} + \operatorname{tgh} \theta \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} - \frac{1}{\sinh^2 \theta} \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial \xi}{\partial u} + \\
&+ \frac{1}{\cosh^2 \theta} \frac{\partial \theta}{\partial v} \frac{\partial \xi}{\partial v} + (\cosh \theta + H \sinh \theta) (\sinh \theta + H \cosh \theta) = 0.
\end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Ricordiamo inoltre che la funzione θ è invariante della superficie (N) rispetto alle inversioni di potenza eguale a -1 ; il secondo invariante W della superficie (N) è legato alla funzione θ mediante le relazioni

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial u} &= \frac{1}{\cosh^2 \theta} \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{1}{\sinh^2 \theta} \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} - \\
&- \frac{1}{\sinh \theta \cosh \theta} \frac{\partial^3 \theta}{\partial u \partial v^2} - 2 \operatorname{tgh} \theta \frac{\partial \theta}{\partial u} W \\
\frac{\partial W}{\partial v} &= - \frac{1}{\cosh^2 \theta} \frac{\partial \theta}{\partial v} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} - \frac{1}{\sinh^2 \theta} \frac{\partial \theta}{\partial v} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} + \\
&+ \frac{1}{\sinh \theta \cosh \theta} \frac{\partial^3 \theta}{\partial u^2 \partial v} - 2 \coth \theta \frac{\partial \theta}{\partial v} W.
\end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Viceversa se queste equazioni nella funzione incognita W ammettono una soluzione comune, la funzione θ si può assumere come invariante fondamentale di una superficie (N).

Se φ è una soluzione qualunque del sistema (illimitatamente integrabile)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + i \frac{\partial \theta}{\partial v} &= -\sinh \theta \cosh (\varphi - \xi) - i \operatorname{tgh} \theta \frac{\partial \xi}{\partial v} - \\ &\quad - \frac{1}{2} e^{\varphi - \xi} (H^2 \sinh \theta + 2 H \cosh \theta) \\ i \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u} &= \cosh \theta \sinh (\varphi - \xi) - \coth \theta \frac{\partial \xi}{\partial u} + \\ &\quad + \frac{1}{2} e^{\varphi - \xi} (H^2 \cosh \theta + 2 H \sinh \theta), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

le equazioni

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x + e^{\varphi} (X_1^{(0)} + i X_2^{(0)}) \\ y_1 &= y + e^{\varphi} (Y_1^{(0)} + i Y_2^{(0)}) \\ z_1 &= z + e^{\varphi} (Z_1^{(0)} + i Z_2^{(0)}) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

danno una superficie isoterma I , riferita alle linee di curvatura, derivata dalla superficie N per trasformazione G (*).

Denotando come precedentemente con

$$(X_1, Y_1, Z_1); (X_2, Y_2, Z_2); (X_3, Y_3, Z_3)$$

i coseni direttori degli spigoli del triedro principale relativo alla superficie I , le relazioni che legano X_i, Y_i, Z_i con $X_i^{(0)}, Y_i^{(0)}, Z_i^{(0)}$ si possono scrivere nel seguente modo:

$$\left. \begin{aligned} X_1^{(0)} &= - \left[\sinh \theta \sinh (\varphi - \xi) + \frac{1}{2} e^{\varphi - \xi} (H^2 \sinh \theta + 2 H \cosh \theta) \right] X_1 - \\ &\quad - i \left[\cosh \theta \sinh (\varphi - \xi) + \frac{1}{2} e^{\varphi - \xi} (H^2 \cosh \theta + 2 H \sinh \theta) \right] X_2 - \\ &\quad - \left[\frac{1}{2} e^{\varphi - \xi} H^2 - \cosh (\varphi - \xi) \right] X_3 \\ X_2^{(0)} &= - i \left[\sinh \theta \cosh (\varphi - \xi) + \frac{1}{2} e^{\varphi - \xi} (H^2 \sinh \theta + 2 H \cosh \theta) \right] X_1 + \\ &\quad + \left[\cosh \theta \cosh (\varphi - \xi) + \frac{1}{2} e^{\varphi - \xi} (H^2 \cosh \theta + 2 H \sinh \theta) \right] X_2 - \\ &\quad - i \left[\frac{1}{2} e^{\varphi - \xi} H^2 - \sinh (\varphi - \xi) \right] X_3 \\ X_3^{(0)} &= (\cosh \theta + H \sinh \theta) X_1 + i (\sinh \theta + H \cosh \theta) X_2 + H X_3 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

(*) Vedasi la mia citata Memoria, pag. 224.

ed i raggi di curvatura della superficie I hanno le espressioni

$$\left. \begin{aligned} \frac{e^{\varphi}}{r_2} &= \frac{1}{\sinh \theta} \frac{\partial \xi}{\partial u} + \cosh (\varphi - \xi) - \frac{e^{\varphi - \xi}}{2} H^2 \\ \frac{e^{\varphi}}{r_1} &= -i \frac{1}{\cosh \theta} \frac{\partial \xi}{\partial v} + \sinh (\varphi - \xi) - \frac{e^{\varphi - \xi}}{2} H^2. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

La superficie I è ottenuta come luogo di un punto A_1 situato su una tangente isotropa della superficie (N) ; una seconda superficie isoterma I_1 si può ottenere come luogo di un punto A_2 situato sull'altra tangente isotropa della superficie (N) .

Basta assumere una soluzione del sistema (*pure illimitatamente integrabile*)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} - i \frac{\partial \theta}{\partial v} &= \sinh \theta \cosh (\varphi_1 - \xi) + i \tanh \theta \frac{\partial \xi}{\partial v} + \\ &\quad + \frac{1}{2} e^{\varphi_1 - \xi} (H^2 \sinh \theta + 2 H \cosh \theta) \\ -i \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u} &= -\cosh \theta \sinh (\varphi_1 - \xi) - \coth \theta \frac{\partial \xi}{\partial u} - \\ &\quad - \frac{1}{2} e^{\varphi_1 - \xi} (H^2 \cosh \theta + 2 H \sinh \theta) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

e porre

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= x - e^{\varphi_1} (X_1^{(0)} - i X_2^{(0)}) \\ y_2 &= y - e^{\varphi_1} (Y_1^{(0)} - i Y_2^{(0)}) \\ z_2 &= z - e^{\varphi_1} (Z_1^{(0)} - i Z_2^{(0)}) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

La superficie I_1 è derivata dalla (N) per trasformazione \bar{G} ; considerando inoltre la congruenza descritta dalla retta $A_1 A_2$, si vede facilmente che essa è armonica alle linee di curvatura di (N) .

Verifichiamo direttamente che le superficie I ed I_1 si corrispondono per inviluppo di sfere.

