

Sulle intersezioni di tre superficie algebriche.

(Di LUIGI BERZOLARI, a Torino.)

Scopo principale di questo lavoro è la dimostrazione (algebraica) rigorosa del seguente teorema fondamentale:

Date tre qualunque superficie algebriche di ordini l, m, n , semplici o comunque composte (anche dotate di infiniti punti multipli), ma non passanti per una medesima curva, la condizione necessaria e sufficiente perchè in un loro punto comune O , dove esse hanno rispettivamente le molteplicità λ, μ, ν , siano raccolte precisamente $\lambda\mu\nu$, e non più, delle loro lmn intersezioni, è che i tre coni tangenti alle superficie nel punto O non abbiano in comune nessuna generatrice, qualunque siano del resto le singolarità presentate da quei coni.

La dimostrazione che ne darò sussiste, senza modificazioni sostanziali, pel caso di $n (> 2)$ varietà algebriche (ad $n - 1$ dimensioni) dello spazio ad n dimensioni, e soltanto per evitare complicazioni di pura forma viene qui esposta per $n = 3$. Essa è un'estensione (che non si presenta però del tutto ovvia) di quella che fu data per la prima volta dal sig. VOSS (*) per due curve

(*) Voss, *Ueber einen Fundamentalsatz aus der Theorie der algebraischen Functionen* (Math. Annalen, Bd. 27, pag. 533 e seg.¹). — V. altresì l'osservazione del sig. NOETHER in una nota a piè della pag. 144 del vol. 40 dei Math. Ann.

Nelle sue lezioni del 1894-95 il prof. SEGRE ha approfondito ulteriormente la questione, estendendo il calcolo stesso del sig. Voss al caso in cui le due curve abbiano nel punto che si considera una tangente comune, e cercando allora quante intersezioni delle due curve vengano a cadere in quel punto. Come applicazioni immediate di questi risultati alle intersezioni di una curva con le prime polari di punti generici o di punti della curva o di una tangente singolare, come pure alle intersezioni della curva con la

piane, e che fu poi riportata dal sig. BERTINI nella Nota che ha per titolo *Rappresentazione di una forma ternaria per combinazione lineare di due altre* (Rendic. del R. Istituto Lombardo, serie 2.^a, vol. 24, 5 novembre 1891).

In seguito, supponendo che i tre cono sopra nominati contengano una stessa generatrice, la quale abbia inoltre riunite in 0 quante si vogliono intersezioni con ciascuna delle date superficie, determino il numero delle intersezioni di queste ultime che vengono ulteriormente a cadere *in generale* nel punto 0, assegnando tutti i casi in cui questo numero diventa ancor più elevato. Per ultimo, come applicazione dei risultati ottenuti, dimostro alcune proposizioni relative all'abbassamento che un punto multiplo di una superficie produce nella classe di questa, considerando in modo particolare il caso in cui il cono tangente nel punto multiplo possiede una generatrice doppia.

Una dimostrazione rigorosa del teorema enunciato in principio, per quanto mi consta, non è stata data finora, neanche per lo spazio ordinario, dove di solito la proprietà viene ammessa come intuitiva; i risultati rimanenti (n.° 7, 8, 9 e 10) sono del tutto nuovi.

Sembrami anche degno di nota, per la sua eleganza, il modo col quale si prova nel n.° 2 che le tre superficie hanno lmn punti comuni, benchè di questo, come di altri analoghi teoremi, si conoscano già (anche per un iperspazio) parecchie dimostrazioni.

1. In coordinate omogenee siano

$$\left. \begin{aligned} A &\equiv a_{00} + (a_{10}x_1 + a_{11}x_2) + \dots + (a_{l0}x_1^l + \dots + a_{ll}x_2^l) = 0, \\ B &\equiv b_{00} + (b_{10}x_1 + b_{11}x_2) + \dots + (b_{m0}x_1^m + \dots + b_{mm}x_2^m) = 0, \\ C &\equiv c_{00} + (c_{10}x_1 + c_{11}x_2) + \dots + (c_{n0}x_1^n + \dots + c_{nn}x_2^n) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

le equazioni delle tre superficie A, B, C , dove per es. le $a_{i0}, a_{i1}, \dots, a_{ii}$ sono forme binarie di grado $l-i$ nelle x_1, x_2 . Volendo eliminare dalle (1) le x_1, x_2 , non si conosce finora (a meno che l, m, n non siano fra loro uguali) un'espressione della risultante, che, essendo priva di fattori estranei, abbia

Hessiana, egli ha poi stabilite le proposizioni fondamentali sulle curve piane algebriche e sulle loro singolarità più comuni, con precisione e rigore maggiori di quanto non si trovi nei noti trattati classici. Ad es. egli dimostrò per questa via le proposizioni analoghe a quelle che per le superficie io tratterò alla fine del presente lavoro (n.° 10).

la forma di determinante. È però dovuto al CAYLEY (*) un metodo per ottenere quella risultante *come quoziente di due determinanti*; ed ecco, brevemente, in che consiste. Moltiplichiamo le (1) risp. per

$$\begin{aligned} & 1; x_1, x_2; x_1^2, x_1 x_2, x_2^2; \dots; x_1^{m+n-2}, x_1^{m+n-3} x_2, \dots, x_2^{m+n-2}; \\ & 1; x_1, x_2; \dots; x_1^{n+l-2}, x_1^{n+l-3} x_2, \dots, x_2^{n+l-2}; \\ & 1; x_1, x_2; \dots; x_1^{l+m-2}, x_1^{l+m-3} x_2, \dots, x_2^{l+m-2}. \end{aligned}$$

Otteniamo così

$$\frac{1}{2} (m+n)(m+n-1) + \frac{1}{2} (n+l)(n+l-1) + \frac{1}{2} (l+m)(l+m-1) \quad (2)$$

equazioni lineari fra le quantità

$$1; x_1, x_2; \dots; x_1^{l+m+n-2}, x_1^{l+m+n-3} x_2, \dots, x_2^{l+m+n-2},$$

che sono in numero di

$$\frac{1}{2} (l+m+n)(l+m+n-1). \quad (3)$$

Tali equazioni non sono però fra loro indipendenti: invero, se si moltiplicano le identità

$$BC = CB, \quad CA = AC, \quad AB = BA$$

risp. per

$$\begin{aligned} & 1; x_1, x_2; \dots; x_1^{l-2}, x_1^{l-3} x_2, \dots, x_2^{l-2}; \\ & 1; x_1, x_2; \dots; x_1^{m-2}, x_1^{m-3} x_2, \dots, x_2^{m-2}; \\ & 1; x_1, x_2; \dots; x_1^{n-2}, x_1^{n-3} x_2, \dots, x_2^{n-2}, \end{aligned}$$

si ottengono

$$\frac{1}{2} l(l-1) + \frac{1}{2} m(m-1) + \frac{1}{2} n(n-1) \quad (4)$$

relazioni lineari fra le precedenti equazioni: il numero (4) è la differenza fra

(*) CAYLEY, *On the Theory of Elimination* (Cambridge and Dublin Math. Journal, vol. III, pag. 116; oppure *The Collected Mathem. Papers*, vol. I, pag. 370). — La teoria di CAYLEY è riprodotta succintamente nell'*Algebra superiore* di SALMON (pag. 125 e seg. della 2.^a ediz. francese).

i numeri (2) e (3). Ad. es., la prima di tali relazioni è:

$$\begin{aligned} & c_{00} \cdot B + (c_{10} \cdot x_1 B + c_{11} \cdot x_2 B) + \dots + \\ & \quad + (c_{n0} \cdot x_1^n B + c_{n1} \cdot x_1^{n-1} x_2 B + \dots + c_{nn} \cdot x_2^n B) \\ & - b_{00} \cdot C - (b_{10} \cdot x_1 C + b_{11} \cdot x_2 C) - \dots - \\ & \quad - (b_{m0} \cdot x_1^m C + b_{m1} \cdot x_1^{m-1} x_2 C + \dots + b_{mm} \cdot x_2^m C) = 0. \end{aligned}$$

Si formino ora due matrici H ed H' , le quali abbiano risp. per elementi i coefficienti delle equazioni sopra costruite, e quelli delle relazioni ultimamente trovate. Entrambe conterranno un numero di linee dato dall'espressione (2), mentre il numero delle loro colonne sarà dato risp. dalle (3) e (4). Allora il CAYLEY ha trovato che la risultante R delle (1) si può ottenere dividendo uno qualunque dei determinanti tratti dalla matrice H (il quale non sia nullo identicamente) per il determinante *supplementare* tratto dalla matrice H' , cioè per quello formato con le linee di H' aventi lo stesso posto di quelle che si sono dianzi trascurate in H . Di guisa che, indicando con χ e χ' due tali determinanti, si avrà:

$$R = \frac{\chi}{\chi'}.$$

Il modo di composizione delle matrici H ed H' risulta del tutto chiaro dalle osservazioni seguenti, nelle quali introduciamo altresì alcune notazioni, che si manterranno in tutto il lavoro. La H è costituita da tre matrici parziali, che diremo 1, 2, 3, di cui tutti gli elementi appartengono come coefficienti soltanto alla prima, od alla seconda, od alla terza delle (1). La 1 contiene $m + n - 1$ gruppi di linee, formati risp. di 1, 2, ..., $m + n - 1$ linee; la 2 ne contiene $n + l - 1$, formati risp. di 1, 2, ..., $n + l - 1$ linee; la 3 ne contiene $l + m - 1$, formati risp. di 1, 2, ..., $l + m - 1$ linee. Le colonne di H si dividono invece in $l + m + n - 1$ gruppi, contenenti ordinatamente 1, 2, ..., $l + m + n - 1$ colonne. Mediante siffatti gruppi di linee e colonne la matrice 1 risulta divisa in $(l + m + n - 1)(m + n - 1)$ matrici parziali; e chiamando a_{ij} quella che è comune all' i^{mo} gruppo di linee ed all' j^{mo} gruppo di colonne, si ha:

