

Die algebraische Lösung des Problems der Substitutionsgruppen.

Von

P. HOYER in Burg b. Magdeburg.

Einleitung.

Wir verstehen unter $x_1 x_2 \dots x_n$ eine Reihe von n unbeschränkt veränderlichen Grössen und wenden auf diese Reihe alle Substitutionen irgend einer Gruppe n . Grades an. Die Anzahl der so erhaltenen Permutationen oder Grössenreihen ist gleich ν , wenn ν die Ordnung der Gruppe ist. Aus diesen ν Permutationen bilden wir ein System von $n! = 1.2 \dots n$ Grösseneinheiten:

$$\begin{array}{c} x_1^{(1)} x_2^{(1)} \dots x_n^{(1)}, \\ x_1^{(2)} x_2^{(2)} \dots x_n^{(2)}, \\ \vdots \\ x_1^{(n!)} x_2^{(n!)} \dots x_n^{(n!)}, \end{array}$$

indem wir jede Permutation $\frac{n!}{\nu} = i$ mal als Reihe des Systems setzen. Verstehen wir dann unter

$$\begin{array}{c} k_1^{(\beta)} k_2^{(\beta)} \dots k_n^{(\beta)} \\ (\beta = 1, 2, \dots n!) \end{array}$$

$n!$ Reihen unbestimmter Constanten, so ist der Ausdruck:

$$l(k, x) = \sum_{\beta=1}^{n!} (k_1^{(\beta)} x_1^{(\beta)} + k_2^{(\beta)} x_2^{(\beta)} + \dots + k_n^{(\beta)} x_n^{(\beta)})$$

eine lineare homogene Function der Grössen $x_1 x_2 \dots x_n$, und wir nennen dieselbe daher eine „Linearform“ der betrachteten Gruppe. Die Anzahl aller Linearformen einer Gruppe ist somit gleich $\frac{n!}{(i!)^\nu}$; dieselben sind mit der Gruppe gegeben, umgekehrt ist jede Gruppe durch eine ihrer Linearformen völlig bestimmt. Die Aufgabe:

„alle Gruppen n . Grades zu bestimmen“

ist daher identisch mit der Aufgabe:

„alle Linearformen $l(k, x)$ von Gruppen n . Grades zu bestimmen.“

Damit ist das Gruppenproblem algebraisch formulirt.

Bildet man das über sämtliche Linearformen $l(k, x)$ der Gruppen n . Grades erstreckte Product

$$\Pi (z - l(k, x)),$$

wo z eine neue Veränderliche bedeutet, und entwickelt dasselbe nach Potenzen von z , so erhält man eine rationale ganze Function $\Phi(z; k, x)$ von z , deren Coefficienten rationale ganze Functionen der Grössen $k_1^{(1)} \dots k_n^{(1)} \dots k_2^{(n)} \dots k_n^{(n)}$; $x_1 \dots x_n$ sind. Ist diese Function gegeben, so liefert die Auflösung der Gleichung $\Phi(z; k, x) = 0$ nach z sämtliche Linearformen $l(k, x)$. Diese Auflösung, m. a. W. die Zerfällung der Function $\Phi(z; k, x)$ in ihre Linearfactoren, ist aber ohne Schwierigkeit auszuführen. In der That, setzt man $z = 0$ und sämtliche Grössen k mit Ausnahme von $k_1^{(1)}$ gleich Null, so wird $\Phi(z; k, x)$ theilbar durch das Product sämtlicher Grössen x , die mit dem Coefficienten $k_1^{(1)}$ in den Linearformen $l(k, x)$ behaftet sind. Ist x_α eine dieser Grössen x , und setzt man dann $z = k_1^{(1)} x_\alpha$ und sämtliche Grössen k mit Ausnahme von $k_1^{(1)}$, $k_2^{(1)}$ gleich Null, so wird $\Phi(z; k, x)$ theilbar durch diejenigen Grössen x , welche mit dem Coefficienten $k_2^{(1)}$ in den mit $k_1^{(1)} x_\alpha$ beginnenden Linearformen behaftet sind. Ist wieder x_β eine dieser Grössen, so liefern jene x , durch die $\Phi(k_1^{(1)} x_1 + k_2^{(1)} x_2; k, x)$ theilbar wird, wenn sämtliche k ausser $k_1^{(1)}$, $k_2^{(1)}$, $k_3^{(1)}$ gleich Null gesetzt werden, diejenigen Grössen, welche mit $k_3^{(1)}$ in den mit $k_1^{(1)} x_\alpha + k_2^{(1)} x_\beta$ beginnenden Linearformen behaftet sind, u. s. f. Mit der Function $\Phi(z; k, x)$ können daher auch die Linearformen $l(k, x)$ als gegeben betrachtet werden. Die Aufgabe, alle Linearformen $l(k, x)$ der Gruppen n . Grades zu bestimmen, ist damit auf die Aufgabe zurückgeführt:

„die Function $\Phi(z; k, x)$ zu bestimmen“.