Infatti in forza delle equazioni (3) e (7) per le funzioni φ e φ_1 e delle equazioni fondamentali (1) a cui soddisfano ξ , θ , H , esiste una funzione σ soddisfacente alle condizioni

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \log \sigma}{\partial u} &= -\frac{e^{\varphi_1 - \xi}}{2} (H^2 \sinh \theta + 2 H \cosh \theta + \sinh \theta) + \frac{e^{\xi - \varphi}}{2} \sinh \theta \\ \frac{\partial \log \sigma}{\partial v} &= i \frac{e^{\varphi_1 - \xi}}{2} (H^2 \cosh \theta + 2 H \sinh \theta + \cosh \theta) - i \frac{e^{\xi - \varphi}}{2} \cosh \theta. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Introducendo allora altre quattro funzioni λ, μ, w, ψ colle formole

$$\left. \begin{aligned} \frac{\lambda}{\sigma} &= -\frac{e^{\varphi+\varphi_1-\xi}}{2} (H^2 \sinh \theta + 2H \cosh \theta + \sinh \theta) + \frac{e^\xi}{2} \sinh \theta \\ \frac{\mu}{\sigma} &= -i \frac{e^{\varphi+\varphi_1-\xi}}{2} (H^2 \cosh \theta + 2H \sinh \theta + \cosh \theta) + i \frac{e^\xi}{2} \cosh \theta \\ \frac{w}{\sigma} &= -\frac{e^{\varphi+\varphi_1-\xi}}{2} (H^2 - 1) + \frac{e^\xi}{2} \\ \frac{\psi}{\sigma} &= e^{\varphi+\varphi_1} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

e tenendo sempre conto delle equazioni a cui soddisfano le funzioni $\varphi, \varphi_1, \xi, \theta, H$ si ottiene il sistema simultaneo

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial u} &= e^{-\varphi} \lambda \\ \frac{\partial \sigma}{\partial v} &= -e^{-\varphi} \mu \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} &= e^{\varphi} \lambda \\ \frac{\partial \psi}{\partial v} &= e^{\varphi} \mu \\ \frac{\partial w}{\partial u} &= \frac{e^{\varphi}}{r_2} \lambda \\ \frac{\partial w}{\partial v} &= \frac{e^{\varphi}}{r_1} \mu \\ \frac{\partial \lambda}{\partial u} &= \frac{e^{\varphi}}{2} \sigma + \frac{e^{-\varphi}}{2} \psi - \frac{e^{\varphi}}{r_2} w - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \mu \\ \frac{\partial \lambda}{\partial v} &= \frac{\partial \varphi}{\partial u} \mu \\ \frac{\partial \mu}{\partial u} &= \frac{\partial \varphi}{\partial v} \lambda \\ \frac{\partial \mu}{\partial v} &= \frac{e^{\varphi}}{2} \sigma - \frac{e^{-\varphi}}{2} \psi - \frac{e^{\varphi}}{r_1} w - \frac{\partial \varphi}{\partial u} \lambda \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

e si ha pure la relazione

$$\lambda^2 + \mu^2 + w^2 = \psi \sigma. \quad (12)$$

Inoltre dalle (4) ed (8) si ha

$$x_2 = x_1 - (e^{\varphi} + e^{\varphi_1}) X_1^{(1)} - i (e^{\varphi} - e^{\varphi_1}) X_2^{(0)} \quad (13)$$

colle analoghe in y e z ; donde sostituendo per $X_1^{(0)}$, $X_2^{(0)}$ le espressioni (5) ed osservando le (10) otteniamo

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= x_1 - \frac{2}{\sigma} (\lambda X_1 + \mu X_2 + w X_3) \\ y_2 &= y_1 - \frac{2}{\sigma} (\lambda Y_1 + \mu Y_2 + w Y_3) \\ z_2 &= z_1 - \frac{2}{\sigma} (\lambda Z_1 + \mu Z_2 + w Z_3). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Ed allora confrontando con le formole (I), (II), (7) della citata Memoria di BIANCHI, rimane verificata la proposizione.

Inversamente consideriamo una superficie isoterma I , di cui assumiamo come sopra l'elemento lineare sotto la forma

$$ds^2 = e^{2\varphi} (du^2 + dv^2);$$

denotiamo con X_i , Y_i , Z_i i coseni direttori degli spigoli del triedro principale e con r_1 , r_2 i raggi principali di curvatura; indi determiniamo una soluzione λ , μ , w , ψ , σ del sistema completo (11), (12) e consideriamo la superficie I , data dalle equazioni (14).

In tali condizioni poniamo il seguente sistema di equazioni differenziali nella funzione incognita θ

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial u} + i \frac{\partial \varphi}{\partial v} &= -\cosh \theta \cdot \frac{e^{\varphi}}{r_2} + e^{\varphi} \left(i \frac{\mu}{\psi} + \cosh \theta \frac{w}{\psi} \right) \\ i \frac{\partial \theta}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} &= \sinh \theta \cdot \frac{e^{\varphi}}{r_1} + e^{\varphi} \left(\frac{\lambda}{\psi} - \sinh \theta \frac{w}{\psi} \right) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Tenendo conto delle equazioni di GAUSS e di CODAZZI relative alla superficie I e delle equazioni (11) e (12) per λ , μ , w , ψ , σ si riconosce con calcolo facile che questo sistema è illimitatamente integrabile; sicchè avremo dall'integrazione una funzione θ contenente una costante arbitraria.

Determinata la θ introduciamo le funzioni ξ ed H ponendo

$$\left. \begin{aligned} e^{\xi} &= \frac{\psi}{\lambda \sinh \theta + i \mu \cosh \theta + w} \\ H &= - \frac{\lambda \cosh \theta + i \mu \sinh \theta}{\lambda \sinh \theta + i \mu \cosh \theta + w} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Le funzioni θ, ξ, H così determinate soddisfano, in forza delle (11) e (12), alle equazioni (48), (49) e (50) della mia precedente Memoria sopra citata; sicchè ponendo

$$\left. \begin{aligned} x &= x_1 - e^\xi (X_1 \sinh \theta + i X_2 \cosh \theta + X_3) \\ y &= y_1 - e^\xi (Y_1 \sinh \theta + i Y_2 \cosh \theta + Y_3) \\ z &= z_1 - e^\xi (Z_1 \sinh \theta + i Z_2 \cosh \theta + Z_3) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

avremo una superficie (N), da cui la superficie isoterma I si può considerare come derivata per trasformazione G ; avranno allora luogo le (6), ed i coseni direttori degli spigoli del triedro principale relativo alla superficie N ora determinata saranno espressi dalle (5). Inoltre poniamo

$$e^{\varphi_1} = e^{-\varphi} \frac{\psi}{\sigma} \quad (18)$$

e scriviamo le (16) risolte rispetto a $\frac{\lambda}{\psi}$ e $i \frac{\mu}{\psi}$, cioè

$$\left. \begin{aligned} \frac{\lambda}{\psi} &= \sinh \theta \frac{w}{\psi} - e^{-\xi} (\sinh \theta + H \cosh \theta) \\ i \frac{\mu}{\psi} &= -\cosh \theta \frac{w}{\psi} + e^{-\xi} (\cosh \theta + H \sinh \theta). \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Quadrando ed osservando la (12) otteniamo

$$\frac{\sigma}{\psi} = 2 e^{-\xi} \frac{w}{\psi} + e^{-2\xi} (H^2 - 1)$$

che per la (18) possiamo scrivere

$$\frac{w}{\sigma} = -\frac{e^{\varphi+\varphi_1-\xi}}{2} (H^2 - 1) + \frac{e^\xi}{2}.$$

Da questa, dalle (19) e dalla (18) si deducono le (10), donde segue facilmente che la funzione φ_1 soddisfa alle (7); infine dalle (14) e (17) si ricava

$$\begin{aligned} x_2 = x + \left(e^\xi \sinh \theta - \frac{2\lambda}{\sigma} \right) X_1 + \left(i e^\xi \cosh \theta - \frac{2\mu}{\sigma} \right) X_2 + \\ + \left(e^\xi - \frac{2w}{\sigma} \right) X_3 \end{aligned}$$

ossia per le (10)

$$\begin{aligned} x_2 = x + e^{\varphi+\varphi_1-\frac{\xi}{2}} (H^2 \sinh \theta + 2 H \cosh \theta + \sinh \theta) X_1 + \\ + i e^{\varphi+\varphi_1-\frac{\xi}{2}} (H^2 \cosh \theta + 2 H \sinh \theta + \cosh \theta) X_2 + \\ + e^{\varphi+\varphi_1-\frac{\xi}{2}} (H^2 - 1) X_3 \end{aligned}$$

donde in forza delle (5) seguono le equazioni

$$\begin{aligned} x_2 &= x - e^{\varphi_1} (X_1 - i X_2) \\ y_2 &= y - e^{\varphi_1} (Y_1 - i Y_2) \\ z_2 &= z - e^{\varphi_1} (Z_1 - i Z_2), \end{aligned}$$

le quali esprimono che la superficie I_1 si può considerare come derivata dalla superficie (N) per trasformazione \bar{G} . Esistono dunque infinite superficie (N) , in corrispondenza delle superficie I ed I_1 , dipendenti da una costante arbitraria che viene introdotta dall'integrazione del sistema (15).