$$a_{ij} = \begin{vmatrix} a_{j-i,0} & a_{j-i,1} \dots & a_{j-i,j-i} & 0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & a_{j-i,0} \dots & a_{j-i,j-i-1} & a_{j-i,j-i} & 0 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & a_{j-i,j-i} \end{vmatrix},$$

dove la matrice del secondo membro contiene i linee e j colonne: ogni suo elemento che non sia nullo è una forma binaria di grado $l - j + i$ in x_3, x_4 . Denotando analogamente con β_{ij}, γ_{ij} le matrici comuni all' i^{mo} gruppo di linee ed all' j^{mo} gruppo di colonne di 2 e 3, e scrivendo 0 per significare una matrice, di cui tutti gli elementi sono nulli, la matrice H si può scrivere come segue:

$$H = \begin{array}{ccccccc}
 \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \dots & \alpha_{1, l+1} & 0 & 0 \dots & 0 \\
 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} \dots & \alpha_{2, l+1} & \alpha_{2, l+2} & 0 \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 \dots & \dots & \dots & \dots & \alpha_{m+n-1, l+m+n-1} \\
 \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \dots & \beta_{1, m+1} & 0 \dots & 0 & \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 \dots & \dots & \dots & \dots & \beta_{n+l-1, l+m+n-1} \\
 \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \dots & \gamma_{1, n+1} & 0 \dots & 0 & \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 \dots & \dots & \dots & \dots & \gamma_{l+m-1, l+m+n-1}
 \end{array}$$

La matrice H' è formata di tre matrici parziali $1', 2', 3'$, di cui ciascuna, per ciò che riguarda il numero e la disposizione dei gruppi di linee, nonchè delle linee di ciascun gruppo, è formata nell'identico modo delle matrici 1, 2, 3 di H . Quanto alle colonne, la H' si scinde in tre matrici I', II', III' : la I' contiene $n - 1$ gruppi, cui appartengono ordinatamente 1, 2, ..., $n - 1$ colonne; la II' ne contiene $l - 1$ con 1, 2, ..., $l - 1$ colonne risp., e la III' ne contiene $m - 1$ con risp. 1, 2, ..., $m - 1$ colonne. Mediante siffatte matrici di linee e di colonne, la H' risulta scomposta (oltre che in tre di elementi tutti nulli) in sei nuove matrici, ciascuna delle quali è formata coi coefficienti di una sola delle (1). Ognuna alla sua volta risulta poi composta di matrici minori, tali che tutti gli elementi di una qualunque di esse sono di uno stesso grado in x_3, x_4 : se una di tali matrici minori è quella comune all' i^{mo} gruppo di linee ed all' j^{mo} gruppo di colonne, per es., della matrice $2' I'$, ogni suo elemento è una forma di grado $l - i + j$ in x_3, x_4 . Sono nulli tutti gli elementi delle tre matrici $1' II', 2' III', 3' I'$; mentre gli elementi delle matrici $1' I', 2' II', 3' III'$ si trovano tutti, rispetto.

Per trarre da H il determinante χ , prendiamo in generale ρ_i linee del gruppo i^{mo} della matrice 1 ($i = 1, 2, \dots, m + n - 1$), σ_i linee del gruppo i^{mo} della matrice 2 ($i = 1, 2, \dots, n + l - 1$), e τ_i linee del gruppo i^{mo} della matrice 3 ($i = 1, 2, \dots, l + m - 1$). Analogamente, per trarre da H' il determinante χ' , prendiamo ρ'_i linee del gruppo i^{mo} della matrice 1' ($i = 1, 2, \dots, m + n - 1$), e così via.

Poichè gli ordini di χ e χ' sono dati risp. dalle espressioni (3) e (4), si avrà:

$$\sum_1^{m+n-1} \rho_i + \sum_1^{n+l-1} \sigma_i + \sum_1^{l+m-1} \tau_i = \frac{(l+m+n)(l+m+n-1)}{2}, \quad (5)$$

$$\sum_1^{m+n-1} \rho'_i + \sum_1^{n+l-1} \sigma'_i + \sum_1^{l+m-1} \tau'_i = \frac{l(l-1) + m(m-1) + n(n-1)}{2}. \quad (5')$$

Inoltre sarà

$$\rho_i + \rho'_i = i, \quad \sigma_i + \sigma'_i = i, \quad \tau_i + \tau'_i = i \quad (6)$$

per tutti i valori di i che vanno da 1 risp. fino ad $m + n - 1$, $n + l - 1$, $l + m - 1$.

Un elemento qualsiasi di χ si otterrà scegliendo ordinatamente in ciascuna delle ρ_1 linee del primo gruppo della matrice 1 un elemento, la cui colonna corrispondente apparterrà ad un gruppo di posto $r_{11}, r_{12}, \dots, r_{1\rho_1}$; indi in ciascuna delle ρ_2 linee del secondo gruppo di 1 un elemento situato in una colonna appartenente ad un gruppo di posto $r_{21}, r_{22}, \dots, r_{2\rho_2}$; ...; in ciascuna delle ρ_{m+n-1} linee dell'ultimo gruppo di 1 un elemento situato in una colonna di un gruppo di posto $r_{m+n-1,1}, \dots, r_{m+n-1,\rho_{m+n-1}}$; e facendo l'operazione analoga per le diverse linee fissate nei vari gruppi delle matrici 2 e 3, col che si verranno ad introdurre, con significato analogo a quello dei numeri r , nuovi numeri che chiameremo $s_{11}, s_{12}, \dots, s_{1\sigma}; s_{21}, \dots, s_{2\sigma}; \dots; s_{n+l-1,1}, \dots, s_{n+l-1,\sigma_{n+l-1}}$; — $t_{11}, t_{12}, \dots, t_{1\tau}; t_{21}, \dots, t_{2\tau}; \dots; t_{l+m-1,1}, \dots, t_{l+m-1,\tau_{l+m-1}}$. In tal guisa vengono a considerarsi, prescindendo dall'ordine, tutte le colonne della matrice H , onde:

$$\sum r + \sum s + \sum t = 1^2 + 2^2 + \dots + (l + m + n - 1)^2,$$

ossia:

$$\sum r + \sum s + \sum t = \frac{(l+m+n)(l+m+n-1)(2l+2m+2n-1)}{6}. \quad (7)$$

Un elemento qualunque del determinante χ' si formerà in modo analogo al precedente, e s'introdurranno così dei numeri $r'_{11}, \dots, r'_{1\rho'_1}; \dots; r'_{m+n-1,1}, \dots,$

$r'_{m+n-1}, \rho'_{m+n-1}; s'_{11}, \dots, s'_{n+l-1, \sigma_{n+l-1}}; t'_{11}, \dots, t'_{l+m-1, \tau_{l+m-1}}$, legati dalla relazione

$$\begin{aligned} & \sum r' + \sum s' + \sum t' \\ = & \frac{l(l-1)(2l-1) + m(m-1)(2m-1) + n(n-1)(2n-1)}{6} \quad (7') \end{aligned}$$

Pertanto il grado di χ in x_3, x_4 è

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{i=\rho_1} (l - r_{ii} + 1) + \sum_{i=1}^{i=\rho_2} (l - r_{2i} + 2) + \dots + \sum_{i=1}^{i=\rho_{m+n-1}} (l - r_{m+n-1, i} + m + n - 1) \\ & + \sum_{i=1}^{i=\tau_1} (m - s_{ii} + 1) + \sum_{i=1}^{i=\tau_2} (m - s_{2i} + 2) + \dots + \sum_{i=1}^{i=\tau_{n+l-1}} (m - s_{n+l-1, i} + n + l - 1) \\ & + \sum_{i=1}^{i=\tau_1} (n - t_{ii} + 1) + \sum_{i=1}^{i=\tau_2} (n - t_{2i} + 2) + \dots + \sum_{i=1}^{i=\tau_{l+m-1}} (n - t_{l+m-1, i} + l + m - 1), \end{aligned}$$

ossia

$$\sum_{i=1}^{i=m+n-1} (l+i)\rho_i + \sum_{i=1}^{i=n+l-1} (m+i)\sigma_i + \sum_{i=1}^{i=l+m-1} (n+i)\tau_i - (\sum r + \sum s + \sum t). \quad (8)$$

Quanto al grado di χ' , si osservi che i numeri r', s', t' denotano il posto delle colonne scelte, quando si considerino separatamente le tre matrici I', II', III', sicchè ad es. un r' può riferirsi all' r' mo gruppo tanto di I' quanto di III'. Se quindi diciamo x un numero che può coincidere tanto con m quanto con n , y un numero che può coincidere tanto con n quanto con l , e z un numero che può essere tanto l quanto m , il grado di χ' sarà

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{i=\rho'_1} (x + r'_{ii} - 1) + \sum_{i=1}^{i=\rho'_2} (x + r'_{2i} - 2) + \dots + \sum_{i=1}^{i=\rho'_{m+n-1}} (x + r'_{m+n-1, i} - m - n + 1) \\ & + \sum_{i=1}^{i=\tau'_1} (y + s'_{ii} - 1) + \sum_{i=1}^{i=\tau'_2} (y + s'_{2i} - 2) + \dots + \sum_{i=1}^{i=\tau'_{n+l-1}} (y + s'_{n+l-1, i} - n - l + 1) \\ & + \sum_{i=1}^{i=\tau'_1} (z + t'_{ii} - 1) + \sum_{i=1}^{i=\tau'_2} (z + t'_{2i} - 2) + \dots + \sum_{i=1}^{i=\tau'_{l+m-1}} (z + t'_{l+m-1, i} - l - m + 1), \end{aligned}$$

ossia

$$\sum x + \sum y + \sum z + \sum r' + \sum s' + \sum t' - \sum_{i=1}^{i=m+n-1} i\rho'_i - \sum_{i=1}^{i=n+l-1} i\sigma'_i - \sum_{i=1}^{i=l+m-1} i\tau'_i.$$