In der vorliegenden Abhandlung soll nun gezeigt werden, dass die Function $\Phi(z; k, x)$ der grösste gemeinsame Theiler zweier rationalen ganzen Functionen von z ist, welche durch eine Reihe rationaler Operationen in allgemein — d. h. für jedes beliebige n gültiger Form darstellbar sind, wobei, was jedenfalls erlaubt ist, nur die symmetrische Gruppe als bekannt angesehen wird. Damit ist principiell die Aufgabe der Bestimmung aller Linearformen der Gruppen n . Grades gelöst. Die vollständige Lösung der Aufgabe; d. i. nichts anderes als die allgemeine Lösung des Gruppenproblems, würde in der *expliciten Darstellung* der Function $\Phi(z; k, x)$ zu bestehen haben.

Zum Schlusse sei noch bemerkt, dass diese Untersuchungen in meinen Untersuchungen über den Zusammenhang in Reihen, bezw. über die analytische Behandlung der dabei in Betracht kommenden Fragen*) ihre Quelle haben. Die folgende Darstellung soll indessen so gehalten sein, dass sie auch ohne Kenntniss jener Untersuchungen verständlich ist.

§ 1.

Zur Erreichung des in der Einleitung bezeichneten Zieles bedarf es einiger vorbereitender Betrachtungen. Denn die substitutionentheoretische Bedingung für die Existenz einer Gruppe ist nicht ohne Weiteres analytisch durch Grössenbeziehungen darstellbar, und es bedarf daher eines Satzes, der die substitutionentheoretische Aufgabe der analytischen Behandlung (in einer der Erreichung des Zieles angemessenen Weise) zugänglich macht**). Um diesen Satz bequem aussprechen zu können, führen wir einige abkürzende Bezeichnungen ein.

Es sei durch $z_1 z_2 \dots z_n$ ein System von n unbeschränkt veränderlichen Grössen bezeichnet, die, wie sogleich bemerkt werden soll, den Charakter von Hilfsgrössen haben, da sie aus der späteren Betrachtung herausfallen werden. Alsdann sei zur Abkürzung das Product

$$z_1^1 z_2^2 \dots z_n^n = \delta(z)$$

gesetzt. Ferner seien durch $S_1, S_2 \dots S_{n!}$ die Substitutionen der symmetrischen Gruppe n . Grades bezeichnet, und $\delta_\alpha(z)$ ($\alpha = 1, 2 \dots n!$) stelle das durch Anwendung von S_α auf $\delta(z)$ entstandene Product dar. Endlich sei

$$\sum_{\lambda=1}^{n!} C_\lambda \delta_\lambda(z) = f(z, C),$$

wobei unter $C_1, C_2 \dots C_{n!}$ ein System unbestimmter Constanten verstanden werden soll, und $f_\alpha(z, C)$ stelle wieder die durch Anwendung von S_α auf $f(z, C)$ entstandene Function dar. Nennen wir nun ein System von ν Substitutionen ($S_{\alpha_1} S_{\alpha_2} \dots S_{\alpha_\nu}$) ein Gruppenvielfaches ν^{ter} Ordnung, wenn eine Gruppe existirt, deren Ordnung ν_1 ein Theiler von ν ist, und die $\frac{\nu}{\nu_1}$ mal in dem System enthalten ist, so lässt sich der in Rede stehende Satz folgendermassen aussprechen:

*) Math. Ann. Bd. 42 u. fg.

**) Die allgemeine Methode findet man in meinen Abhandlungen „Grundlagen einer analytischen Behandlung der Gruppierungsaufgaben“ Math. Ann. Bd. 50, und „Neue Grundlagen der Gruppen und Substitutionentheorie“ ibid. Bd. 51.