Considerando i punti A_1 e A_2 che descrivono le superficie isoterme I ed I_1 , abbiamo

$$\overline{A_1 A_2} = 2 \sqrt{\frac{\psi}{\sigma}};$$

inoltre scrivendo le coordinate del punto N sotto la forma

$$x = x_1 - \psi \frac{X_1 \sinh \theta + i X_2 \cosh \theta + X_3}{\lambda \sinh \theta + i \mu \cosh \theta + w}, \quad (20)$$

riconosciamo subito che la distanza del punto N dalla retta $A_1 A_2$ è:

$$i \sqrt{\frac{\psi}{\sigma}}; \quad (21)$$

onde se consideriamo in (20) x, y, z come funzioni di u e v e della costante introdotta dall'integrazione, l'espressione (21), indipendente da θ , mostra che fissato u, v e variando la costante il punto N descrive un circolo, che incontra ortogonalmente la superficie (N) nel punto N .

§ 2.

LE FORMOLE DI DARBOUX PER LA TRASFORMAZIONE D_m .

Le formole di DARBOUX relative alla trasformazione D_m si deducono pure da quelle da me ottenute nella precedente Memoria sopra citata nel seguente modo.

Mantenendo le superiori notazioni per la superficie isoterma I , consideriamo le equazioni di GAUSS e di CODAZZI sotto la forma

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + \frac{e^{2\varphi}}{r_1 r_2} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{e^\varphi}{r_2} \right) &= \frac{e^\varphi}{r_1} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{e^\varphi}{r_1} \right) &= \frac{e^\varphi}{r_2} \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

ossia, ponendo

$$\frac{e^\varphi}{r_2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega + \Omega), \quad \frac{e^\varphi}{r_1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega - \Omega) \quad (23)$$

consideriamo le medesime sotto la forma

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + \frac{1}{2}(\omega^2 - \Omega^2) &= 0 \\ \frac{\partial \omega}{\partial v} + \frac{\partial \Omega}{\partial v} &= (\omega - \Omega) \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \omega}{\partial u} - \frac{\partial \Omega}{\partial u} &= (\omega + \Omega) \frac{\partial \varphi}{\partial u}. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Introducendo la funzione ausiliaria J mediante la posizione

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2 + \omega \Omega = -J \quad (25)$$

ossia

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{e^{2\varphi}}{r_2^2} - \frac{e^{2\varphi}}{r_1^2} \right) = -J \quad (26)$$

dalle mie ricerche precedenti abbiamo il sistema

$$\left. \begin{aligned} 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2 + \frac{1}{2} (\Omega^2 - \omega^2 - 2 \omega \Omega) - J \\ 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} &= 2 \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{2}{\Omega} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u \partial v} \\ 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2 + \frac{1}{2} (\Omega^2 - \omega^2 + 2 \omega \Omega) + J, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

e la funzione Ω soddisfa all'equazione differenziale di quarto ordine

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} \left(\frac{1}{\Omega} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u \partial v} \right) + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left(\frac{1}{\Omega} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u \partial v} \right) + \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} (\Omega^2) = 0. \quad (28)$$

Ciò posto ricordiamo il teorema da me stabilito nella citata Memoria, cioè:

Se Ω è una soluzione della (28) corrispondente ad una superficie isoterma I (per la quale si mantengono le notazioni superiori), il sistema di equazioni differenziali

$$\left. \begin{aligned} 2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial u^2} &= \left(\frac{\partial \tau}{\partial u} \right)^2 - \left(\frac{\partial \tau}{\partial v} \right)^2 + \frac{1}{2} (\Omega^2 - \Omega_1^2 - 2 \Omega \Omega_1) - (J + 2m) \\ 2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial u \partial v} &= 2 \frac{\partial \tau}{\partial u} \frac{\partial \tau}{\partial v} - \frac{2}{\Omega} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u \partial v} \\ 2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial v^2} &= \left(\frac{\partial \tau}{\partial v} \right)^2 - \left(\frac{\partial \tau}{\partial u} \right)^2 + \frac{1}{2} (\Omega^2 - \Omega_1^2 + 2 \Omega \Omega_1) + (J + 2m) \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Omega_1}{\partial u} - \frac{\partial \Omega}{\partial u} &= (\Omega_1 + \Omega) \frac{\partial \tau}{\partial u} \\ \frac{\partial \Omega_1}{\partial v} + \frac{\partial \Omega}{\partial v} &= (\Omega_1 - \Omega) \frac{\partial \tau}{\partial v} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

(m costante arbitraria)

è illimitatamente integrabile; si avrà dall'integrazione una funzione Ω_1 con quattro costanti arbitrarie che sarà una nuova soluzione della (28).

Assumiamo una soluzione τ , Ω_1 di questo sistema ed introduciamo le nuove funzioni

$$\left. \begin{aligned} \psi &= e^{\varphi - \tau}; \quad \lambda = e^{-\tau} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \tau}{\partial u} \right) \\ \mu &= e^{-\tau} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial \tau}{\partial v} \right); \quad w = e^{-\tau} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (\Omega - \omega) \\ \sigma &= \frac{\lambda^2 + \mu^2 + w^2}{2m\psi} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Da queste tenendo presenti le (27), (29), (30) e le espressioni (23) dei raggi di curvatura della superficie I , si ricavano le equazioni

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial u} &= m e^{\varphi} \sigma + m e^{-\varphi} \psi - \frac{e^{\varphi}}{r_2} w - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \mu \\ \frac{\partial \lambda}{\partial v} &= \frac{\partial \varphi}{\partial u} \mu \\ \frac{\partial \mu}{\partial u} &= \frac{\partial \varphi}{\partial v} \lambda \\ \frac{\partial \mu}{\partial v} &= m e^{\varphi} \sigma - m e^{-\varphi} \psi - \frac{e^{\varphi}}{r_1} w - \frac{\partial \varphi}{\partial u} \lambda \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} &= e^{\varphi} \lambda \\ \frac{\partial \psi}{\partial v} &= e^{\varphi} \mu \\ \frac{\partial w}{\partial u} &= \frac{e^{\varphi}}{r_2} \lambda \\ \frac{\partial w}{\partial v} &= \frac{e^{\varphi}}{r_1} \mu \\ \frac{\partial \sigma}{\partial u} &= e^{-\varphi} \lambda \\ \frac{\partial \sigma}{\partial v} &= -e^{-\varphi} \mu. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Per la nuova soluzione φ_1 , $\frac{1}{r'_1}$, $\frac{1}{r'_2}$ del sistema (22) potremo assumere

$$\left. \begin{aligned} e^{\varphi_1} &= e^{-\varphi} \frac{\psi}{\sigma} \\ \frac{e^{\varphi_1}}{r'_1} &= \frac{e^{\varphi}}{r_1} - w \left(\frac{e^{\varphi}}{\psi} - \frac{e^{-\varphi}}{\sigma} \right) \\ \frac{e^{\varphi_1}}{r'_2} &= -\frac{e^{\varphi}}{r_2} + w \left(\frac{e^{\varphi}}{\psi} + \frac{e^{-\varphi}}{\sigma} \right) \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

a cui corrisponde una superficie isoterma I_1 derivata da I con la trasformazione indicata, e le coordinate di un punto di I_1 saranno

$$x_2 = x_1 - \frac{1}{m\sigma} (\lambda X_1 + \mu X_2 + w X_3). \quad (34)$$

Abbiamo così ottenuto la trasformazione D_m .