Ora, per quanto concerne $\sum x$, nel considerare le $\sum_1^{m+n-1} \rho'_i$ colonne avremo preso un certo numero b' di volte un elemento b ed un certo numero c' di volte un elemento c , onde sarà:

$$b' + c' = \sum_1^{m+n-1} \rho'_i, \quad (9)$$

$$\sum x = mb' + nc'. \quad (9')$$

Così pure, nel considerare le $\sum_1^{n+l-1} \sigma'_i$ e poi le $\sum_1^{l+m-1} \tau'_i$ colonne, avremo preso c'' volte un elemento c ed a'' volte un elemento a , e risp. a''' volte un elemento a e b''' volte un elemento b . Quindi:

$$c'' + a'' = \sum_1^{n+l-1} \sigma'_i, \quad (10)$$

$$\sum y = nc'' + la''; \quad (10')$$

$$a''' + b''' = \sum_1^{l+m-1} \tau'_i, \quad (11)$$

$$\sum z = la''' + mb'''. \quad (11')$$

È poi evidente che:

$$b''' + c'' = \frac{l(l-1)}{2}, \quad c' + a''' = \frac{m(m-1)}{2}, \quad a'' + b' = \frac{n(n-1)}{2}. \quad (12)$$

Dalle (9'), (10'), (11') si deduce:

$$\sum x + \sum y + \sum z = l(a'' + a''') + m(b''' + b') + n(c' + c'');$$

ma sommando le (9), (10), (11) a due a due, e tenendo conto delle (12), si ha:

$$a'' + a''' = \sum \sigma' + \sum \tau' - \frac{l(l-1)}{2},$$

$$b''' + b' = \sum \tau' + \sum \rho' - \frac{m(m-1)}{2},$$

$$c' + c'' = \sum \rho' + \sum \sigma' - \frac{n(n-1)}{2},$$

epperò:

$$\begin{aligned} \sum x + \sum y + \sum z &= l(\sum \sigma' + \sum \tau') + m(\sum \tau' + \sum \rho') + n(\sum \rho' + \sum \sigma') \\ &\quad - \frac{l^2(l-1) + m^2(m-1) + n^2(n-1)}{2}. \end{aligned}$$

Il grado di χ' è quindi

$$\sum_{i=1}^{i=m+n-1} (m+n-i)\rho'_i + \sum_{i=1}^{i=n+l-1} (n+l-i)\sigma'_i + \sum_{i=1}^{i=l+m-1} (l+m-i)\tau'_i \quad (8')$$

$$+ \sum r' + \sum s' + \sum t' - \frac{l^2(l-1) + m^2(m-1) + n^2(n-1)}{2}.$$

Sottraendo quest'espressione dalla (8), si ottiene come grado della risultante R :

$$l \sum \rho + m \sum \sigma + n \sum \tau - (m+n) \sum \rho' - (n+l) \sum \sigma' - (l+m) \sum \tau'$$

$$+ \sum_{i=1}^{i=m+n-1} i(\rho_i + \rho'_i) + \sum_{i=1}^{i=n+l-1} i(\sigma_i + \sigma'_i) + \sum_{i=1}^{i=l+m-1} i(\tau_i + \tau'_i)$$

$$- (\sum r + \sum s + \sum t + \sum r' + \sum s' + \sum t') + \frac{l^2(l-1) + m^2(m-1) + n^2(n-1)}{2}.$$

Il primo sestinomio può anche scriversi nella forma:

$$l(\sum \rho + \sum \rho') + m(\sum \sigma + \sum \sigma') + n(\sum \tau + \sum \tau')$$

$$- (l+m+n)(\sum \rho' + \sum \sigma' + \sum \tau'),$$

ed equivale quindi, per le (6) e (5'), a

$$l \frac{(m+n)(m+n-1)}{2} + m \frac{(n+l)(n+l-1)}{2} + n \frac{(l+m)(l+m-1)}{2}$$

$$- (l+m+n) \frac{l(l-1) + m(m-1) + n(n-1)}{2}.$$

Sostituendo quest'espressione, e facendo uso delle (6), (7) e (7'), si trova facilmente che il grado di R è lmn .

3. Ora supponiamo che le date superficie abbiano in un punto comune O le molteplicità λ, μ, ν risp.: per vedere quante intersezioni cadono in tal punto, collochiamo in O il vertice $(0, 0, 0, 1)$ del tetraedro di riferimento assumendo come piano $x_3 = 0$ un piano affatto arbitrario per O , e cerchiamo con quale esponente si stacchi da R il fattore x_3 .

A tal fine osserviamo che, per l'ipotesi fatta, le forme A, B, C non possono contenere in nessun termine le coordinate x_1, x_2, x_3 ad un grado minore di λ, μ, ν risp., sicchè possiamo porre:

$$\left. \begin{aligned} a_{iu} &= \alpha_{iu} x_3^{\lambda-i} x_4^{i-\lambda} + \text{potenze superiori di } x_3, & (i \leq \lambda) \\ b_{jv} &= \beta_{jv} x_3^{\mu-j} x_4^{j-\mu} + \text{id.} & (j \leq \mu) \\ c_{kw} &= \gamma_{kw} x_3^{\nu-k} x_4^{k-\nu} + \text{id.} & (k \leq \nu) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

dove le costanti α_{iu} , β_{jv} , γ_{ki} possono anche essere nulle. Ora consideriamo la matrice H , e nella sua matrice parziale 1 moltiplichiamo le linee del primo gruppo per $x_3^{\mu+\nu-1}$, quelle del secondo per $x_3^{\mu+\nu-2}, \dots$, quelle del $(\mu + \nu - 1)^{\text{mo}}$ per x_3 ; analogamente nella 2 moltiplichiamo le linee del primo, del secondo, ..., del $(\nu + \lambda - 1)^{\text{mo}}$ gruppo ordinatamente per $x_3^{\nu+\lambda-1}, x_3^{\nu+\lambda-2}, \dots, x_3$, e nella 3 le linee del primo, del secondo, ..., del $(\lambda + \mu - 1)^{\text{mo}}$ gruppo per $x_3^{\lambda+\mu-1}, x_3^{\lambda+\mu-2}, \dots, x_3$. Eseguendo tali operazioni anche sulle linee di H che si sono scelte per formare il determinante χ , questo risulta così moltiplicato per x_3 coll'esponente

$$\sum_{i=1}^{i=\mu+\nu-1} (\mu + \nu - i) \rho_i + \sum_{i=1}^{i=\nu+\lambda-1} (\nu + \lambda - i) \sigma_i + \sum_{i=1}^{i=\lambda+\mu-1} (\lambda + \mu - i) \tau_i.$$

Ma, per effetto di quelle operazioni, nella matrice H , e quindi anche in χ , ogni colonna del primo, del secondo, ..., del $(\lambda + \mu + \nu - 1)^{\text{mo}}$ gruppo riesce divisibile risp. per $x_3^{\lambda+\mu+\nu-1}, x_3^{\lambda+\mu+\nu-2}, \dots, x_3$; e perciò χ riesce divisibile per x_3 coll'esponente

$$(\lambda + \mu + \nu - 1) + 2(\lambda + \mu + \nu - 2) + \dots + (\lambda + \mu + \nu - 2) \cdot 2 + (\lambda + \mu + \nu - 1),$$

cioè coll'esponente

$$\frac{(\lambda + \mu + \nu)[(\lambda + \mu + \nu)^2 - 1]}{6}.$$

Risulta quindi posto in evidenza in χ il fattore x_3 coll'esponente

$$\frac{(\lambda + \mu + \nu)[(\lambda + \mu + \nu)^2 - 1]}{6}$$

$$- \sum_{i=1}^{i=\nu+\nu-1} (\mu + \nu - i) \rho_i - \sum_{i=1}^{i=\nu+\lambda-1} (\nu + \lambda - i) \sigma_i - \sum_{i=1}^{i=\lambda+\mu-1} (\lambda + \mu - i) \tau_i.$$

Per la matrice H' , moltiplichiamo invece in I' le colonne del primo, del secondo, ..., del $(\nu - 1)^{\text{mo}}$ gruppo per $x_3^{\nu-1}, x_3^{\nu-2}, \dots, x_3$ risp.; in II' le colonne del primo, del secondo, ..., del $(\lambda - 1)^{\text{mo}}$ gruppo per $x_3^{\lambda-1}, x_3^{\lambda-2}, \dots, x_3$; e in III' le colonne del primo, secondo, ..., del $(\mu - 1)^{\text{mo}}$ gruppo per $x_3^{\mu-1}, x_3^{\mu-2}, \dots, x_3$. Eseguendo queste stesse operazioni sopra le colonne di χ' , questo risulta moltiplicato per x_3 coll'esponente

$$\sum_{i=1}^{i=\nu-1} i(\lambda - i) + \sum_{i=1}^{i=\mu-1} i(\mu - i) + \sum_{i=1}^{i=\nu-1} i(\nu - i),$$

cioè coll'esponente

$$\frac{\lambda^3 + \mu^3 + \nu^3 - (\lambda + \mu + \nu)}{6}.$$

Ma, in seguito a quelle operazioni, riescono divisibili, in 1', le linee del primo, secondo, ..., $(\mu + \nu - 1)^{m'}$ gruppo risp. per $x_3^{\mu+\nu-1}, x_3^{\mu+\nu-2}, \dots, x_3$; in 2', le linee del primo, ..., $(\nu + \lambda - 1)^{m'}$ gruppo per $x_3^{\nu+\lambda-1}, \dots, x_3$; in 3', le linee del primo, ..., $(\lambda + \mu - 1)^{m'}$ gruppo per $x_3^{\lambda+\mu-1}, \dots, x_3$. Quindi χ' riesce divisibile per x_3 coll'esponente

$$\sum_{i=1}^{i=\nu+\nu-1} (\mu + \nu - i) \rho'_i + \sum_{i=1}^{i=\nu+\lambda-1} (\nu + \lambda - i) \tau'_i + \sum_{i=1}^{i=\lambda+\mu-1} (\lambda + \mu - i) \tau'_i.$$