Damit die Substitutionen $S_{\alpha_1} S_{\alpha_2} \dots S_{\alpha_v}$ ein Gruppenvielfaches v . Ordnung bilden, ist nothwendig und hinreichend, dass für irgend ein Constantensystem (C) das System der $v + 1$ Gleichungen:

$$(1) \quad \begin{cases} \sum_{x=1}^v \delta_{\alpha_x}(z) = f(z, C), \\ f(z, C) = f_{\alpha_x}(z, C), \quad (\alpha = 1, 2 \dots v) \end{cases}$$

zwischen den Grössen $z_1 \dots z_n$ identisch besteht.

Beweis: Es seien $S_{\beta_1} S_{\beta_2} \dots S_{\beta_{v_1}}$ die verschiedenen unter den Substitutionen $S_{\alpha_1} \dots S_{\alpha_v}$. Bilden diese letzteren Substitutionen ein Gruppenvielfaches, so besteht das Gleichungssystem (1) identisch, wenn man $C_{\beta_1} = C_{\beta_2} = \dots = C_{\beta_{v_1}} = \frac{v}{v_1}$ und alle übrigen Coefficienten C gleich Null setzt. Es bleibt daher nur zu beweisen, dass auch umgekehrt, wenn das System der Gleichungen (1) für irgend ein Constantensystem (C) identisch besteht, die Substitutionen $S_{\alpha_1} \dots S_{\alpha_v}$ ein Gruppenvielfaches bilden. Nun folgt aus der Gleichung $f(z, C) = f_{\alpha_x}(z, C)$, dass $C_m = C_n$ ist, wenn $S_m = S_n S_{\alpha_x}^c$ ist. Aus dem Bestehen aller Gleichungen $f(z, C) = f_{\alpha_x}(z, C)$, ($\alpha = 1, 2 \dots v$), folgt somit, dass $C_m = C_n$ ist, wenn S_m durch Multiplication von S_n mit irgend einem Product von Potenzen der Substitutionen $S_{\alpha_1} \dots S_{\alpha_x}$ entstanden gedacht werden kann. Verstehen wir nun unter c_α ($\alpha = 1, 2 \dots n!$) eine Zahl, die angiebt, wie oft die Substitution S_α unter den Substitutionen $S_{\alpha_1} \dots S_{\alpha_x}$

vorkommt, so ist $\sum_{x=1}^v \delta_{\alpha_x}(z) = f(z, c)$, und die erste der Gleichungen (1)

kann daher auch in der Form geschrieben werden: $f(z, c) = f(z, C)$. Daraus folgt $c_\alpha = C_\alpha$ ($\alpha = 1, 2 \dots n!$). Mithin ist auch $c_m = c_n$, wenn S_m durch Multiplication von S_n mit einem Product von Potenzen der Substitutionen $S_{\alpha_1} \dots S_{\alpha_v}$ erhalten werden kann. Hieraus folgt, da für S_n jede der Substitutionen $S_{\beta_1} \dots S_{\beta_{v_1}}$ angenommen werden kann, dass jede Substitution der durch $S_{\beta_1} \dots S_{\beta_{v_1}}$ bestimmten Gruppe mindestens einmal unter den Substitutionen $S_{\alpha_1} \dots S_{\alpha_v}$ enthalten sein muss. Da aber diese Substitutionen sämmtlich gleich den Substitutionen $S_{\beta_1} \dots S_{\beta_{v_1}}$ sind, so müssen die Substitutionen $S_{\beta_1} \dots S_{\beta_{v_1}}$ selbst eine Gruppe bilden. Da endlich die Producte $S_{\beta_1} \cdot S_{\beta_1}, S_{\beta_1} \cdot S_{\beta_2}, \dots, S_{\beta_1} \cdot S_{\beta_{v_1}}$ somit wieder die Substitutionen $S_{\beta_1} \dots S_{\beta_{v_1}}$ in derselben oder veränderter Reihenfolge ergeben, so müssen sämmtliche Coefficienten c_{β_x} ($\alpha = 1, 2 \dots v_1$) gleich c_{β_1} sein. Jede der Substitutionen $S_{\beta_1} \dots S_{\beta_{v_1}}$ kommt also $c_{\beta_1} = \frac{v}{v_1}$ mal

in der Reihe der Substitutionen $S_{\alpha_1} \dots S_{\alpha_\nu}$ vor. Damit ist der obige Satz bewiesen. —