Inversamente partiamo da una superficie isoterma I e determiniamo una soluzione del sistema completo (32) tale che

$$\lambda^2 + \mu^2 + w^2 = 2m\psi\sigma; \quad (35)$$

le (34) daranno una nuova superficie isoterma I_1 ; e ponendo

$$\left. \begin{aligned} e^\tau &= \frac{e^\varphi}{\psi} \\ \Omega_1 &= \omega + \sqrt{2} e^\varphi \frac{w}{\psi}, \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

si avrà una soluzione del sistema (29), (30).

Risulta così ben precisato in che modo il passaggio dalla soluzione Ω alla soluzione Ω_1 dell'equazione (28), eseguito mediante l'integrazione del sistema completo (29), (30), è l'espressione analitica della trasformazione D_m .

§ 3.

LA TRASFORMAZIONE C_m , E LA TRASFORMAZIONE DI BIANCHI GENERALIZZATA.

Veniamo alle formole della trasformazione C_m con una semplice osservazione.

Dalle equazioni (29) e (30) si ha

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \tau}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial v^2} + \frac{1}{2} (\Omega_1^2 - \Omega^2) &= 0 \\ \frac{\partial \Omega_1}{\partial v} + \frac{\partial \Omega}{\partial v} &= (\Omega_1 - \Omega) \frac{\partial \tau}{\partial v} \\ \frac{\partial \Omega_1}{\partial u} - \frac{\partial \Omega}{\partial u} &= (\Omega_1 + \Omega) \frac{\partial \tau}{\partial u}, \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

le quali esprimono che le funzioni τ , Ω_1 , Ω sono anch'esse una nuova soluzione del sistema (24); esiste dunque una superficie isoterma I_2 coll'elemento lineare

$$e^{2\tau} (du^2 + dv^2) \quad e^\tau = \frac{e^\varphi}{\psi} \quad (38)$$

e di cui i raggi principali di curvatura hanno le espressioni

$$\left. \begin{aligned} \frac{e^\tau}{r''_2} &= \frac{e^\varphi}{r_2} - \frac{e^\varphi}{\psi} w \\ \frac{e^\tau}{r''_1} &= \frac{e^\varphi}{r_1} - \frac{e^\varphi}{\psi} w. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Vediamo così che partendo da una superficie isoterma I ed assumendo una soluzione del sistema completo (32) alla condizione iniziale (35), deduciamo due diverse superficie isoterme I_1 e I_2 ; la prima, definita dalle (33), è legata alla superficie I dalla trasformazione D_m ; l'altra, definita dalle (38) e (39), è legata alla superficie I dalla trasformazione C_m .

Nota una coppia I ed I_1 di superficie isoterme legate dalla trasformazione di DARBOUX, la superficie I_2 è individuata di forma; le formole che danno le quantità $\frac{e^\tau}{r''_2}$, $\frac{e^\tau}{r''_1}$ direttamente mediante le quantità analoghe relative ad I ed I_1 si deducono subito dalle (39) e (33) sotto la forma

$$\begin{aligned} 2 \frac{e^\tau}{r''_2} &= \left(\frac{e^\varphi}{r_2} - \frac{e^\varphi}{r_1} \right) - \left(\frac{e^{\varphi_1}}{r'_2} - \frac{e^{\varphi_1}}{r'_1} \right) \\ 2 \frac{e^\tau}{r''_1} &= - \left(\frac{e^\varphi}{r_2} - \frac{e^\varphi}{r_1} \right) - \left(\frac{e^{\varphi_1}}{r'_2} - \frac{e^{\varphi_1}}{r'_1} \right). \end{aligned}$$

È utile osservare che scambiando tra loro I ed I_1 , la superficie I_2 si cambia nella sua trasformata di CHRISTOFFEL.

Vogliamo ora stabilire una nuova trasformazione, che per ragioni che rileveremo tosto diremo trasformazione di BIANCHI generalizzata.

Se esprimiamo il sistema (15) mediante τ , r''_1 , r''_2 , abbiamo

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial u} + i \frac{\partial \tau}{\partial v} &= - \cosh \theta \frac{e^\tau}{r''_2} \\ i \frac{\partial \theta}{\partial v} + \frac{\partial \tau}{\partial u} &= \sinh \theta \frac{e^\tau}{r''_1}; \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

queste equazioni nella funzione incognita θ formano un sistema illimitatamente integrabile. Introduciamo inoltre le funzioni τ , r''_1 , r''_2 nel sistema

(11) (12), otteniamo

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial \lambda}{\partial u} &= \left(\lambda^2 - \frac{\psi^2}{2} \right) e^\tau + \frac{1}{2} e^{-\tau} - \frac{e^\tau}{r''_2} w - \frac{\partial \tau}{\partial v} \mu \\
 \frac{\partial \lambda}{\partial v} &= \frac{\partial \tau}{\partial u} \mu + e^\tau \lambda \mu \\
 \frac{\partial \mu}{\partial u} &= \frac{\partial \tau}{\partial v} \lambda + e^\tau \lambda \mu \\
 \frac{\partial \mu}{\partial v} &= \left(\mu^2 - \frac{\psi^2}{2} \right) e^\tau - \frac{1}{2} e^{-\tau} - \frac{e^\tau}{r''_1} w - \frac{\partial \tau}{\partial u} \lambda \\
 \frac{\partial \psi}{\partial u} &= e^\tau \psi \lambda \\
 \frac{\partial \psi}{\partial v} &= e^\tau \psi \mu \\
 \frac{\partial w}{\partial u} &= \frac{e^\tau}{r''_2} \lambda + e^\tau \lambda w \\
 \frac{\partial w}{\partial v} &= \frac{e^\tau}{r''_1} \mu + e^\tau \mu w \\
 \frac{\partial \sigma}{\partial u} &= e^{-\tau} \frac{\lambda}{\psi} \\
 \frac{\partial \sigma}{\partial v} &= -e^{-\tau} \frac{\mu}{\psi} \\
 \lambda^2 + \mu^2 + w^2 &= \psi \sigma,
 \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

che formano pure un sistema illimitatamente integrabile nelle funzioni λ , μ , w , ψ , σ .

Qui importa fare la seguente osservazione.

Consideriamo la superficie isoterma I_2 ed assumiamo sei funzioni θ , λ , μ , ψ , w , σ soddisfacenti alle (40) e (41); si verifica con facile calcolo che ponendo

$$\left. \begin{aligned}
 e^{\frac{\psi}{\sigma}} &= \frac{\psi}{\lambda \sinh \theta + i \mu \cosh \theta + w} \\
 H &= - \frac{\lambda \cosh \theta + i \mu \sinh \theta}{\lambda \sinh \theta + i \mu \cosh \theta + w}
 \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

sono soddisfatte le (1).