Epperò vien posto in evidenza in χ' il fattore x_3 coll'esponente

$$\sum_{i=1}^{i=\nu+\nu-1} (\mu + \nu - i) \rho'_i + \sum_{i=1}^{i=\nu+\lambda-1} (\nu + \lambda - i) \sigma'_i + \sum_{i=1}^{i=\lambda+\mu-1} (\lambda + \mu - i) \tau'_i - \frac{\lambda^3 + \mu^3 + \nu^3 - (\lambda + \mu + \nu)}{6}.$$

Ne segue che la risultante R è divisibile per x_3 coll'esponente

$$\frac{1}{6} \left\{ (\lambda + \mu + \nu)^3 + \lambda^3 + \mu^3 + \nu^3 - 2(\lambda + \mu + \nu) \right\} - \left\{ \sum_{i=1}^{i=\nu+\nu-1} (\mu + \nu - i) (\rho_i + \rho'_i) + \sum_{i=1}^{i=\nu+\lambda-1} (\nu + \lambda - i) (\sigma_i + \sigma'_i) + \sum_{i=1}^{i=\lambda+\mu-1} (\lambda + \mu - i) (\tau_i + \tau'_i) \right\},$$

la qual quantità, per le (6), si riduce facilmente a $\lambda \mu \nu$. Si conclude che il punto 0 assorbe **ALMENO** $\lambda \mu \nu$ intersezioni delle date superficie.

4. Nel punto 0 sarà raccolto un numero d'intersezioni delle tre superficie maggiore di $\lambda \mu \nu$, allora ed allora soltanto che sarà nullo in R il coefficiente di $x_3^{\lambda \mu \nu}$: dobbiamo dunque cercare questo coefficiente, e stabilirne il significato geometrico. A tal fine occorre premettere la seguente osservazione. Siano

$$\left. \begin{aligned} U &\equiv (u_{\lambda 0} x_1^\lambda + u_{\lambda 1} x_1^{\lambda-1} x_2 + \dots + u_{\lambda \lambda} x_2^\lambda) x_3^{\lambda-\lambda} + (u_{\lambda+1,0} x_1^{\lambda+1} + \dots + u_{\lambda+1, \lambda+1} x_2^{\lambda+1}) x_3^{\lambda-\lambda-1} \\ &\quad + \dots + (u_{l 0} x_1^l + u_{l 1} x_1^{l-1} x_2 + \dots + u_{l l} x_2^l) = 0, \\ V &\equiv (v_{\mu 0} x_1^\mu + \dots + v_{\mu \mu} x_2^\mu) x_3^{m-\mu} + \dots + (v_{m 0} x_1^m + \dots + v_{m m} x_2^m) = 0, \\ W &\equiv (w_{\nu 0} x_1^\nu + \dots + w_{\nu \nu} x_2^\nu) x_3^{n-\nu} + \dots + (w_{n 0} x_1^n + \dots + w_{n n} x_2^n) = 0 \end{aligned} \right\} (14)$$

le equazioni di tre curve piane U, V, W degli ordini l, m, n , aventi nel punto fondamentale $(0, 0, 1)$ risp. le molteplicità λ, μ, ν : la condizione necessaria e sufficiente perchè esse abbiano in comune un punto *diverso dal precedente* (ma che potrebbe però anche coincidere con questo, nel senso che esso conti fra i punti comuni alle tre curve più di quello che conta in generale pel solo fatto che esse vi passano λ, μ, ν volte) si può ottenere come quoziente di due determinanti, analogamente a ciò che si è fatto nel n.º 1, nel modo seguente. Moltiplichiamo le (14) ordinatamente per

$$\begin{aligned} & x_1^{\mu+\nu-1}, x_1^{\mu+\nu-2} x_2, \dots, x_2^{\mu+\nu-1}; \dots; x_1^{m+n-2}, x_1^{m+n-3} x_2, \dots, x_2^{m+n-2}; \\ & x_1^{\nu+\lambda-1}, x_1^{\nu+\lambda-2} x_2, \dots, x_2^{\nu+\lambda-1}; \dots; x_1^{n+l-2}, x_1^{n+l-3} x_2, \dots, x_2^{n+l-2}; \\ & x_1^{\lambda+\mu-1}, x_1^{\lambda+\mu-2} x_2, \dots, x_2^{\lambda+\mu-1}; \dots; x_1^{l+m-2}, x_1^{l+m-3} x_2, \dots, x_2^{l+m-2}. \end{aligned}$$

Otteniamo così

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\{ (m+n)(m+n-1) + (n+l)(n+l-1) + (l+m)(l+m-1) \right\} \\ & - \frac{1}{2} \left\{ (\mu+\nu)(\mu+\nu-1) + (\nu+\lambda)(\nu+\lambda-1) + (\lambda+\mu)(\lambda+\mu-1) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

equazioni lineari fra le potenze

$$x_1^{\lambda+\mu+\nu-1}, x_1^{\lambda+\mu+\nu-2} x_2, \dots, x_2^{\lambda+\mu+\nu-1}; \dots; x_1^{l+m+n-2}, x_1^{l+m+n-3} x_2, \dots, x_2^{l+m+n-2},$$

il cui numero è

$$\frac{1}{2} \left\{ (l+m+n)(l+m+n-1) - (\lambda+\mu+\nu)(\lambda+\mu+\nu-1) \right\}. \quad (16)$$

Le equazioni ottenute non sono però fra loro indipendenti, giacchè se moltiplichiamo le identità

$$VW = WV, \quad WU = UW, \quad UV = VU$$

risp. per

$$\begin{aligned} & x_1^{\lambda-1}, x_1^{\lambda-2} x_2, \dots, x_2^{\lambda-1}; \dots; x_1^{l-2}, x_1^{l-3} x_2, \dots, x_2^{l-2}; \\ & x_1^{\mu-1}, x_1^{\mu-2} x_2, \dots, x_2^{\mu-1}; \dots; x_1^{m-2}, x_1^{m-3} x_2, \dots, x_2^{m-2}; \\ & x_1^{\nu-1}, x_1^{\nu-2} x_2, \dots, x_2^{\nu-1}; \dots; x_1^{n-2}, x_1^{n-3} x_2, \dots, x_2^{n-2}, \end{aligned}$$

otteniamo

$$\frac{1}{2} \left\{ l(l-1) + m(m-1) + n(n-1) \right\} - \frac{1}{2} \left\{ \lambda(\lambda-1) + \mu(\mu-1) + \nu(\nu-1) \right\} \quad (17)$$

relazioni lineari fra le equazioni stesse, e il numero (17) è la differenza fra i numeri (15) e (16). Se allora si formano due matrici, l'una coi coefficienti delle equazioni, l'altra coi coefficienti delle relazioni da cui esse sono vincolate, la richiesta condizione si ottiene uguagliando a zero il rapporto fra uno qualunque (non identicamente nullo) dei determinanti tratti dalla prima e il determinante supplementare tratto dalla seconda. Gli ordini dei due determinanti sono dati risp. dalle espressioni (16) e (17).

5. Per riconoscere ormai quale sia in R il coefficiente di $x_3^{\lambda\mu\nu}$, supponiamo di aver eseguito sulle matrici H, H' , e però anche su χ, χ' , le operazioni indicate al n.º 3. Il risultato che ricaveremo dall' R primitivo sarà $\frac{R}{x_3^{\lambda\mu\nu}}$, sicchè il cercato coefficiente sarà ciò che diventa questo quoziente ponendovi $x_3 = 0$.

In H scompongasi ciascuna delle matrici parziali 1, 2, 3 in altre due, che diremo risp. $1_1, 1_2; 2_1, 2_2; 3_1, 3_2$, ponendo nelle $1_1, 2_1, 3_1$ risp. i primi $\mu + \nu, \nu + \lambda, \lambda + \mu$ gruppi di linee di 1, 2, 3, e nelle $1_2, 2_2, 3_2$ i gruppi rimanenti. Scompongasi inoltre la H in due matrici I e II, ponendo nella prima i primi $\lambda + \mu + \nu - 1$ gruppi di colonne, e nella seconda i gruppi rimanenti. Un elemento qualunque, il quale appartenga ad una colonna del gruppo j^{mo} di H e ad una linea del gruppo i^{mo} di 1, o di 2, o di 3, può rappresentarsi risp. con $a_{j-i,r}$, o con $b_{j-i,r}$, o con $c_{j-i,r}$: vediamo ciò che esso diventa, a seconda delle matrici $1_1 I, 1_2 I, \dots$ a cui appartiene, quando, eseguite le operazioni su accennate, vi si pone $x_3 = 0$.