Wir suchen nun das Gleichungssystem (1) durch ein anderes zu ersetzen, das ν den Substitutionen $S_{\alpha_1}, \dots, S_{\alpha_\nu}$ entsprechende unbekannte Größenreihen enthält. Jede Substitution von n Elementen kann durch eine Permutation oder Größenreihe angegeben werden, in die irgend eine Größenreihe durch die Substitution übergeführt wird. Als eine solche Größenreihe war in diesem Paragraphen die Reihe der Größen $z_1 z_2 \dots z_n$ zu Grunde gelegt. Wie bereits oben bemerkt, stellen diese Größen nur Hilfsgrößen dar. Wir werden daher zunächst neben dieser Größenreihe eine zweite Reihe unbeschränkt veränderlicher Größen $x_1 x_2 \dots x_n$ einführen, die später in den Betrachtungen allein übrig bleiben wird. Jedem Substitutionssystem $(S_{\alpha_1} \dots S_{\alpha_\nu})$ von der im obigen Satze vorausgesetzten Beschaffenheit kann man dann ein System von ν Größenreihen entsprechen lassen, die Permutationen von $x_1 x_2 \dots x_n$ sind. Die Gesamtheit dieser Systeme von ν Größenreihen ist nun algebraisch dadurch defnirt, dass sie die einem gewissen Gleichungssystem genügenden Permutationssysteme sind. Die Ableitung dieses Gleichungssystems soll im nächsten Paragraphen gegeben werden. Dasselbe muss natürlich ν Systeme von Unbekannten

$$(y'_1 \dots y'_n) \dots (y_1^{(\nu)} \dots y_n^{(\nu)})$$

enthalten, während die Größen x als die bekannten Größen in die Coefficienten desselben eingehen. Diese Größen bilden also, zusammen mit andern später einzuführenden Constanten, den Rationalitätsbereich. Aus diesem Grunde wird im Folgenden auch zur Vereinfachung der Bezeichnungsweise von der Aufnahme dieser Größen in die Bezeichnung der Functionen, in deren Coefficienten sie eingehen, abgesehen werden.

§ 2.

Wir verstehen unter $(y_1 \dots y_n)$ ein System unbekannter Größen, unter $g_1(y_1 \dots y_n) \dots g_n(y_1 \dots y_n)$ die n elementar-symmetrischen Functionen von $y_1 \dots y_n$ und unter $g_1 \dots g_n$ die Werthe, in welche diese Functionen für $y_1 = x_1 \dots y_n = x_n$ übergehen. Alsdann werden die Lösungssysteme des Systems der n Gleichungen

$$(2) \quad \begin{cases} g_1(y_1 \dots y_n) = g_1, \\ \vdots \\ g_n(y_1 \dots y_n) = g_n \end{cases}$$

durch die der symmetrischen Gruppe n . Grades $(S_1 \dots S_n)$ entsprechenden Permutationen von $x_1 x_2 \dots x_n$ dargestellt.

Versteht man ferner unter $(\bar{y}_1 \dots \bar{y}_n)$ ein beliebiges specielles Werthsystem von $(y_1 \dots y_n)$, und denkt man sich alsdann $g_\alpha(y_1 \dots y_n) - g_\alpha(\bar{y}_1 \dots \bar{y}_n)$ nach Potenzen von $(y_1 - \bar{y}_1) \dots (y_n - \bar{y}_n)$ entwickelt und als lineare homogene Function dieser Differenzen dargestellt, sodass

$$(3) \quad g_\alpha(y_1 \dots y_n) - g_\alpha(\bar{y}_1 \dots \bar{y}_n) = (y_1 - \bar{y}_1) g_\alpha^{(1)}(y, \bar{y}) + \dots \\ \dots + (y_n - \bar{y}_n) g_\alpha^{(n)}(y, \bar{y}) \\ (\alpha = 1, 2 \dots n)$$

wird, so sind die Coefficienten $g_\alpha^{(\beta)}(y, \bar{y})$ ganze Functionen von $y_1 \dots y_n \bar{y}_1 \dots \bar{y}_n$, die als bekannt vorausgesetzt werden dürfen. Dasselbe gilt daher von der Determinante

$$(4) \quad D(y, \bar{y}) = \sum \pm g_1^{(1)}(y, \bar{y}) \dots g_n^{(n)}(y, \bar{y}).$$

Setzen wir in dieser Determinante für $(\bar{y}_1 \dots \bar{y}_n)$ die $n!$ Lösungssysteme des Gleichungssystems (2) ein, so erhalten wir $n!$ Functionen von $y_1 \dots y_n$, deren Coefficienten dem Rationalitätsbereich $(x_1 x_2 \dots x_n)$ angehören. Wir bezeichnen diese Functionen daher durch

$$(5) \quad D(y)_{S_1}, D(y)_{S_2} \dots D(y)_{S_{n!}}$$

indem wir unter $D(y)_{S_\alpha}$ die Function verstehen, welche durch Anwendung von S_α auf die in den Coefficienten von $D(y) = D(y, x)$ enthaltene Grössenreihe $x_1 x_2 \dots x_n$ entsteht.