Dunque, partendo da una superficie isoterma I_2 , integrando il sistema completo (40) ed il sistema completo (41) ed osservando le (42), otteniamo tre funzioni θ , ξ , H , tali che le forme quadratiche

$$\left. \begin{aligned} e^{2\xi} (\sinh^2 \theta \, d u^2 + \cosh^2 \theta \, d v^2) \\ (\cosh \theta + H \sinh \theta)^2 \, d u^2 + (\sinh \theta + H \cosh \theta)^2 \, d v^2 \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

si possono considerare come prima e terza forma fondamentale di una superficie N riferita alle linee di curvatura.

È questa la trasformazione che volevamo stabilire; essa sarà da noi detta trasformazione di BIANCHI generalizzata, e sarà talora indicata brevemente con B per la ragione seguente.

Assumiamo come superficie isoterma I_2 una superficie a curvatura media costante coll'elemento lineare

$$d s^2 = e^{2\tau} (d u^2 + d v^2). \quad (44)$$

Per i raggi principali di curvatura possiamo assumere

$$\frac{e^\tau}{r''_1} = \cosh \tau \quad (45)$$

$$\frac{e^\tau}{r''_2} = \sinh \tau. \quad (46)$$

Applichiamo ad essa la trasformazione (40) per dedurre una superficie N ; avremo

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial u} + i \frac{\partial \tau}{\partial v} &= -\cosh \theta \sinh \tau \\ i \frac{\partial \theta}{\partial v} + \frac{\partial \tau}{\partial u} &= \sinh \theta \cosh \tau \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

ed assumiamo la soluzione particolare del sistema (41)

$$\lambda = 0, \quad \nu = 0, \quad w = -1, \quad \psi = -1, \quad \sigma = -1. \quad (48)$$

Allora le (42) danno

$$e^\xi = 1, \quad H = 0 \quad (49)$$

e le (43) diventano

$$\sinh^2 \theta \, d u^2 + \cosh^2 \theta \, d v^2 \quad (50)$$

$$\cosh^2 \theta \, d u^2 + \sinh^2 \theta \, d v^2 \quad (51)$$

Queste esprimono che la superficie N è una superficie a curvatura totale costante derivata da I_2 per trasformazione di BIANCHI.

§ 4.

LA TRASFORMAZIONE B IN RELAZIONE COLLA TRASFORMAZIONE SINGOLARE D_0 .

Consideriamo la superficie isoterma I_2 , ed applicando il teorema del paragrafo precedente deduciamo una superficie N legata alla I_2 per trasformazione B ; esistono allora tre funzioni w_1, ψ_1, σ_1 tali che

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \log w_1}{\partial u} &= \frac{e^\tau}{r''_2} \sinh \theta \\ \frac{\partial \log w_1}{\partial v} &= i \frac{e^\tau}{r''_1} \cosh \theta \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial u} &= e^\tau w_1 \sinh \theta \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial v} &= i e^\tau w_1 \cosh \theta \\ \frac{\partial \sigma_1}{\partial u} &= e^{-\tau} w_1 \sinh \theta \\ \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} &= -i e^{-\tau} w_1 \cosh \theta; \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

introduciamo inoltre le funzioni

$$\lambda_1 = w_1 \sinh \theta \quad \mu_1 = i w_1 \cosh \theta. \quad (53)$$

Le cinque funzioni così introdotte verificano il sistema

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \lambda_1}{\partial u} &= -\frac{e^\tau}{r''_2} w_1 - \frac{\partial \tau}{\partial v} \mu_1 \\ \frac{\partial \lambda_1}{\partial v} &= \frac{\partial \tau}{\partial u} \mu_1 \\ \frac{\partial \mu_1}{\partial u} &= \frac{\partial \tau}{\partial v} \lambda_1 \\ \frac{\partial \mu_1}{\partial v} &= -\frac{e^\tau}{r''_1} w_1 - \frac{\partial \tau}{\partial u} \lambda_1 \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial \psi_1}{\partial u} &= e^\tau \lambda_1 \\
 \frac{\partial \psi_1}{\partial v} &= e^\tau \mu_1 \\
 \frac{\partial w_1}{\partial u} &= \frac{e^\tau}{r''_2} \lambda_1 \\
 \frac{\partial w_1}{\partial v} &= \frac{e^\tau}{r''_1} \mu_1 \\
 \frac{\partial \sigma_1}{\partial u} &= e^{-\tau} \lambda_1 \\
 \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} &= -e^{-\tau} \mu_1 \\
 \lambda_1^2 + \mu_1^2 + w_1^2 &= 0;
 \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

quindi ponendo

$$\left. \begin{aligned}
 e^{\tau_1} &= e^{-\tau} \frac{\psi_1}{\sigma_1} \\
 \frac{e^{\tau_1}}{r'''_1} &= \frac{e^\tau}{r''_1} - w_1 \left(\frac{e^\tau}{\psi_1} - \frac{e^{-\tau}}{\sigma_1} \right) \\
 \frac{e^{\tau_1}}{r'''_2} &= -\frac{e^\tau}{r''_2} + w_1 \left(\frac{e^\tau}{\psi_1} + \frac{e^{-\tau}}{\sigma_1} \right),
 \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

rimane definita una nuova superficie isoterma I_3 legata alla I_2 dalla trasformazione D_0 avente per elemento lineare

$$e^{2\tau_1}(du^2 + dv^2),$$

e per raggi di curvatura r'''_1 ed r'''_2 .

Inversamente prendiamo due superficie isoterme I_2 , I_3 legate tra loro dalla trasformazione D_0 ; esiste allora una funzione θ tale che

$$\sinh \theta = \frac{\lambda_1}{w_1} \quad i \cosh \theta = \frac{\mu_1}{w_1}. \quad (56)$$

Si deduce allora con calcolo facile che questa funzione θ soddisfa alle equazioni

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial \theta}{\partial u} + i \frac{\partial \tau}{\partial v} &= -\frac{e^\tau}{r''_2} \cosh \theta \\
 i \frac{\partial \theta}{\partial v} + \frac{\partial \tau}{\partial u} &= \frac{e^\tau}{r''_1} \sinh \theta
 \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial u} - i \frac{\partial \tau_1}{\partial v} &= \frac{e^{\tau_1}}{r_2'''} \cosh \theta \\ -i \frac{\partial \theta}{\partial v} + \frac{\partial \tau_1}{\partial u} &= -\frac{e^{\tau_1}}{r_1'''} \sinh \theta. \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Abbiamo dunque il seguente teorema:

Se due superficie isoterme sono legate tra loro dalla trasformazione D_0 , esiste una superficie N legata rispettivamente alle prime per trasformazioni B immaginarie coniugate.