1, I) Nell'elemento $a_{j-i,r}$ si ha $i \leq \mu + \nu, j \leq \lambda + \mu + \nu - 1$. Esso è stato moltiplicato per $x_3^{\mu+\nu-i}$ e diviso per $x_3^{\lambda+\mu+\nu-j}$, e però in sostanza è stato moltiplicato per $x_3^{j-i-\lambda}$. Ora se $j - i \leq \lambda$, in $a_{j-i,r}$ esiste il fattore $x_3^{\lambda-j+i}$, sicchè, fatte le precedenti operazioni e posto $x_3 = 0$, si ottiene $a_{j-i,r}$ [v. le (13)]. Se invece $j - i > \lambda$, si ottiene zero.

1, 2) Si ha $i > \mu + \nu, j \leq \lambda + \mu + \nu - 1$, da cui segue $j - i < \lambda$, quindi l'elemento $a_{j-i,r}$ contiene il fattore $x_3^{\lambda-j+i}$. Esso è stato soltanto diviso per $x_3^{\lambda+\mu+\nu-j}$, dunque risulta ancora come fattore $x_3^{i-\mu-\nu}$, dove l'esponente è > 0 . Per $x_3 = 0$ esso si annulla.

2, I) L'elemento è $b_{j-i,r}$: per $j - i \leq \mu$ si ottiene $\beta_{j-i,r}$, e per $j - i > \mu$ si ottiene zero.

2, 2) Tutti gli elementi si annullano.

3, I) L'elemento è $c_{j-i,r}$: per $j - i \leq \nu$ si ha $\gamma_{j-i,r}$, per $j - i > \nu$ risulta zero.

3₂D) Tutti gli elementi si annullano.

Quanto agli elementi della matrice II, essi assumono il valore che acquistano per $x_3=0$, all'infuori di quelli che appartengono alle linee dei primi $\mu + \nu - 1$, $\nu + \lambda - 1$, $\lambda + \mu - 1$ gruppi di 1, 2, 3 risp., i quali si annullano tutti.

Nella H' scindasi ciascuna delle matrici $1'$, $2'$, $3'$ in altre due, che diremo risp. $1'_1, 1'_2$; $2'_1, 2'_2$; $3'_1, 3'_2$, ponendo nelle $1'_1, 2'_1, 3'_1$ risp. le linee dei primi $\mu + \nu - 1$, $\nu + \lambda - 1$, $\lambda + \mu - 1$ gruppi di $1'$, $2'$, $3'$, e nelle $1'_2, 2'_2, 3'_2$ le linee dei gruppi rimanenti. Inoltre dividasi anche ciascuna delle matrici I' , II' , III' in altre due, che risp. diremo I'_1, I'_2 ; II'_1, II'_2 ; III'_1, III'_2 , ponendo nelle I'_1, II'_1, III'_1 i primi $\nu - 1$, $\lambda - 1$, $\mu - 1$ gruppi di colonne di I' , II' , III' , e nelle I'_2, II'_2, III'_2 i gruppi rimanenti. Un elemento qualunque, il quale appartenga all' i^{mo} gruppo di linee di $1'$, o di $2'$, o di $3'$, ed all' j^{mo} gruppo di colonne di I' , o di II' o di III' , viene rappresentato, prescindendo dal segno, con una delle lettere a, b, c , affetta da due indici, di cui il primo è $i-j$: eseguite le operazioni di cui sopra si è parlato, e posto $x_3=0$, con ragionamenti del tutto analoghi ai precedenti si giunge al seguente risultato:

gli elementi di	$(1'_1, I'_1)$	diventano	$-\beta_{i-j,r}$	se	$i-j \leq \mu,$
" " "	$(2'_1, I'_1)$	" "	$\alpha_{i-j,r}$	" "	$i-j \leq \lambda,$
" " "	$(2'_1, II'_1)$	" "	$-\gamma_{i-j,r}$	" "	$i-j \leq \nu,$
" " "	$(3'_1, II'_1)$	" "	$\beta_{i-j,r}$	" "	$i-j \leq \mu,$
" " "	$(3'_1, III'_1)$	" "	$-\alpha_{i-j,r}$	" "	$i-j \leq \lambda,$
" " "	$(1'_1, III'_1)$	" "	$\gamma_{i-j,r}$	" "	$i-j \leq \nu,$

mentre si annullano in caso contrario;

tutti gli elementi di $(1'_1, I'_2)$ e $(2'_1, I'_2)$, di $(2'_1, II'_2)$ e $(3'_1, II'_2)$, di $(3'_1, III'_2)$ e $(1'_1, III'_2)$ si annullano, salvo se si ha ordinatamente $j = \nu$, $j = \lambda$, $j = \mu$, nei quali casi essi diventano $-\beta_{i-\nu,r}$ e $\alpha_{i-\nu,r}$, $-\gamma_{i-\lambda,r}$ e $\beta_{i-\lambda,r}$, $-\alpha_{i-\mu,r}$ e $\gamma_{i-\mu,r}$;

tutti gli elementi di $(1'_2, I'_2)$, $(2'_2, I'_2)$, $(2'_2, II'_2)$, $(3'_2, II'_2)$, $(3'_2, III'_2)$, $(1'_2, III'_2)$ acquistano il valore che essi assumono per $x_3=0$;

infine tutti gli elementi delle diciotto matrici rimanenti si annullano.

6. Per brevità, chiamiamo D e Δ i due termini della differenza (15), T e Θ quelli della (16). Ciò posto, consideriamo di nuovo la H : abbiamo

veduto che nella sua matrice II, in seguito alle fatte operazioni, si sono annullati tutti gli elementi di Δ linee; ma il numero totale delle linee di H è D , quindi $D - \Delta$ esprime il numero delle linee di II, ciascuna delle quali è risultata composta, in generale, di elementi non tutti nulli. Il numero delle colonne di II è invece $T - \Theta$. Siccome è

$$D - \Delta \geq T - \Theta,$$

per formare il determinante χ potremo scegliere T linee di H , delle quali $T - \Theta$ non siano risultate composte, nella loro parte contenuta in II, di elementi tutti nulli, e le rimanenti Θ siano fra quelle (il cui numero totale è Δ) che in II sono diventate di tutti elementi nulli. Se allora si pensa χ scomposto in due matrici, di cui l'una formata colle colonne dei primi $\lambda + \mu + \nu - 1$ gruppi (cioè colle prime Θ colonne), e l'altra formata colle $T - \Theta$ colonne rimanenti (cioè con quelle che appartengono a II), è chiaro che, eseguite le solite operazioni, colle linee della seconda matrice non si può formare che un solo determinante non nullo. Laonde χ per tali operazioni diventa il prodotto di due determinanti χ_1 e χ_2 : il primo, di ordine Θ , ha le sue linee tratte dai primi $\mu + \nu - 1$, $\nu + \lambda - 1$, $\lambda + \mu - 1$ gruppi di 1 I, 2 I, 3 I, ed ha per elementi le α , β , γ risp.; il secondo, di ordine $T - \Theta$, ha le sue linee tratte dagli $(m + n - 1) - (\mu + \nu - 1) = m + n - \mu - \nu$, $n + l - \nu - \lambda$, $l + m - \lambda - \mu$ gruppi che in II non sono risultati di tutti elementi nulli, ed ha per elementi i valori che si ottengono ponendo $x_3 = 0$ nei corrispondenti elementi di II, i cui primi indici non sono minori di λ , μ , ν risp.

Con ciò che precede, la composizione del determinante χ' è già del tutto fissata; ed eseguite le solite operazioni, $\Delta - \Theta$ fra le sue linee sono formate cogli elementi α , β , γ , e le altre, in numero di $(D - \Delta) - (T - \Theta)$, sono formate coi risultati che s'ottengono ponendo $x_3 = 0$ negli elementi a , b , c i cui primi indici non siano risp. minori di λ , μ , ν . Se quindi pensiamo χ' scomposto in due matrici, di cui l'una formata colle linee della prima specie e l'altra colle rimanenti, eseguite le solite operazioni, dalla seconda non si può trarre che un solo determinante non nullo; sicchè per tali operazioni χ' si scinde nel prodotto di due determinanti χ'_1 e χ'_2 , di ordini $\Delta - \Theta$ e $(D - \Delta) - (T - \Theta)$.

Il coefficiente di $x_3^{\lambda\mu\nu}$ in R è dunque il prodotto $\frac{\chi'_1}{\chi'_1} \cdot \frac{\chi'_2}{\chi'_2}$, e la ricerca del significato geometrico dell'annullarsi de' suoi due fattori non offre ormai nessuna difficoltà. Invero si osservi che i cono d'ordini λ , μ , ν tangenti alle

tre superficie A, B, C nel punto singolare 0 hanno per equazioni:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{00} x_3^\lambda + (\alpha_{10} x_1 + \alpha_{11} x_2) x_3^{\lambda-1} + \dots + (\alpha_{\lambda 0} x_1^\lambda + \dots + \alpha_{\lambda \lambda} x_2^\lambda) &= 0, \\ \beta_{00} x_3^\mu + \dots &= 0, \\ \gamma_{00} x_3^\nu + \dots &= 0; \end{aligned} \right\} (18)$$

mentre le sezioni delle superficie stesse col piano $x_3 = 0$ sono rappresentate da:

$$\left. \begin{aligned} (a'_{\lambda 0} x_1^\lambda + a'_{\lambda 1} x_1^{\lambda-1} x_2 + \dots + a'_{\lambda \lambda} x_2^\lambda) x_4^{l-\lambda} + \dots + (a'_{l 0} x_1^l + \dots + a'_{l l} x_2^l) &= 0, \\ (b'_{\mu 0} x_1^\mu + \dots + b'_{\mu \mu} x_2^\mu) x_4^{m-\mu} + \dots &= 0, \\ (c'_{\nu 0} x_1^\nu + \dots + c'_{\nu \nu} x_2^\nu) x_4^{n-\nu} + \dots &= 0, \end{aligned} \right\}$$