Setzen wir in den Functionen (5) auch für $(y_1 \dots y_n)$ der Reihe nach die den Substitutionen $S_1 \dots S_{n!}$ entsprechenden Permutationen von $x_1 x_2 \dots x_n$ ein, so erhalten wir $n!$ dem Rationalitätsbereich $(x_1 \dots x_n)$ angehörige Grössen:

$$(6) \quad \Delta_{S_1}, \Delta_{S_2} \dots \Delta_{S_{n!}}.$$

Es geht also Δ_{S_α} aus $D(y, y)$ hervor, wenn für $y_1 \dots y_n$ die der Substitution S_α entsprechende Permutation gesetzt wird. Nun ist $D(y, y)$ die Functionaldeterminante von $g_1(y_1 \dots y_n) \dots g_n(y_1 \dots y_n)$, woraus leicht

$$D(y, y) = (-1)^{\frac{n \cdot (n-1)}{2}} \sum \pm y_1^{n-1} y_2^{n-2} \dots y_n^0$$

folgt. Folglich ist Δ_{S_α} die aus

$$(7) \quad \Delta = D(x, x) = (-1)^{\frac{n \cdot (n-1)}{2}} \sum \pm x_1^{n-1} x_2^{n-2} \dots x_n^0.$$

Durch Anwendung der Substitution S_α auf die Grössenreihe $x_1 x_2 \dots x_n$ hervorgehende Grösse. Bezeichnet daher ε_α die zur Ausführung von S_α erforderliche Anzahl von Transpositionen, so folgt

$$(8) \quad \Delta_{S_\alpha} = (-1)^{\varepsilon_\alpha} \Delta.$$

Alsdann stellt der Ausdruck

$$(9) \quad \sum_{\alpha=1}^{n!} \mathfrak{F}_{\alpha} \frac{D(y)_{S_{\alpha}}}{\Delta_{S_{\alpha}}} = \frac{1}{\Delta} \sum_{\alpha=1}^{n!} (-1)^{\varepsilon_{\alpha}} \mathfrak{F}_{\alpha} D(y)_{S_{\alpha}}$$

eine ganze Function von $y_1 \dots y_n$ dar, die für ein Lösungssystem des Gleichungssystems (2) den Werth \mathfrak{F}_{α} annimmt*), wenn dieses Lösungssystem der Substitution S_{α} entspricht.

Es sei jetzt $(y_1^{(\kappa)} \dots y_n^{(\kappa)})$ ein Lösungssystem von (2), das der Substitution $S_{\alpha_{\kappa}}$ ($\kappa=1, 2 \dots \nu$) eines Gruppenvielfachen $(S_{\alpha_1} \dots S_{\alpha_{\nu}})$ entspricht. Setzen wir in (9) für \mathfrak{F}_{α} einmal $\delta_{\alpha}(z)$, dann $f_{\alpha}(z, C)$ ein, so wird:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta} \sum_{\alpha=1}^{n!} (-1)^{\varepsilon_{\alpha}} D(y^{(\kappa)})_{S_{\alpha}} \delta_{\alpha}(z) &= \delta_{\alpha_{\kappa}}(z), \\ \frac{1}{\Delta} \sum_{\alpha=1}^{n!} (-1)^{\varepsilon_{\alpha}} D(y^{(\kappa)})_{S_{\alpha}} f_{\alpha}(z, C) &= f_{\alpha_{\kappa}}(z, C) \end{aligned}$$

wo

$$\delta_{\alpha}(z), f_{\alpha}(z, C) \quad (\alpha=1 \dots n!)$$

die in § 1 definirten Grössen sind. Das zur Definition des Gruppenvielfachen aufgestellte Gleichungssystem (1) geht daher über in

$$(10) \quad \begin{cases} \sum_{\alpha=1}^{n!} (-1)^{\varepsilon_{\alpha}} \delta_{\alpha}(z) \sum_{\kappa=1}^{\nu} D(y^{(\kappa)})_{S_{\alpha}} = \Delta f(z, C), \\ \Delta f(z, C) = \sum_{\alpha=1}^{n!} (-1)^{\varepsilon_{\alpha}} D(y^{(\kappa)})_{S_{\alpha}} \cdot f_{\alpha}(z, C) \\ \quad (\kappa=1, 2 \dots \nu). \end{cases}$$