Qui utilizzeremo una importante osservazione dovuta a BIANCHI. Il sistema di equazioni (54) trascurando per un momento la condizione

$$\lambda_1^2 + \mu_1^2 + w_1^2 = 0 \quad (59)$$

è quello stesso che occorre integrare per passare dalle equazioni intrinseche della superficie I_2 alle equazioni della medesima in termini finiti. Dunque se della superficie I_2 si conoscono le equazioni in termini finiti e si indicano i coseni direttori del triedro principale con

$$\begin{aligned} X''_1 \quad Y''_1 \quad Z''_1 \\ X''_2 \quad Y''_2 \quad Z''_2 \\ X''_3 \quad Y''_3 \quad Z''_3, \end{aligned}$$

l'integrale generale avrà la forma

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= a X''_1 + b Y''_1 + c Z''_1 \\ \mu_1 &= a X''_2 + b Y''_2 + c Z''_2 \\ w_1 &= a X''_3 + b Y''_3 + c Z''_3 \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

con a, b, c costanti arbitrarie; sarà inoltre soddisfatta la (59) se

$$a^2 + b^2 + c^2 = 0.$$

Ed allora per un conveniente movimento della superficie I_2 si potrà prendere

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= X''_1 + i Y''_1 \\ \mu_1 &= X''_2 + i Y''_2 \\ w_1 &= X''_3 + i Y''_3, \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

e le (56) daranno per la funzione θ le espressioni

$$\sinh \theta = \frac{X''_1 + i Y''_1}{X''_3 + i Y''_3}, \quad i \cosh \theta = \frac{X''_2 + i Y''_2}{X''_3 + i Y''_3}. \quad (62)$$

Dunque: *Se di una superficie isoterma I_2 si conoscono le equazioni in termini finiti, si conoscerà pure dalle (62) in termini finiti l'invariante fondamentale θ della superficie N legata alla I_2 per trasformazione B .*

§ 5.

SUPERFICIE MINIME.

Applichiamo i risultati precedenti alle superficie minime.

Poniamo nelle (22)

$$\frac{e^{\varphi}}{r_1} = e^{-\varphi} \quad \frac{e^{\varphi}}{r_2} = -e^{-\varphi}; \quad (63)$$

la seconda e terza saranno verificate e la funzione φ dovrà soddisfare all'equazione

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} - e^{-2\varphi} = 0. \quad (64)$$

L'elemento lineare

$$e^{2\varphi} (du^2 + dv^2)$$

e le (63) definiscono nel modo più generale una superficie minima.

Vogliamo caratterizzare la superficie trasformata mediante la D_m .

Poniamo

$$H' = \frac{1}{r'_1} + \frac{1}{r'_2}, \quad L' = e^{2\varphi_1} \left(\frac{1}{r'_1} - \frac{1}{r'_2} \right), \quad M' = \frac{1}{2} L' H'; \quad (65)$$

allora le (33) daranno

$$H' = \frac{2}{\psi} (\sigma + w), \quad L' = -2 \frac{w}{\sigma}, \quad M' = -\frac{2(\sigma + w)}{\psi \sigma} w, \quad (66)$$

dove per le (32) dovrà essere $\sigma + w = \text{cost.}$

Prendendo nulla questa costante la trasformata sarà pure superficie minima; ma noi vogliamo studiare quel che avviene prendendo la detta costante diversa da zero.

A tale scopo osserviamo che dalla prima delle (66) derivando si ottiene

$$e^{\varphi_1} \frac{\partial H'}{\partial u} = - \frac{2(\sigma + w)}{\psi \sigma} \lambda; \quad e^{\varphi_1} \frac{\partial H'}{\partial v} = - \frac{2(\sigma + w)}{\psi \sigma} \mu;$$

ne segue

$$e^{2\varphi_1} \left[\left(\frac{\partial H'}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial H'}{\partial v} \right)^2 \right] + M'^2 + 2A M' - 2A H' = 0, \quad \left(\begin{matrix} A = 2m \\ = 0 \end{matrix} \right) \quad (67)$$

donde risulta il teorema:

Una trasformata di Darboux di una superficie minima, quando non è superficie minima, è associata al paraboloide

$$2m(y^2 + z^2) + xy + iz - 4x = 0. \quad (68)$$

Inversamente partiamo da una superficie isoterma associata al paraboloide (68); cioè ponendo

$$H = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}, \quad L = e^{2\varphi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right), \quad M = \frac{1}{2} L H \quad (69)$$

si abbia

$$e^{2\varphi} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial v} \right)^2 \right] + M^2 + 2A M - 2A H = 0, \quad \left(\begin{matrix} A = 2m \\ = 0 \end{matrix} \right) \quad (70)$$

e cerchiamo se fra le trasformate di DARBOUX vi sono superficie minime.

Nell'ipotesi affermativa si dovrà avere

$$\sigma L + 2w = 0;$$

donde derivando ed osservando le (32), (69) e (70) si ottengono i valori

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= e^{\varphi} \frac{\partial H}{\partial u}, & \mu &= -e^{\varphi} \frac{\partial H}{\partial v}, & w &= -M \\ \sigma &= H, & \psi &= 2 - L. \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

Ora si verifica col calcolo diretto che queste costituiscono veramente una soluzione particolare del sistema (32) con la relazione (35); dunque

Fra le trasformate di Darboux di una superficie isoterma associata al paraboloide (68) vi è sempre una ed una sola superficie minima.

Una seconda questione che si presenta è di caratterizzare la funzione

$$\operatorname{tgh} \theta = \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G}}$$

relativa alla superficie N che si deduce da una superficie minima I colla trasformazione B .

Per questa funzione si dovrà avere

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial u} + i \frac{\partial \varphi}{\partial v} &= e^{-\varphi} \cosh \theta \\ i \frac{\partial \theta}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} &= e^{-\varphi} \sinh \theta; \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

si deduce allora per θ l'equazione

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = 0 \quad (73)$$

la quale caratterizza il primo invariante della superficie N . Il secondo invariante ha l'espressione:

$$W = \frac{1}{\sinh \theta \cosh \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2}$$

oppure

$$W = - \frac{1}{\sinh \theta \cosh \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2}.$$

Viceversa se la (73) è soddisfatta il sistema (72) è illimitatamente integrabile e la funzione φ che si ricava soddisfa la (64).

Riprendiamo infine a considerare una superficie minima I ed una sua trasformata I_1 che sia pure superficie minima. È noto che le superficie S ed S_1 definite rispettivamente dalle formole

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_3}{\partial u} &= \frac{\partial x_1}{\partial v}, & \frac{\partial x_3}{\partial v} &= - \frac{\partial x_1}{\partial u}, \\ \frac{\partial x_4}{\partial u} &= \frac{\partial x_2}{\partial v}, & \frac{\partial x_4}{\partial v} &= - \frac{\partial x_2}{\partial u}, \end{aligned}$$

sono pure superficie minime e sono le falde focali di una congruenza W .

È noto altresì che sopra S ed S_1 si corrispondono oltre ai sistemi con-

ugiati anche i sistemi ortogonali, ed in particolare si corrispondono pure le linee di curvatura.

Siffatte congruenze sono dette di THYBAUT e sono le sole congruenze W le cui falde focali sono superficie minime.

Noi aggiungeremo qui due teoremi che permettono di caratterizzare le congruenze di THYBAUT.

Indicando con ω l'angolo d'inclinazione del raggio della congruenza sulla linea di curvatura α della superficie S in un suo punto, e con t la distanza focale, si avrà

$$t \cos \omega = \frac{1}{m\sqrt{2}} \left(\frac{\mu}{\sigma} - \frac{\lambda}{\sigma} \right); \quad t \sin \omega = \frac{1}{m\sqrt{2}} \left(\frac{\mu}{\sigma} + \frac{\lambda}{\sigma} \right);$$

similmente indicando con ω_1 l'angolo che il raggio fa con la linea corrispondente di S_1 nel punto corrispondente si avrà

$$t \cos \omega_1 = \frac{1}{m\sqrt{2}} \left(\frac{\mu}{\sigma} + \frac{\lambda}{\sigma} \right); \quad t \sin \omega_1 = \frac{1}{m\sqrt{2}} \left(\frac{\mu}{\sigma} - \frac{\lambda}{\sigma} \right);$$

dunque: se P e P' è una coppia qualunque di punti corrispondenti delle due falde di una congruenza di Thybaut, l'angolo che la retta PP' fa con la linea di curvatura α nel punto P eguaglia l'angolo che la medesima fa con la linea β nel punto P' .

