Über gewisse lineare Transformationen.

Von **Otto Biermann** in Brünn.

Im Folgenden soll die analytische Form gewisser linearer Transformationen abgeleitet werden, durch die ein ebener kreisförmiger Bereich in einen seiner Ebene angehörigen, gleich großen, von außen berührenden Bereich von gleicher Form transformiert wird, wozu die in der Zeitschrift für Mathematik und Physik (1906) behandelte Aufgabe die Veranlassung gegeben hat, nämlich auf eine Kreisfläche eine vorgegebene Anzahl gleicher, einander nur berührender Kreisflächen so zu legen, daß ein möglichst kleiner Teil der ersten Fläche unbedeckt bleibe.

Dabei werden allerdings auch wohlbekannte Dinge mit zur Sprache kommen müssen.

In einer Ebene, wo rechtwinklige Koordinatenachsen, eine x- und eine y-Achse, vorliegen, deute man die komplexe Variable

$$z = x + iy,$$

bezeichne den zu z konjugierten Wert mit z_0 und schreibe die Gleichung des Kreises (r) um die Stelle (p, q) in der Form:

$$z z_0 + (-p + q i) z + (-p - q i) z_0 + p^2 + q^2 - r^2 = 0.$$

Dann stellt eine Gleichung

$$A z z_0 + B z + B_0 z_0 + C = 0,$$

wenn A und C reell, B und B_0 konjugiert komplexe Größen sind, den Kreis dar, dessen Mittelpunkt die rechtwinkligen Koordinaten hat,

$$p = -\frac{B + B_0}{2A}, q = \frac{B - B_0}{2iA},$$

und für dessen Radius r gilt

$$p^2 + q^2 - r^2 = \frac{B B_0}{A^2} - r^2 = \frac{C}{A},$$

so daß folgt

$$r = \frac{1}{A}\sqrt{B B_0 - A C}.$$

Die Gleichung des Kreises geht durch eine lineare Transformation

$$\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right),$$

in der die reellen oder komplexen Koeffizienten α, β, γ, δ ohne Beschränkung der Allgemeinheit so gewählt seien, daß

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

ist, denn anderenfalls lieferte die Division aller Koeffizienten durch $\sqrt{\alpha\delta - \beta\gamma}$ neue Koeffizienten α', β', γ', δ' in der Beziehung

$$\alpha'\delta' - \beta'\gamma' = 1,$$

wieder in einen Kreis über.

In der Tat, die transformierte Gleichung heißt nach Entfernung der Nenner

$$\begin{aligned} &A(\alpha z + \beta)(\alpha_0 z_0 + \beta_0) + B(\alpha z + \beta)(\gamma_0 z_0 + \delta_0) + \\ &+ B_0(\alpha_0 z_0 + \beta_0)(\gamma z + \delta) + C(\gamma z + \delta)(\gamma_0 z_0 + \delta_0) \equiv \\ &\equiv (A\alpha\alpha_0 + B\alpha\gamma_0 + B_0\alpha_0\gamma + C\gamma\gamma_0) z z_0 + \\ &+ (A\alpha\beta_0 + B\alpha\delta_0 + B_0\beta_0\gamma + C\gamma\delta_0) z + \\ &+ (A\alpha_0\beta + B\beta\gamma_0 + B_0\alpha_0\delta + C\gamma_0\delta) z_0 + \\ &+ (A\beta\beta_0 + B\beta\delta_0 + B_0\beta_0\delta + C\delta\delta_0) = 0, \end{aligned}$$

und die hier vorkommenden Koeffizienten sind von der Beschaffenheit derer in der Gleichung des Kreises; der erste und letzte Koeffizient, die mit A' und C' bezeichnet seien, sind reell, und der zweite und dritte Koeffizient sind konjugiert imaginäre Größen und seien mit B' und $B_0{}'$ bezeichnet.

Danach wird also tatsächlich, wie bekannt, ein Kreis in einen Kreis transformiert.

Bei der linearen Transformation bleiben nur zwei Stellen invariant, indem die Beziehung

$$\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = z$$

oder die äquivalente

$$\gamma z^2 + (\delta - \alpha) z - \beta = 0$$

außer dann, wenn in dieser Gleichung alle Koeffizienten verschwinden und die allgemeine Transformation in die identische Substitution (z, z) übergeht, nur für zwei z-Werte erfüllt wird. Durch die identische Substitution geht natürlich jeder Kreis in sich über.

Will man jedoch nur einen bestimmten Kreis in sich übergehen sehen, so daß den Punkten seiner Peripherie wieder solche entsprechen, so hat man die Beziehungen

$$A' : B' : B'_0 : C' = A : B : B_0 : C$$

zu erfüllen, womit drei Gleichungen für die Verhältnisse der vier Transformationskoeffizienten angegeben sind. Indessen nun anderwärts diejenigen Transformationen den Gegenstand eingehender Untersuchungen bildeten, die die zu einer Geraden oder die zu einem Kreise orthogonalen Kreise in einander überführen, sollen uns hier solche Transformationen beschäftigen, die eine Kreisfläche in eine gleich große, von außen berührende, überführen.