Damit diese Gleichungen als Identitäten zwischen den Grössen $z_1 \dots z_n$ als den alleinigen Veränderlichen, wie es in dem Satze des § 1 verlangt wird, bestehen, ist nothwendig und hinreichend, dass die Coefficienten der Producte gleich hoher Potenzen von $z_1 \dots z_n$ auf beiden Seiten übereinstimmen. Die erste der Gleichungen (10) liefert daher sofort das System der $n!$ Gleichungen:

$$(11) \quad \Delta \cdot C_{\alpha} = (-1)^{\varepsilon_{\alpha}} \sum_{\kappa=1}^{\nu} D(y^{(\kappa)})_{S_{\alpha}} \\ (\alpha=1, 2 \dots n!).$$

*) Kronecker „Ueber einige Interpolationsformeln für ganze Functionen mehrer Variabeln“ Ges. Werke Bd. 1.

Um ebenso aus jeder der übrigen ν Gleichungen (10) ein System von $n!$ Gleichungen zu erhalten, haben wir den Coefficienten von $\delta_\alpha(z)$ in

$$(12) \quad \sum_{\gamma=1}^{n!} (-1)^{e_\gamma} D(y^{(\kappa)})_{S_\gamma} f_\gamma(z, C)$$

zu bestimmen. Nun ist $f_\gamma(z, C)$ die aus

$$f(z, C) = \sum_{\beta=1}^{n!} C_\beta \delta_\beta(z)$$

durch Anwendung der Substitution S_γ auf die Grössenreihe $z_1 \dots z_n$ hervorgehende Function, und $\delta_\beta(z)$ das aus $\delta(z)$ durch Anwendung von S_β hervorgehende Product. Durch Anwendung von S_γ auf $\delta_\beta(z)$ geht daher $\delta_\beta(z)$ über in $\delta_\alpha(z)$, wenn $S_\beta S_\gamma = S_\alpha$, also $S_\gamma = S_\beta^{-1} S_\alpha$ ist. Da alsdann $(-1)^{e_\gamma} = (-1)^{e_\beta + e_\alpha}$ ist, so folgt, dass der Coefficient von $\delta_\alpha(z)$ in (12) durch den Ausdruck:

$$(-1)^{e_\alpha} \sum_{\beta=1}^{n!} (-1)^{e_\beta} D(y^{(\kappa)})_{S_\beta^{-1} S_\alpha} \cdot C_\beta$$

dargestellt wird. Dieser Ausdruck muss somit gleich dem Coefficienten von $\delta_\alpha(z)$ in $f(z, C)$ sein, oder es muss

$$(13) \quad \Delta C_\alpha = (-1)^{e_\alpha} \sum_{\beta=1}^{n!} (-1)^{e_\beta} D(y^{(\kappa)})_{S_\beta^{-1} S_\alpha} \cdot C_\beta$$

$$(\alpha = 1, 2 \dots n!, \kappa = 1, 2 \dots \nu)$$

sein. Durch Elimination der Grössen C aus (11) und (13) ergibt sich endlich das System der $n! \nu$ Gleichungen:

$$(14) \quad \Delta \cdot \sum_{l=1}^{\nu} D(y^{(l)})_{S_\alpha} = \sum_{\beta=1}^{n!} D(y^{(\kappa)})_{S_\beta^{-1} S_\alpha} \sum_{l=1}^{\nu} D(y^{(l)})_S$$

$$(\alpha = 1, 2 \dots n!, \kappa = 1, 2 \dots \nu).$$

Besteht das System dieser Gleichungen, und denkt man sich alsdann die Grössen C aus (11) bestimmt, so besteht für diese Grössen auch das System der Gleichung (13). Daraus folgt, dass alsdann auch das System der Gleichungen (10) und mithin auch das der Gleichungen (1) besteht, sofern das Grössensystem $(y'_1 \dots, y'_n \dots y_1^{(\nu)} \dots y_n^{(\nu)})$ aus Lösungssystemen von (2) zusammengesetzt ist. Das in dem Satze des § 4 enthaltene Criterium für die Existenz eines Gruppenvielfachen kann daher durch das folgende ersetzt werden:

Damit ν Substitutionen $S_{\alpha_1} \dots S_{\alpha_\nu}$, welche ν Lösungssystemen $(y'_1 \dots y'_n) \dots (y_1^{(\nu)} \dots y_n^{(\nu)})$ des Systems der Gleichungen (2) entsprechen, ein Gruppenvielfaches bilden, ist nothwendig und hinreichend, dass das Grössensystem $(y'_1 \dots y'_n \dots y_1^{(\nu)} \dots y_n^{(\nu)})$ die Gleichungen (14) befriedigt.