dove le a', b', c' denotano i coefficienti dei termini indipendenti da x_3 nelle corrispondenti forme a, b, c (onde le $a'_{\lambda i}, b'_{\mu i}, c'_{\nu i}$ coincidono risp. colle $\alpha_{\lambda i}, \beta_{\mu i}, \gamma_{\nu i}$). Allora il primo fattore $\frac{\chi_1}{\chi_1'}$ è costituito, colle a, β, γ delle (18), nell'identico modo col quale si disse nel n.º 1 doversi formare, colle a, b, c delle (1), il quoziente $\frac{\chi}{\chi'}$: uguagliato a zero, esso rappresenta dunque la risultante dell'eliminazione dei rapporti $\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}$ dalle (18), cioè la condizione necessaria e sufficiente perchè i coni tangenti in 0 alle tre date superficie abbiano una generatrice comune. L'annullarsi del secondo fattore $\frac{\chi_2}{\chi_2'}$ è invece (n.º 4) la condizione perchè le sezioni fatte nelle date superficie dal piano $x_3 = 0$ abbiano in comune un punto distinto da 0 . Per l'ipotesi fatta che le tre superficie non passino per una medesima curva, e per il modo del tutto arbitrario con cui abbiamo scelto la faccia $x_3 = 0$ del tetraedro fondamentale, quest'ultimo fatto certamente non ha luogo, sicchè il secondo fattore è essenzialmente diverso da zero. Ciò dimostra la proposizione enunciata in principio.

7. Possiamo spingere la ricerca più oltre. I coni tangenti in 0 alle tre superficie abbiano una generatrice comune g , e per maggior generalità poniamo che questa abbia raccolte in 0 risp. $\lambda + \xi, \mu + \eta, \nu + \zeta$ delle sue intersezioni colle superficie A, B, C : sarà

$$\xi \geq 1, \quad \eta \geq 1, \quad \zeta \geq 1,$$

e possiamo supporre che sia, per es.,

$$\xi \leq \eta \leq \zeta.$$

Assumiamo g come retta $x_1 = x_2 = 0$, di guisa che nelle (18) si avrà

$$\alpha_{00} = \beta_{00} = \gamma_{00} = 0.$$

Inoltre, se nelle (1) si pone $x_1 = x_2 = 0$, si devono risp. staccare dai primi membri i fattori $x_3^{\lambda+\xi}$, $x_3^{\mu+\eta}$, $x_3^{\nu+\zeta}$, onde potremo scrivere:

$$a_{00} = p x_3^{\lambda+\xi} x_4^{l-\lambda-\xi} + \text{potenze superiori di } x_3,$$

$$b_{00} = q x_3^{\mu+\eta} x_4^{m-\mu-\eta} + \quad \quad \quad \text{"} \quad \quad \quad \text{"} \quad \quad \quad x_3,$$

$$c_{00} = r x_3^{\nu+\zeta} x_4^{n-\nu-\zeta} + \quad \quad \quad \text{"} \quad \quad \quad \text{"} \quad \quad \quad x_3,$$

e sarà

$$p \neq 0, \quad q \neq 0, \quad r \neq 0.$$

Volendo cercare quante intersezioni delle A, B, C sono assorbite dal punto 0, per semplicità, poniamo nel determinante χ la prima linea di ciascuna delle matrici 1, 2, 3 di H : ciò che, per i numeri precedenti, è sempre lecito. Allora, rifacendo il ragionamento del n.º 3, si trova che la prima colonna di H , e però anche di χ , riesce divisibile non soltanto per $x_3^{\lambda+\mu+\nu-1}$, ma per $x_3^{\lambda+\mu+\nu-1+\xi}$, sicchè da χ si stacca il fattore x_3 con un esponente superiore di almeno ξ unità a quello che avevasi nel n.º 3, mentre l'esponente della potenza di x_3 , che entra come fattore di χ' , non è ora diverso da quello di prima. Dunque *il punto 0 assorbe ALMENO $\lambda\mu\nu + \xi$ intersezioni delle date superficie.*

In 0 cadrà un maggior numero di tali intersezioni quando sarà nullo in R il coefficiente di $x_3^{\lambda\mu\nu+\xi}$. Per trovare questo coefficiente, rifacciamo esattamente tutte le operazioni descritte nel n.º 3: soltanto, poichè abbiamo già notato che la prima colonna di χ riesce ora divisibile, anzichè per $x_3^{\lambda+\mu+\nu-1}$, per $x_3^{\lambda+\mu+\nu-1+\xi}$, converrà dividerla appunto per questa potenza. Poscia porremo $x_3 = 0$. Il risultato sarà allora, come nel numero precedente, il prodotto di due quozienti di determinanti, dei quali il secondo è lo stesso $\frac{\chi_2}{\chi_2}$, e, per le ragioni già addotte, è essenzialmente diverso da zero. Il primo quoziente invece si deduce da $\frac{\chi_1}{\chi_1}$ eseguendo su esso alcune modificazioni, che variano a seconda dei casi; e precisamente: secondo che è $\xi < \eta$ (e del resto $\eta \leq \zeta$),

oppure $\xi = \eta < \zeta$, oppure $\xi = \eta = \zeta$, nella prima colonna del numeratore, in luogo di $\alpha_{00}, \beta_{00}, \gamma_{00}$ vengono risp. i valori $p, 0, 0$, oppure $p, q, 0$, oppure p, q, r , mentre in ogni caso in tutte le colonne rimanenti del numeratore, come pure dappertutto nel denominatore, in luogo di $\alpha_{00}, \beta_{00}, \gamma_{00}$ compare lo zero.

Scomponendo quindi il numeratore in due matrici, costituite l'una delle prime tre colonne e l'altra delle rimanenti, colle linee della prima non si può formare che un determinante non nullo, cioè, risp. nei tre casi dianzi accennati,

$$\begin{vmatrix} p & \alpha_{10} & \alpha_{11} \\ 0 & \beta_{10} & \beta_{11} \\ 0 & \gamma_{10} & \gamma_{11} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} p & \alpha_{10} & \alpha_{11} \\ q & \beta_{10} & \beta_{11} \\ 0 & \gamma_{10} & \gamma_{11} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} p & \alpha_{10} & \alpha_{11} \\ q & \beta_{10} & \beta_{11} \\ r & \gamma_{10} & \gamma_{11} \end{vmatrix}. \quad (19)$$

Il determinante supplementare tratto dall'altra matrice è ciò che rimane

di χ_1 sopprimendovi le prime tre colonne e la prima linea di ciascuna delle sue matrici parziali 1, 2, 3, e ponendo poi dappertutto $\alpha_{00} = \beta_{00} = \gamma_{00} = 0$. Un tal determinante verrà significato con χ_{10} ; e analogamente si chiamerà χ'_{10} ciò che si ottiene come denominatore, cioè il risultato che si ha da χ'_1 colle sostituzioni $\alpha_{00} = \beta_{00} = \gamma_{00} = 0$.

Per ciò che si è trovato nel n.º 4, l'annullarsi del fattore $\frac{\chi'_{10}}{\chi_{10}}$ è la condizione necessaria e sufficiente perchè i coni tangenti in 0 alle date superficie abbiano in comune una seconda generatrice diversa da g (ma che potrebbe anche coincidere con la g , nel senso già dichiarato nel n.º 4, cioè nel senso che allora la g assorba *almeno due* delle generatrici di ciascuno dei tre coni).

8. Prima di venire all'interpretazione geometrica dell'annullarsi dei tre determinanti (19), facciamo le seguenti osservazioni, nelle quali, per semplificare il linguaggio, toglieremo l'omogeneità alle coordinate, ponendo $\frac{x_1}{x_4} = x, \frac{x_2}{x_4} = y, \frac{x_3}{x_4} = z$, così che la retta g sarà l'asse delle z . Considerando una sola delle date superficie, ad es. la A , la sua equazione può scriversi così:

Ora diciamo A' la superficie che ha per equazione

$$A' \equiv pz^{\xi+1} + \alpha_{10}x + \alpha_{11}y = 0, \quad (21)$$

e che è perciò una superficie particolare del fascio rappresentato, al variare di k , da

$$kz^{\xi+1} + \alpha_{10}x + \alpha_{11}y = 0. \quad (22)$$

Se chiamiamo Γ_A il cono tangente ad A nell'origine, e π il piano tangente a Γ_A lungo l'asse delle z , cioè quello che ha per equazione

$$\pi \equiv \alpha_{10}x + \alpha_{11}y = 0,$$

una superficie qualunque del fascio (22) è un cilindro di grado $\xi + 1$, le cui generatrici sono parallele all'intersezione del piano π col piano xy , e di cui la retta all'infinito del piano xy è una generatrice multipla secondo ξ , colla particolarità che i ξ piani tangenti lungo essa al cilindro coincidono tutti col piano all'infinito dello spazio. Oltre a ciò, tutti i cilindri del fascio sono secati dal piano π in $\xi + 1$ generatrici coincidenti colla traccia di quel piano sul piano xy . Al fascio appartengono, come cilindri degeneri, il piano xy contato $\xi + 1$ volte, ed il piano π insieme col piano all'infinito contato ξ volte, sicchè, fissato il piano coordinato xy (nonchè il piano $x_1 = 0$), il fascio può ritenersi perfettamente noto: la sua base si compone della retta all'infinito del piano xy contata ξ ($\xi + 1$) volte, e dell'intersezione dei piani xy e π , contata $\xi + 1$ volte.