Inoltre indicando con η l'angolo dei piani focali si ha

$$\cos \eta = \frac{w^2}{m\psi\sigma} - 1;$$

si deduce la relazione

$$t = \frac{1}{m} \operatorname{tg} \frac{\eta}{2}. \quad (74)$$

Inversamente, se si escludono le congruenze le cui sviluppabili tagliano le superficie focali lungo le linee di curvatura, si hanno i seguenti teoremi.

I. Una congruenza sulle cui falde focali S ed S' si corrispondono le linee di curvatura α , β , tale che l'angolo d'inclinazione del raggio sulla linea α in un punto qualunque di S eguaglia l'angolo d'inclinazione del raggio sulla linea β nel punto corrispondente di S' , è una congruenza di Thybaut.

II. Una congruenza sulle cui falde focali si corrispondono le linee di cur-

vatura ed in cui la distanza focale e l'angolo dei piani focali siano legati dalla relazione (74) è una congruenza di THYBAUT.

Questi due teoremi saranno da me dimostrati in una Nota a parte destinata alle congruenze di THYBAUT.

§ 6.

SUPERFICIE A CURVATURA MEDIA COSTANTE.

Poniamo nelle (22)

$$\frac{e^{\varphi}}{r_1} = \sinh \varphi, \quad \frac{e^{\varphi}}{r_2} = \cosh \varphi; \quad (75)$$

la seconda e terza saranno verificate e la funzione φ dovrà soddisfare all'equazione

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + \sinh \varphi \cosh \varphi = 0. \quad (76)$$

L'elemento lineare

$$e^{2\varphi} (du^2 + dv^2)$$

e le (75) definiscono nel modo più generale una superficie a curvatura media costante ed uguale ad 1.

Vogliamo caratterizzare la superficie trasformata mediante la $D_{...}$.

Ponendo al solito

$$H' = \frac{1}{r'_1} + \frac{1}{r'_2}, \quad L' = e^{2\varphi_1} \left(\frac{1}{r'_1} - \frac{1}{r'_2} \right), \quad M' = \frac{1}{2} L' H' \quad (77)$$

avremo dalle (33)

$$H' = 2 \frac{w}{\psi} - \frac{\sigma}{\psi}, \quad L' = \frac{\psi}{\sigma} - \frac{2w}{\sigma} \quad (78)$$

e si dovrà avere

$$\psi = 2w - \sigma + c \quad (c = \text{cost.}). \quad (79)$$

Prendendo $c=0$ la trasformata sarà pure una superficie a curvatura media costante; noi vogliamo considerare il caso $c \neq 0$.

Sarà allora

$$H' = 1 - \frac{c}{\psi}, \quad L' = -1 + \frac{c}{\sigma}, \quad 2M' = -1 + \frac{c}{\sigma} + \frac{c}{\psi} - \frac{c^2}{\psi\sigma}, \quad (80)$$

donde

$$e^{\varphi_1} \frac{\partial H'}{\partial u} = c \frac{\lambda}{\psi\sigma}, \quad e^{\varphi_1} \frac{\partial H'}{\partial v} = c \frac{\mu}{\psi\sigma},$$

sicchè tenendo conto della (35) e della (79) risulta la relazione

$$e^{2\varphi_1} \left[\left(\frac{\partial H'}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial H'}{\partial v} \right)^2 \right] + M'^2 + 2A M' + 2B H' + 2C L' + D = 0,$$

in cui

$$\left. \begin{aligned} A &= 2m + \frac{1}{2}, & B &= m \\ C &= -m, & D &= \frac{1}{4} - 2m; \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

dunque:

Una trasformata di Darboux di una superficie a curvatura media costante (non nulla), quando non è a curvatura media costante, è isoterma speciale della classe $\left(2m + \frac{1}{2}, m, -m, \frac{1}{4} - 2m\right)$.

Inversamente partiamo da una superficie isoterma speciale di questa classe; cioè ponendo

$$H = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}; \quad L = e^{2\varphi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right), \quad M = \frac{1}{2} L H \quad (82)$$

si abbia

$$e^{2\varphi} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial v} \right)^2 \right] + M^2 + 2A M + 2B H + 2C L + D = 0 \quad (83)$$

in cui A, B, C, D hanno i valori (81), e cerchiamo se fra le trasformate di DARBOUX vi sono superficie a curvatura media costante ($=1$).

Nell'ipotesi affermativa si dovrà avere

$$L\sigma + 2w = \psi$$

donde derivando ed osservando le (32), (82) e (83) si ottengono i valori

$$\begin{aligned} \lambda &= e^{\varphi} \frac{\partial H}{\partial u}, & \mu &= -e^{\varphi} \frac{\partial H}{\partial v}, & \psi &= -L - 1 \\ \sigma &= H - 1, & w &= -M - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ora si verifica col calcolo diretto che queste costituiscono effettivamente una soluzione particolare del sistema (32) ed ha luogo la (35), dunque:

Fra le trasformate di Darboux di una superficie isoterma speciale della classe (81) vi è sempre una ed una sola superficie a curvatura media costante.

Vogliamo in secondo luogo caratterizzare la superficie N che si deduce dalla superficie a curvatura media costante I mediante la trasformazione B .

Osserviamo che le (40) nel caso in esame prendono la forma

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial u} + i \frac{\partial \varphi}{\partial v} &= -\cosh \theta \cosh \varphi \\ i \frac{\partial \theta}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} &= \sinh \theta \sinh \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

donde eliminando φ otteniamo

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = \sinh \theta \cosh \theta. \quad (85)$$

La superficie N in discorso è dunque caratterizzata dal fatto che la relativa funzione

$$\operatorname{tgh} \theta = \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G}}$$

soddisfa all'equazione differenziale (85).

Inversamente partiamo da una soluzione della (85) e poniamo

$$W = \frac{1}{\sinh \theta \cosh \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} - \frac{1}{2},$$

o ciò che è lo stesso

$$-W = \frac{1}{\sinh \theta \cosh \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} - \frac{1}{2}.$$

Sono allora soddisfatte le equazioni (2), sicchè si hanno in corrispondenza ∞^3 superficie N . Per una qualunque funzione θ soddisfacente la (85) il sistema (84) è illimitatamente integrabile e la funzione φ soddisferà la (76).

È utile osservare che l'esistenza delle superficie N corrispondenti alle soluzioni della (85), ci dà un'interpretazione di questa equazione dal punto di vista reale; un'altra interpretazione della medesima è stata data precedentemente dal BIANCHI, trattando della regione ideale del paraboloide ellittico.

Infine vogliamo caratterizzare la superficie I_2 .