§ 3.

Wir bezeichnen jetzt die linken Seiten der auf Null gebrachten Gleichungen (14) als Functionen der ν unbekannten Grössensysteme $(y'_1 \dots y'_n) \dots (y_1^{(\nu)} \dots y_n^{(\nu)})$ kurz durch $F_{\alpha, \kappa}(y', y' \dots y^{(\nu)})$, sodass also

$$(15) \quad F_{\alpha, \kappa}(y' \dots y^{(\nu)}) = \sum_{\beta=1}^{n!} D(y^{(k)})_{S_\beta^{-1} S_\alpha} \cdot \sum_{l=1}^{\nu} D(y^{(l)})_{S_\beta} - \Delta \sum_{l=1}^{\nu} D(y^{(l)})_{S_\alpha} \\ (\alpha = 1, 2 \dots n!, \kappa = 1, 2 \dots \nu)$$

wird. Ferner erweitern wir den Rationalitätsbereich durch Aufnahme zweier Systeme unbestimmter Constanten, von denen das eine aus ν Reihen von je n Grössen

$$k_1^{(\beta)}, k_2^{(\beta)} \dots k_n^{(\beta)} \\ (\beta = 1, 2 \dots \nu),$$

das andere aus $1 + n! \nu$ Grössen

$$u_0, u_1, \dots, u_{n! \nu}$$

bestehen soll. Sodann setzen wir:

$$(16) \quad l(y' \dots y^{(\nu)}) = \sum_{\beta=1}^{\nu} (k_1^{(\beta)} y_1^{(\beta)} + k_2^{(\beta)} y_2^{(\beta)} + \dots + k_n^{(\beta)} y_n^{(\beta)})$$

und, indem wir unter z eine neue Veränderliche verstehen:

$$(17) \quad L(z, y' \dots y^{(\nu)}) \\ = u_0 (z - l(y' \dots y^{(\nu)})) + \sum_{\alpha=1}^{n!} \sum_{\kappa=1}^{\nu} u_{(\kappa-1)n! + \alpha} F_{\alpha, \kappa}(y' \dots y^{(\nu)}).$$

Endlich setzen wir in $L(z, y' \dots y^{(\nu)})$ für jedes der ν Grössensysteme $(y'_1 \dots y'_n) \dots (y_1^{(\nu)} \dots y_n^{(\nu)})$ alle $n!$ Permutationen desselben Grössensystems $(y_1 \dots y_n)$ ein und bilden das Product aller so erhaltenen Ausdrücke. Dieses Product ist eine ganze Function von $z, y_1 \dots y_n$, die ausserdem symmetrisch in Beziehung auf $y_1 \dots y_n$ ist, sich also als rationale ganze Function von $g_1(y_1 \dots y_n) \dots g_n(y_1 \dots y_n)$ darstellen lässt. Wir bezeichnen diese Function daher durch $G^{(\nu)}(z, g(y))$, sodass

$$(18) \quad G^{(\nu)}(z, g(y)) = \prod_{(y' \dots y^{(\nu)})} L(z, y' \dots y^{(\nu)})$$

ist. Die Coefficienten dieser Function sind rationale ganze Functionen der Grössen x, κ, u , die den Rationalitätsbereich bilden. Da bei der Bildung der Functionen (15) und (18) nur die symmetrische Gruppe als bekannt vorausgesetzt wurde, so können diese Functionen als bekannt angesehen werden. Gleiches gilt daher auch von der Function:

$$(19) \quad G^{(v)}(z) = G^{(v)}(z, g(x))$$

die sich ergibt, wenn in $G(z, g(y))$ $y_1 = x_1 \dots y_n = x_n$ gesetzt wird. Diese Function verschwindet aber für $z = l(y' \dots y^{(v)})$, wenn $(y'_1 \dots y'_n \dots y_1^{(v)} \dots y_n^{(v)})$ ein aus Lösungssystemen von (2) zusammengesetztes Lösungssystem des Gleichungssystems (14) ist. Ist umgekehrt $z = X(x, \kappa)$ eine von den Grössen u unabhängige Wurzel der Gleichung