Will man die Transformationen der verlangten Eigenschaft allgemein bilden, so hat man erstens auszudrücken, daß ein Kreis (r) in einen gleich großen übergehe, d. h. es muß

$$r' = \frac{1}{A'}\sqrt{B' B'_0 - A' C'} = \frac{1}{A}\sqrt{B B_0 - A C} = r$$

werden. Doch weil

$$B' B'_0 - A' C' = (\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha_0\delta_0 - \beta_0\gamma_0)(B B_0 - AC) = B B_0 - A C$$

ist, soll

$$A' = A\alpha\alpha_0 + B\alpha\gamma_0 + B_0\alpha_0\gamma + C\gamma\gamma_0 = A$$

gelten, wo nur das positive Zeichen eingeführt wurde, weil die Verkehrung der Zeichen aller Koeffizienten in der vorgegebenen Gleichung des Kreises eine Veränderung des Zeichens von A' zur Folge hat.

Ferner soll aber eine gegebene Kreisfläche auch in eine außen berührende übergehen. Wenn nun die rechtwinkligen Koordinaten des Mittelpunktes des transformierten Kreises

$$p' = -\frac{B' + B'_0}{2A'},\; q' = \frac{B' - B'_0}{2iA}$$

lauten, so soll für die Koeffizienten der verlangten Transformation die folgende Relation bestehen:

$$(2p'A' - 2pA)^2 + (2q'A' - 2qA)^2 = 16(BB_0 - AC)$$

oder

$$BB_0 + B'B'_0 - BB'_0 - B_0B' = 4(BB_0 - AC).$$

Man sieht, daß man außer den bisherigen zwei Bedingungen an die Koeffizienten der Transformation noch eine Forderung knüpfen kann, etwa die, daß die invarianten Punkte zusammenfallen, also daß

$$(\delta - \alpha)^2 + 4\beta\gamma = (\delta + \alpha)^2 - 4(\alpha\delta - \beta\gamma) =$$
$$= (\delta + \alpha)^2 - 4$$

gleich null wird.

Umgekehrt beachte man erstens, daß ein Kreis, der durch die zwei invarianten Punkte einer linearen Transformation hindurchgeht, in einen Kreis derselben Eigenschaft transformiert wird, aber ein anderer Kreis in einen Kreis übergeht, dessen Schnittpunkte mit dem ersten nicht in besonderer Beziehung zu den invarianten Punkten der Transformation stehen; und beachte zweitens, daß man einen Kreis mit der Gleichung

$$A z z_0 + B z + B_0 z_0 + C = 0$$

in einen vorgelegten anderen schneidenden Kreis mit der Gleichung

$$\bar{A} z z_0 + \bar{B} z + \bar{B}_0 z_0 + \bar{C} = 0$$

durch Substitutionen überführen wird, von denen jede die Gestalt annimmt:

$$\frac{t - b}{t - c} = K \frac{z - b}{z - c},$$

deren invariante Punkte b und c mit den Schnittpunkten der ineinander zu transformierenden Kreise zusammenfallen können und sollen.

Danach wird man auch im Falle, daß die Schnittpunkte der beiden Kreise zusammenfallen, diejenigen Transformationen bevorzugen, deren invariante Punkte beide in den Berührungspunkt der ineinander zu transformierenden Kreisflächen fallen.

Wenn man danach die Substitutionen ermittelt, bei denen $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ ist, und die den zweifachen invarianten Punkt

$$a = a' + i a'' = \frac{\alpha - \delta}{2\gamma}$$

auf dem Kreise (r) um die Stelle (p, q) besitzen, so daß

$$(\alpha + \delta)^2 - 4 = 0, \quad \alpha - \delta = 2\gamma a$$

ist, so erhält man

$$\gamma = K = K' + i K''$$

setzend die Substitutionen, die den Kreis (r) um die Stelle (p, q) in einen in dem Punkte a innen oder außen berührenden gleichgroßen Kreis überführen, in der Gestalt:

$$t = \frac{z(\pm 1 + aK) - a^2 K}{zK + (\pm 1 - aK)},$$

oder in der Form

$$\frac{1}{t-a} = \frac{1}{z-a} \pm K.$$

Diese zwei Substitutionen kommen aber auf eine hinaus, indem K entgegengesetzter Werte fähig ist. Wir wollen das positive Zeichen beibehalten.