Poniamo

$$H'' = \frac{1}{r''_1} + \frac{1}{r''_2}, \quad L'' = e^{2\tau} \left(\frac{1}{r''_1} - \frac{1}{r''_2} \right), \quad M'' = \frac{1}{2} L'' H''. \quad (86)$$

Per le (39) si ha :

$$H'' = c - \sigma; \quad L'' = -\frac{1}{\psi}, \quad M'' = -\frac{1}{2\psi} (c - \sigma). \quad (87)$$

Sarà allora

$$e^\tau \frac{\partial H''}{\partial u} = -\frac{\lambda}{\psi}, \quad e^\tau \frac{\partial H''}{\partial v} = \frac{\mu}{\psi},$$

donde tenendo conto della (35) e della (79) risulta la relazione

$$e^{2\tau} \left[\left(\frac{\partial H''}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial H''}{\partial v} \right)^2 \right] + M''^2 + 2A M'' + 2B H'' + 2C L'' + D = 0, \quad (88)$$

in cui

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{2} - 2m, & B &= 0 \\ C &= m c, & D &= \frac{1}{4} \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

Abbiamo dunque il teorema :

La trasformazione C_m cambia una superficie a curvatura media costante (uguale +1) in una superficie isoterma speciale della classe (89).

Inversamente una superficie isoterma speciale di questa classe si può sempre considerare come ottenuta da una superficie a curvatura media costante per trasformazione C_m ed in una sola maniera.

Infatti nota la superficie I_2 sono intanto noti r''_1 ed r''_2 ed anche H'' , L'' , M'' ; si deducono allora σ , ψ , w dalle (87) e (79) e si ha

$$\sigma = c - H'', \quad \psi = -\frac{1}{L''}, \quad w = \frac{1}{2} (1 + H'' L''). \quad (90)$$

Ponendo inoltre

$$\frac{\lambda}{\psi} = -e^\tau \frac{\partial H''}{\partial u}, \quad \frac{\mu}{\psi} = e^\tau \frac{\partial H''}{\partial v} \quad (91)$$

a causa della (88), soddisfatta per ipotesi, sarà

$$\lambda^2 + \mu^2 + w^2 = 2m\psi\sigma; \quad (92)$$

anche le (39) e (38) dàanno

$$e^p = -\frac{e^\tau}{L''} \quad (93)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{e^p}{r_2} &= \frac{e^\tau}{r_2''} + \frac{1}{2} e^p (1 + H'' L'') = \cosh \varphi \\ \frac{e^p}{r_1} &= \frac{e^\tau}{r_1''} + \frac{1}{2} e^p (1 + H'' L'') = \sinh \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

Ora si verifica col calcolo diretto che hanno luogo le seguenti proprietà;

1) Se una superficie isoterma I_2 è speciale della classe (89) e si pone

$$e^p = -\frac{e^\tau}{L''} \quad (95)$$

si avrà

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + \sinh \varphi \cosh \varphi = 0.$$

2) Assumendo come superficie di partenza I la superficie a curvatura media costante, corrispondente alla funzione φ data dalla (95), ed ai raggi

$$\frac{e^p}{r_2} = \cosh \varphi, \quad \frac{e^p}{r_1} = \sinh \varphi$$

le funzioni $\tau, \psi, w, \lambda, \mu$ date dalle (90) e (91) soddisfano le (32) ed ha luogo la (35).

Allora la superficie derivata per trasformazione C_m corrispondente ai suddetti valori di $\tau, \psi, w, \lambda, \mu$ coincide colla I_2 e il teorema è dimostrato; dunque:

Una superficie isoterma speciale della classe (89) si può sempre considerare come ottenuta da una superficie a curvatura media costante per trasformazione C_m ed in una sola maniera.

Qui occorre fare altresì la seguente osservazione.

Assumiamo una superficie isoterma I_1 della classe

$$A = 2m + \frac{1}{2}, \quad B = m, \quad C = -m, \quad D = \frac{1}{4} - 2m$$

che, per quanto abbiamo visto, possiamo considerare come dedotta da una superficie a curvatura media costante, ed uguale ad 1, per trasformazione D_m . Consideriamo inoltre la superficie I_2 che si deduce dalla medesima superficie a curvatura media costante per trasformazione C_m .

La trasformata \bar{I}_2 di CHRISTOFFEL è della classe

$$A_0 = \frac{1}{2} - 2m, \quad B_0 = mc, \quad C_0 = 0, \quad D_0 = \frac{1}{4}.$$

Vediamo allora che questi valori si deducono dai precedenti mediante le formole

$$A_0 = A - 4m, \quad B_0 = mc$$

$$C_0 = 4m^2 - 2Am - \frac{BC}{m}, \quad D_0 = D - 4m(2m - A).$$

Quest'ultimo risultato rientra nel teorema stabilito dal BIANCHI a pag. 30 della citata Memoria.

Consideriamo ora un caso particolare notevole.

Poniamo nelle formole precedenti $c=0$; la (88) diventa

$$e^{2r} \left[\left(\frac{\partial H''}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial H''}{\partial v} \right)^2 \right] + M''^2 + (1 - 4m)M'' + \frac{1}{4} = 0,$$

e per conseguenza la superficie isoterma I_2 si può considerare come associata ad una quadrica di rotazione.

Avendosi

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial \sigma}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial u} - \frac{\partial \sigma}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial v} &= -\frac{1}{4}(\psi^2 + \sigma^2) - \frac{1}{2}(1 - 4m)\psi\sigma \end{aligned} \right\} \quad (96)$$

vediamo precisamente che la quadrica ha le equazioni

$$x = \frac{1 - \psi\sigma}{\psi - \sigma}, \quad y = i \frac{1 + \psi\sigma}{\psi - \sigma}, \quad z = \sqrt{2m} \frac{\psi + \sigma}{\psi - \sigma}. \quad (97)$$

Vi corrisponde, per un teorema di GUICHARD, una nuova superficie a curvatura media costante, e la corrispondente soluzione ω della (76) si ha ponendo

$$\left. \begin{aligned} 2(\lambda^2 + \mu^2) \sinh \omega &= \sqrt{2m} \lambda (\psi - \sigma) - i \sqrt{2m - 1} \mu (\psi + \sigma) \\ 2(\lambda^2 + \mu^2) \cosh \omega &= i \sqrt{2m} \mu (\psi - \sigma) - \sqrt{2m - 1} \lambda (\psi + \sigma), \end{aligned} \right\} \quad (98)$$

ossia

$$\left. \begin{aligned} 2(\lambda - i\mu) e^{\omega} &= \sqrt{2m} (\psi - \sigma) - \sqrt{2m-1} (\psi + \sigma) \\ 2(\lambda + i\mu) e^{-\omega} &= -\sqrt{2m} (\psi - \sigma) - \sqrt{2m-1} (\psi + \sigma). \end{aligned} \right\} \quad (98)$$

Se ne deducono le relazioni

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial v} + i \frac{\partial \omega}{\partial u} &= i\sqrt{2m} \cosh \omega \sinh \varphi + i\sqrt{2m-1} \sinh \omega \cosh \varphi \\ i \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \omega}{\partial v} &= -i\sqrt{2m} \sinh \omega \cosh \varphi - i\sqrt{2m-1} \cosh \omega \sinh \varphi \end{aligned} \right\} \quad (99)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} - i \frac{\partial \omega}{\partial u} &= i\sqrt{2m} \cosh \omega \sinh \varphi_1 + i\sqrt{2m-1} \sinh \omega \cosh \varphi_1 \\ -i \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} + \frac{\partial \omega}{\partial v} &= -i\sqrt{2m} \sinh \omega \cosh \varphi_1 - i\sqrt{2m-1} \cosh \omega \sinh \varphi_1, \end{aligned} \right\} \quad (100)$$

donde risulta che nel caso in esame la considerazione della trasformazione C_m conduce alla decomposizione di una trasformazione di GUICHARD in due trasformazioni di BIANCHI immaginarie coniugate.