Per definire, entro il fascio, il cilindro particolare A' , si consideri un piano qualunque parallelo all'asse delle z (cioè alla g) e infinitamente vicino all'origine (cioè alla g): piano la cui equazione sarà quindi della forma

$$\varepsilon_1x + \varepsilon_2y = \varepsilon, \quad (23)$$

dove ε_1 , ε_2 sono costanti arbitrarie, ed ε è un infinitesimo. Volendo determinare i punti che, essendo comuni a questo piano ed alle superficie A e A' , cadono in prossimità dell'origine, basta ricavare dalle (22) e (23) le x , y e sostituirle nell'equazione (20) di A . Si giunge così alla seguente equazione in z :

$$(p - k)z^{\lambda+\xi} + \dots = 0,$$

dove i termini che non si sono scritti o contengono potenze di z superiori alla $(\lambda + \xi)^{ma}$, o dipendono da ε . Se dunque si vuole che per ε infinitesimo cada in 0 il massimo numero di quelle intersezioni, bisogna porre $k = p$, il

che fornisce, nel fascio (22), appunto la superficie A' . Per la proprietà che ora le abbiamo riconosciuta, e che la caratterizza fra gli elementi del fascio, chiameremo A' la superficie cilindrica osculatrice ad A e corrispondente alla generatrice g del cono Γ_A (*).

9. Siamo ora in grado di assegnare il significato geometrico dell'annullarsi dei determinanti (19).

1.° caso. Quando sia $\xi < \eta$ (ed $\eta \leq \zeta$), si deve considerare il primo di quei determinanti, il quale equivale a

$$p(\beta_{10}\gamma_{11} - \beta_{11}\gamma_{10}),$$

e poichè (n.° 7) p non è nullo, resta soltanto da interpretare la condizione

$$\beta_{10}\gamma_{11} - \beta_{11}\gamma_{10} = 0.$$

Ora, se non si ha $\beta_{10} = \beta_{11} = 0$, nè $\gamma_{10} = \gamma_{11} = 0$, la generatrice g è semplice per ciascuno dei coni Γ_B e Γ_C tangenti in O alle superficie B e C risp., e la condizione precedente esprime che i piani tangenti a tali coni lungo g (piani le cui equazioni sono

$$\beta_{10}x_1 + \beta_{11}x_2 = 0, \quad \gamma_{10}x_1 + \gamma_{11}x_2 = 0)$$

coincidono.

2.° caso. Se $\xi = \eta < \zeta$, il secondo dei determinanti (19) si annulla sia quando si ha $\gamma_{10} = \gamma_{11} = 0$, sia quando è ad un tempo

$$q\alpha_{10} - p\beta_{10} = 0, \quad q\alpha_{11} - p\beta_{11} = 0.$$

Nel primo caso il cono Γ_C ha in g una generatrice almeno doppia; nel secondo caso le superficie cilindriche A' e B' osculatrici alle A e B e corrispondenti alla g coincidono. Esclusi questi casi, i due piani

$$\gamma_{10}x + \gamma_{11}y = 0, \quad (q\alpha_{10} - p\beta_{10})x + (q\alpha_{11} - p\beta_{11})y = 0 \quad (24)$$

riescono ben determinati, e l'annullarsi del determinante considerato è la condizione perchè essi coincidano. Il primo è quello che tocca Γ_C lungo g . Per riconoscere che piano sia il secondo, si osservi che le A' e B' hanno per equazioni

$$A' \equiv pz^{\xi+1} + \alpha_{10}x + \alpha_{11}y = 0, \quad B' \equiv qz^{\xi+1} + \beta_{10}x + \beta_{11}y = 0.$$

(*) Non si dimentichi però che la A' non è unica, sibbene è tale ogniqualvolta siasi fissato il sistema dei piani coordinati (così che O sia l'origine e la generatrice g l'asse delle z). In tutto il seguito si sottintenderà sempre che ciò sia stato fatto.

Ma si ha identicamente

$$qA' - pB' = (q\alpha_{10} - p\beta_{10})x + (q\alpha_{11} - p\beta_{11})y,$$

epperò l'intersezione di A' e B' si compone della retta all'infinito del piano xy contata $\xi(\xi + 1)$ volte e di una curva piana [razionale, ecc. (*)] di ordine $\xi + 1$, situata nel piano rappresentato appunto dalla seconda delle (24). La condizione cercata è dunque che il piano di questa curva coincida col piano tangente al cono Γ_C lungo la retta g .

3.^o caso. Se $\xi = \eta = \zeta$, l'annullarsi del terzo fra i determinanti (19) dà la condizione perchè i cilindri A' , B' , C' appartengano ad un medesimo fascio [la cui curva base è composta della retta all'infinito del piano xy contata $\xi(\xi + 1)$ volte e di una curva piana razionale d'ordine $\xi + 1$, come si è detto nel caso precedente].

Riassumendo, possiamo enunciare il teorema:

Se tre superficie qualunque A , B , C di ordini l , m , n (non passanti per una medesima curva) hanno in un punto comune O le molteplicità λ , μ , ν , e se i tre coni Γ_A , Γ_B , Γ_C ad esse tangenti in O hanno in comune una generatrice g , la quale abbia raccolte in O rispettivamente $\lambda + \xi$, $\mu + \eta$, $\nu + \zeta$ delle sue intersezioni colle date superficie (essendo, ad esempio, $\xi \leq \eta \leq \zeta$), qualunque siano le ulteriori singolarità di queste ultime, esse si tagliano in lmn punti, di cui almeno $\lambda\mu\nu + \xi$ cadono in O . — Questo punto assorbe un maggior numero di tali intersezioni soltanto quando i tre coni Γ_A , Γ_B , Γ_C abbiano in comune una seconda generatrice (che può anche coincidere con la g , la quale assorbe in tal caso due generatrici di ciascuno di quei coni); oppure:

1) essendo $\xi < \eta$ (ed $\eta \leq \zeta$), quando g sia almeno doppia per Γ_B o per Γ_C , o quando, essendo essa semplice per entrambi i coni, questi abbiano lungo g lo stesso piano tangente;

(*) Si trova facilmente che, se si pone

$$M = \frac{q\alpha_{11} - p\beta_{11}}{\alpha_{10}\beta_{11} - \alpha_{11}\beta_{10}}, \quad N = -\frac{q\alpha_{10} - p\beta_{10}}{\alpha_{10}\beta_{11} - \alpha_{11}\beta_{10}},$$

le coordinate del punto corrente sopra questa curva si possono rappresentare, come funzioni di un parametro t , colle formole:

$$x = Mt^{\xi+1}, \quad y = Nt^{\xi+1}, \quad z = t.$$

Se poi si assume come piano xz quello della curva, l'equazione di questa nel proprio piano è:

$$(\alpha_{10}\beta_{11} - \alpha_{11}\beta_{10})x - (q\alpha_{11} - p\beta_{11})x^{\xi+1} = 0.$$

2) essendo $\xi = \eta < \zeta$, quando, mettendo in evidenza i termini di grado più basso nelle equazioni delle tre superficie

$$p z^{\lambda+\xi} + \dots + (\alpha_{10} x + \alpha_{11} y) z^{\lambda-1} + \dots = 0,$$

$$q z^{\mu+\eta} + \dots + (\beta_{10} x + \beta_{11} y) z^{\mu-1} + \dots = 0,$$

$$r z^{\nu+\zeta} + \dots + (\gamma_{10} x + \gamma_{11} y) z^{\nu-1} + \dots = 0,$$

si abbia

$$\begin{vmatrix} p & \alpha_{10} & \alpha_{11} \\ q & \beta_{10} & \beta_{11} \\ 0 & \gamma_{10} & \gamma_{11} \end{vmatrix} = 0,$$

cioè quando il cono Γ_C abbia in g una generatrice almeno doppia, o quando le superficie cilindriche osculatrici alle A e B e corrispondenti alla generatrice g (coincidano, ovvero) si taglino (oltre che nella generatrice ξ -pla comune) in una linea (necessariamente piana) situata nel piano tangente a Γ_C lungo g ;

3) essendo $\xi = \eta = \zeta$, quando si abbia

$$\begin{vmatrix} p & \alpha_{10} & \alpha_{11} \\ q & \beta_{10} & \beta_{11} \\ r & \gamma_{10} & \gamma_{11} \end{vmatrix} = 0,$$

cioè quando le superficie cilindriche osculatrici alle A , B , C e corrispondenti alla generatrice g appartengano ad un medesimo fascio.

Per dare un esempio, una delle tre superficie abbia in O un punto h -planare cogli h piani tangenti coincidenti in un solo σ ; le altre due superficie abbiano in O le molteplicità k e t , ed i rispettivi coni tangenti Γ e Γ_1 abbiano in comune una (sola) generatrice g situata in σ ed avente risp. $h + h'$, $k + k'$, $t + t'$ delle sue intersezioni colle tre superficie raccolte in O . Supposto, per fissar le idee, $k' \leq t'$, non potranno accadere che due casi:

1) Se $h' \leq k'$ ($\leq t'$), in O cadranno almeno $hkt + k'$ intersezioni delle tre superficie, e ne cadrà precisamente questo numero, salvo quando g sia almeno doppia per l'uno o per l'altro dei coni Γ e Γ_1 , oppure quando, essendo g semplice per entrambi, questi si tocchino lungo g ;

2) se invece $h' > t'$ ($\cong k'$), oppure se $t' \cong h' > k'$, cadranno in O almeno $hkt + k' + 1$ di quelle intersezioni.