$$(20) \quad G^{(v)}(z) = 0,$$

so muss für ein gewisses aus Lösungssystemen von (2) zusammengesetztes Grössensystem $(y'_1 \dots y'_n \dots y_1^{(v)} \dots y_n^{(v)})$

$$L(X(x, \kappa), y' \dots y^{(v)}) = 0$$

werden. Für dieses Lösungssystem $(y'_1 \dots y'_n \dots y_1^{(v)} \dots y_n^{(v)})$ müssen daher die Coefficienten der Grössen u in (17) verschwinden, d. h. es müssen die Gleichungen $F_{\alpha, \kappa}(y' \dots y^{(v)}) = 0$ bestehen und es muss $X(x, \kappa) = l(y' \dots y^{(v)})$ sein. Die von den Grössen u unabhängigen Wurzeln der Gleichung (20) werden also von denjenigen Linearformen $l(y' \dots y^{(v)})$ gebildet, für welche $(y'_1 \dots y'_n \dots y_1^{(v)} \dots y_n^{(v)})$ ein aus Lösungssystemen des Gleichungssystems (2) zusammengesetztes Lösungssystem des Gleichungssystems (14) ist. *Entwickelt man daher die Function $G^{(v)}(z)$ nach Potenzen der Grössen u und bestimmt den grössten gemeinsamen Theiler $\Phi^{(v)}(z)$ der als Entwicklungscoefficienten auftretenden Functionen von z , so sind die Wurzeln der Gleichung $\Phi^{(v)}(z) = 0$ diejenigen Linearformen, welche Gruppenvielfachen v^{ter} Ordnung entsprechen.*

§ 4.

Die im vorigen Paragraphen definirte Function $\Phi^{(v)}(z)$ war dort als grösster gemeinsamer Theiler eines Systems ganzer Functionen von z definirt, das sich durch Entwicklung von $G^{(v)}(z)$ nach Potenzen der Grössen u ergibt. Diese Function $\Phi^{(v)}(z)$ ist aber zuf. § 3 auch ein Theiler der Function

$$(21) \quad H(z) = \prod_{(y' \dots y^{(v)})} (z - l(y' \dots y^{(v)}))$$

die sich ergibt, wenn man sich in

$$(z - l(y' \dots y^{(v)}))$$

für jedes der Grössensysteme $(y'_1 \dots y'_n) \dots (y^{(\nu)}_1 \dots y^{(\nu)}_n)$ alle Permutationen von $x_1 x_2 \dots x_n$ eingesetzt denkt und die so erhaltenen $n! \nu$ Ausdrücke mit einander multiplicirt. Die Coefficienten dieser Functionen sind symmetrische Functionen von $x_1 \dots x_n$ und als bekannt anzusehen. Dieselben enthalten ferner die Grössen u nicht. Die Function $\Phi^{(\nu)}(z)$ ist daher, abgesehen von einem dem Rationalitätsbereich angehörigen Factor, nichts anderes als der grösste gemeinsame Theiler der beiden Functionen $G^{(\nu)}(z)$ und $H(z)$. Damit ist nunmehr die Aufgabe

alle Gruppenvielfachen ν . Ordnung zu bestimmen

auf die Aufgabe zurückgeführt

den grössten gemeinsamen Theiler zweier als bekannt anzusehenden Functionen von z : $G^{(\nu)}(z)$ und $H(z)$ zu bestimmen und in seine Linearfactoren zu zerlegen.

Dabei ist, wie in der Einleitung gezeigt wurde, die Zerlegung in Linearfactoren durch Substitution specieller Werthe für z und die Grössen k unmittelbar zu erhalten. Wird $\nu = n!$ angenommen, so muss die Zerlegung dieses grössten gemeinsamen Theilers alle Gruppen n . Grades liefern, da die Ordnung einer jeden derselben ein Theiler von $n!$ ist. Damit sind wir zu dem in der Einleitung bezeichneten Resultat gelangt, dessen Ableitung das Ziel dieser Abhandlung war. Denn es ist die Aufgabe:

alle Gruppen n . Grades zu bestimmen

auf die algebraische Aufgabe zurückgeführt:

den grössten gemeinsamen Theiler zweier als bekannt anzusehenden Functionen von z : $G^{(n!)}(z)$ und $H(z)$ zu bestimmen und in seine Linearfactoren zu zerlegen.

Burg b. Magdeburg den 12. Nov. 1898.