Nunmehr aber ergibt sich die Bedingung

$$A' = A,$$

unter der der Kreis (r) um die Stelle (p, q) in einen in a berührenden gleichgroßen Kreis übergeht, in der Gestalt:

$$(a' - p) K' = (a'' - q) K''.$$

Wenn man somit die Träger von $p + iq$ und $a' + i a'' = a$ verbindet, durch den Punkt $O(o, o)$ eine Parallele legt und auf diese in O eine Senkrechte fällt, dann aber auch noch deren Spiegelbild gegenüber der y-Achse bildet, so enthält diese Gerade den Träger von K.

Nunmehr hat man aber noch zu verlangen, daß der Kreis (r) um die Stelle (p, q) nicht in sich selbst, sondern in den Kreis (r) um $(2a' - p, 2a'' - q)$ transformiert werde. Man hat also in letzterem Falle

$$\frac{B'}{A'} = \frac{1}{A}(A\alpha\beta_0 + B\alpha\delta_0 + B_0\beta_0\gamma + C\gamma\delta_0) =$$

$$= -2a' + p + i(2a'' - q),$$

$$\frac{C'}{A'} = \frac{1}{A}(A\beta\beta_0 + B\beta\delta_0 + B_0\beta_0\delta + C\delta\delta_0) =$$

$$= (2a' - p)^2 + (2a'' - q)^2 - r^2$$

zu setzen, wobei

$$A = 1,\ B = -p + iq,\ C = p^2 + q^2 - r^2$$

$$\alpha = 1 + aK,\ \beta = -a^2 K,\ \gamma = K,\ \delta = 1 - aK$$

ist.

Anstatt aber hier die noch bestehende Relation zwischen K' und K'' zu ermitteln, wollen wir die Bestimmung der unserer Forderung entsprechenden Größen K darauf gründen, daß durch die Transformation der verlangten Art jeder Punkt der ersten Kreisfläche, insbesondere also der bei jedem Werte von r im Kreise befindliche Mittelpunkt $p + iq$ in einen Punkt

$$\overline{t} = \overline{t'} + i\overline{t''}$$

übergehen soll, für den

$$|\,p+iq-\bar{t}\,|-r>0$$

ist. Hier bedeutet:

$$\bar{t}=\frac{(p+iq)\,[1+(K'+iK'')\,(a'+ia'')]-(a'+ia'')^2\,(K'+iK'')}{(p+iq)\,(K'+iK'')+[1-(K'+iK'')\,(a'-ia'')]}$$

und danach führt die Forderung

$$(\bar{t'}-p)^2+(\bar{t''}-q)^2-r^2>0,$$

wenn noch

$$p-a'=m,\ q-a''=n$$

genannt wird, auf die Ungleichung

$$[(m^2-n^2)\,K'-2\,m\,n\,K'']^2+[(m^2-n^2)\,K''+2\,m\,n\,K']^2-$$
$$-r^2\,(1+m\,K''+n\,K')^2>0,$$

wo aber $m^2+n^2=r^2$ einzuführen ist.

Die Gesamtheit der Punkte (K', K''), für die diese Ungleichung besteht, ist also von der Gesamtheit von Punkten, wo $(\bar{t'}-p)^2+$ $+(\bar{t''}-q)^2-r^2<0$ ist, durch die Punkte der Kurve getrennt, deren Gleichung in rechtwinkligen Koordinaten K', K'' folgendermaßen zu schreiben ist:

$$K'^2\,m^2-2\,m\,n\,K'\,K''+K''^2\,n^2-2\,n\,K'-2\,m\,K''-1=0.$$

Diese Kurve zerfällt nicht, denn die Determinante ihrer Gleichung ist $-r^4$. Sie stellt eine Parabel dar, deren Brennpunkt in den Punkt $O\,(o, o)$ fällt, wo das Gleichungspolynom kleiner als null ist, und der Scheitel besitzt Koordinaten:

$$-\frac{n}{2\,r^2},\ -\frac{m}{2\,r^2}.$$

Die Hauptachse hat die Gleichung

$$K''\,n=K'\,m.$$

Danach ergibt sich, daß unsere Kreisfläche r um die Stelle (p, q) dann durch die Substitution

$$\frac{1}{t-a}=\frac{1}{z-a}+K$$

in eine gleich große in der Stelle a von außen berührende Kreisfläche übergeht, wenn K seinen Träger in einem solchen Punkte der Geraden $n\,K''=m\,K'$

hat, der in dem den Brennpunkt nicht einschließenden Intervalle zwischen dem Scheitel der früheren Parabel und dem Punkte Unendlich liegt, denn der Betrag von K muß jetzt die Größe $\frac{1}{2r}$ überschreiten; aber der frühere Kreis geht in einen gleich großen an der Stelle a innen berührenden, also in sich selbst über, wenn K in einem solchen Punkte derselben Geraden seinen Träger hat, der in dem den Brennpunkt enthaltenden Intervalle zwischen dem Scheitel und dem Punkte Unendlich liegt.

Damit sind die zuletzt verlangten Transformationen gekennzeichnet.