10. Dei risultati a cui siamo giunti si potrebbero fare molteplici applicazioni: qui mi limiterò a qualcuna relativa alla classe di una superficie algebrica (priva di linee multiple). Se questa, che dirò F , è di ordine n e priva di punti multipli, la sua classe è $n(n-1)^2$, cioè per una retta qualunque si possono condurre ad $Fn(n-1)^2$ piani tangenti: i loro punti di contatto sono quelli che F ha in comune colle prime polari F_1 ed F_2 di due punti arbitrari P_1 e P_2 di quella retta. Se invece F è dotata di un punto s -plo ($s > 1$) 0 , quelle prime polari hanno in 0 la molteplicità $s-1$, onde la classe vien diminuita di $s(s-1)^2$ unità *almeno*: proposizione notissima. Ora possiamo vedere in qual caso la diminuzione dovuta al punto s -plo sarà maggiore. In virtù del teorema dimostrato nei n.º 5 e 6, perchè ciò avvenga occorre e basta che i coni Γ , Γ_1 , Γ_2 tangenti in 0 alle F , F_1 , F_2 abbiano una generatrice comune g . Ma Γ_1 e Γ_2 sono le prime polari delle rette OP_1 ed OP_2 rispetto al cono Γ , sicchè la polare di prim'ordine di g rispetto a Γ è allora indeterminata, epperò g è multipla per Γ . Risulta dunque dimostrato rigorosamente e per via puramente algebrica il teorema (*):

Affinchè un punto s -plo di una superficie d'ordine n (priva di linee multiple) diminuisca la classe $n(n-1)^2$ della superficie di più che $s(s-1)^2$ unità, è necessario e sufficiente che il cono tangente alla superficie nel punto s -plo abbia una generatrice multipla.

Consideriamo più da vicino il caso, in cui il cono Γ ha una generatrice g doppia, e per maggior generalità poniamo che questa abbia $s+1+t$ ($t \geq 0$) delle sue intersezioni con F raccolte nel punto 0 . Assumendo 0 come origine delle coordinate e g come asse delle z , l'equazione di F può scriversi nella forma:

$$\left. \begin{aligned}
 F &\equiv p z^{s+t+1} + \text{potenze superiori di } z \\
 &+ x(a z^{s+h} + \text{potenze superiori di } z) + y(b z^{s+h} + \text{potenze superiori di } z) \\
 &+ (\alpha_{20} x^2 + \alpha_{21} xy + \alpha_{22} y^2) z^{s-2} \\
 &+ \text{termini che in } x \text{ e } y \text{ sono di } 2.^{\circ} \text{ grado e in } z \text{ di grado superiore} \\
 &\quad \text{all' } (s-2)^{\text{mo}} \\
 &+ \text{termini di grado superiore al } 2.^{\circ} \text{ in } x \text{ e } y = 0.
 \end{aligned} \right\} (25)$$

(*) Cfr. ROHN, *Ueber die Entstehung eines beliebigen x -fachen Punctes einer Fläche aus dem gewöhnlichen x -fachen Punct* (Berichte der K. Sächs. Gesell. d. Wissensch., 1884), pag. 2.

Qui è $p \neq 0$, $h \geq 0$, $k \geq 0$, ma i termini lineari in x ed y possono anche mancare (onde a e b possono anche essere nulli); invece, poichè l'equazione

$$\alpha_{20}x^2 + \alpha_{21}xy + \alpha_{22}y^2 = 0$$

rappresenta i due piani tangenti a Γ lungo g , possiamo supporre che nessuna delle α_{20} , α_{21} , α_{22} sia nulla.

Per riconoscere la diminuzione prodotta dal punto 0 nella classe di F , consideriamo le intersezioni di F colle prime polari di due punti generici P e Q aventi le coordinate P_1, P_2, P_3 e Q_1, Q_2, Q_3 . Scrivendo soltanto i termini di grado più basso, tali polari hanno per equazioni

$$aP_1z^{s+h} + bP_2z^{s+h} + pP_3(s+t+1)z^{s+t} + \dots \\ + \left\{ (2\alpha_{20}P_1 + \alpha_{21}P_2)x + (\alpha_{21}P_1 + 2\alpha_{22}P_2)y \right\} z^{s-1} + \dots = 0,$$

e quella che di qui si deduce cambiando le P nelle Q . Ora dobbiamo distinguere due casi.

1) Se t non è maggiore di nessuno dei numeri h e k , oppure se mancano nella (25) i termini lineari in x e y (onde $a=b=0$), ciascuna delle polari considerate ha raccolte in 0 (in generale ed almeno) $s+t$ delle sue intersezioni con g , epperò, colle notazioni del n. prec., abbiamo:

$$\lambda = s, \quad \mu = \nu = s - 1; \quad \xi = t + 1, \quad \eta \geq t + 1, \quad \zeta \geq t + 1.$$

Il punto 0 assorbe quindi $s(s-1)^2 + t + 1$ intersezioni delle tre superficie, e non ne assorbe un numero maggiore se non quando sia

$$0 = p \begin{vmatrix} 2\alpha_{20}P_1 + \alpha_{21}P_2 & \alpha_{21}P_1 + 2\alpha_{22}P_2 \\ 2\alpha_{20}Q_1 + \alpha_{21}Q_2 & \alpha_{21}Q_1 + 2\alpha_{22}Q_2 \end{vmatrix} = p \begin{vmatrix} P_1 & P_2 \\ Q_1 & Q_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2\alpha_{20} & \alpha_{21} \\ \alpha_{21} & 2\alpha_{22} \end{vmatrix}$$

Il primo fattore p non è nullo; il secondo fattore si annulla soltanto allorchè la retta PQ taglia l'asse delle z , il che è da escludersi avendo scelto P e Q in posizione generica; infine l'annullarsi dell'ultimo fattore significa che g è per Γ una generatrice cuspidale.

2) Se t supera quello dei due numeri h e k che non è maggiore dell'altro, e che supporremo, ad es., sia h (cioè se, supposto $h \leq k$, è $h < t$), oppure se, mancando uno dei numeri h e k (per es. k), l'altro è minore di t , il più piccolo dei numeri che nel numero precedente abbiamo indicato con ξ, η, ζ è $h + 1$, epperò, tenendo presente che il cono Γ ha in g una genera-

trice doppia, si conclude che O assorbe almeno

$$s(s-1)^2 + (h+1) + 1, \quad \text{cioè} \quad s(s-1)^2 + h + 2$$

intersezioni delle tre superficie.

Ora nel caso 1) il numero $s+t$ esprime quante fra le intersezioni della retta g colla prima polare di un punto generico dello spazio rispetto ad F cadono in O ; nel caso 2) invece, O rappresenta $s+h$ di tali intersezioni. Abbiamo dunque il teorema:

Se una superficie algebrica ha in un punto O la molteplicità s , ed il cono Γ ivi ad essa tangente possiede una generatrice doppia g , la quale abbia in O raccolte $s+1+t$ ($t \geq 0$) delle sue intersezioni colla superficie, può accadere che g incontri in O la prima polare di un punto generico rispetto ad F $s+t$ volte, oppure un numero minore, $s+h$ ($0 \leq h < t$), di volte. Nel primo caso il punto O diminuisce la classe della superficie almeno di $s(s-1)^2 + t + 1$ unità, e la diminuisce maggiormente soltanto allorchè g è pel cono Γ una generatrice cuspidale; nel secondo caso il punto O diminuisce la classe di almeno $s(s-1)^2 + h + 2$ unità ().*

Ha un interesse particolare il caso in cui O è doppio per F ($s=2$): la classe di F vien da esso diminuita di più che due unità soltanto quando il cono ivi tangente si spezza in due piani (distinti o no). Se O è biplanare, il teorema precedente diviene:

Avendosi una superficie dotata di un punto biplanare O , siffatto che la retta g comune ai due piani ivi tangenti abbia $3+t$ ($t \geq 0$) delle sue intersezioni colla superficie raccolte in O , questo punto abbassa la classe della superficie precisamente di $t+3$ unità, oppure di almeno $h+4$ unità, secondo che esso assorbe $t+2$, oppure un numero minore, $h+2$ ($0 \leq h < t$), delle intersezioni di g colla prima polare di un punto generico rispetto alla superficie.

Di questo teorema sono immediate conseguenze alcune proprietà che sono state stabilite dal sig. ROHN (**), ricorrendo a sviluppi in serie: un punto bi-

(*) Di questo teorema non sono noti che alcuni casi molto particolari (e del resto anche con minor precisione di quella che è nel testo): per $t=0, 1$, cfr. ROHN, *Das Verhalten der HESSE'schen Fläche* ecc. (Math. Ann. Bd. XXIII, nota a pag. 89); e per una superficie del 4.º ordine con un punto triplo, v. ROHN, *Ueber die Flächen vierter Ordnung mit dreifachem Punkte* (Math. Ann., Bd. XXIV), n.º 52, 53 e 59, dove l'A. ricorre a sviluppi in serie.

(**) ROHN, *Ein Beitrag zur Theorie der biplanaren und uniplanaren Knotenpunkte* (Math. Ann., Bd. XXII, pag. 133-134).

planare può abbassare la classe della superficie (compatibilmente coll'ordine di questa) di quante si vogliano unità, senza che le sezioni fatte nella superficie dai piani in esso tangenti abbiano in quel punto una molteplicità superiore a tre; se la classe vien diminuita di più che tre unità, le sezioni della superficie con ciascuno di quei due piani hanno in generale in quel punto un punto triplo, di cui *una* delle tangenti è l'intersezione dei due piani tangenti, e non è necessario che intervengano altre particolarità: ecc.

Si deduce altresì:

Perchè un punto biplanare di una superficie algebrica diminuisca la classe di questa precisamente di tre unità, è necessario e sufficiente che la retta comune ai due piani ivi tangenti abbia tre, e non più, delle sue intersezioni colla superficie riunite in quel punto.

Torino, 3 gennaio 1896.