Neue Lösungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen.

A. Das Feld in der Umgebung eines langsam rotierenden kugelähnlichen Körpers von beliebiger Masse in 1. und 2. Annäherung.

Von

Rudolf Bach in Essen-Hügel.

I. Einleitung.

Von astronomischen Gesichtspunkten ausgehend, haben bereits 1918 J. Lense und H. Thirring[1]) für den Fall *unendlich kleiner* Masse und *langsamer* Rotation das Feld eines Zentralkörpers in 1. Annäherung bestimmt und den Einfluß der Rotation auf die Planetenbewegung untersucht. Sie bedienten sich bei der Ableitung der von Einstein[2]) entwickelten Gravitationswellenmethode. Im folgenden soll die Masse des Zentralkörpers beliebig bleiben, dagegen müssen wir uns in bezug auf die Rotationsgeschwindigkeit Beschränkung auf die Glieder 1. und 2. Ordnung auferlegen.

Wir gehen aus von der von Schwarzschild[3]) gegebenen Lösung für die Umgebung einer ruhenden Kugel, die wir unter Einführung der üblichen rein imaginären Koordinate $u = ict$ so schreiben:

$$(1) \qquad ds^2 = \frac{r-2m}{r} du^2 + \frac{r}{r-2m} dr^2 + r^2 d\varphi^2 + r^2 \sin^2\varphi \, d\vartheta^2 .$$

II. Formulierung des Problems.

Zwecks Feststellung der allgemeinen Form des Linienelements beachten wir zunächst, daß alle Koeffizienten desselben sowohl von der Zeit $x^{(1)}$ unabhängig sein müssen, da die Bewegung stationär sein soll, als auch

[1]) J. Lense und H. Thirring, Über den Einfluß der Eigenrotation der Zentralkörper usw., Phys. Zeitschr. (1918), S. 156–165.

[2]) Sitzungsberichte der Preuß. Ak. d. Wiss. (1918), S. 154–167.

[3]) Schwarzschild, Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. Sitzungsber. der Preuß. Ak. d. Wiss. (1916 I), S. 189–196.

von dem Azimut $x^{(2)}$ der Meridianebene, da die axiale Symmetrie durch die Rotation offenbar nicht gestört wird. Ferner steht fest, daß das *räumliche* Linienelement eines beliebigen nichteuklidischen R_3 auf die orthogonale Form gebracht werden kann, ebenso wie wir dies z. B. an dem Ausdruck (1) sehen. Da wir nur eine erste und zweite Näherung berechnen wollen, wird sich das Linienelement nur um kleine Glieder von (1) unterscheiden und deshalb auch die Koordinaten, die den räumlichen Bestandteil davon orthogonal machen, nur wenig von den für das statische Feld benutzten. Wir bezeichnen sie direkt wieder mit $x^{(2)} = \vartheta$, $x^{(3)} = r$, $x^{(4)} = \varphi$.

Es handelt sich nun noch um die Größen g_{12}, g_{13}, g_{14}. Da wir ausdrücklich eine Rotation, also eine Bewegung in der $x^{(2)}$-Richtung, annehmen, dürfen wir g_{12} nicht gleich Null setzen, es wird vielmehr als eine unendlich kleine Größe erster Ordnung eingeführt werden müssen. Dagegen zeigt der Erfolg, daß g_{13} und $g_{14} = 0$ vorausgesetzt werden dürfen. Wir setzen nun an:

$$ds^2 = \alpha\, du^2 + 2\,\omega\, du\, d\vartheta + \beta\, d\vartheta^2 + \gamma\, dr^2 + \delta\, d\varphi^2, \tag{2}$$

wo die Funktionen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \omega$ nur von r und φ abhängen. ω ist eine z. Z. rein imaginäre Größe, die bei konstantem r und φ der nicht näher definierten Rotationsgeschwindigkeit proportional ist. Die Ableitungen der unbekannten Funktionen nach $x^{(3)} = r$ und $x^{(4)} = \varphi$ bezeichnen wir mit angehängten unteren Indizes 3 bzw. 4, da eine Verwechslung mit den kovarianten Indizes der Tensoren nicht zu befürchten ist. Ferner setzen wir

$$\alpha\beta - \omega^2 \equiv \varDelta. \tag{3}$$

Wir haben dann zunächst für den Fundamentaltensor folgende Schemata:

$$g_{ik} = \begin{vmatrix} \alpha & \omega & 0 & 0 \\ \omega & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{vmatrix}; \qquad g^{il} = \begin{vmatrix} \beta/\varDelta & -\omega/\varDelta & 0 & 0 \\ -\omega/\varDelta & \alpha/\varDelta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\delta \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Ferner für den Pseudotensor

$$\Gamma_{i,kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k}\right): \tag{5}$$

$$\text{(6a)}\quad 2\cdot\Gamma_{1,ik} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\alpha_3 & -\alpha_4 \\ 0 & 0 & -\omega_3 & -\omega_4 \\ -\alpha_3 & -\omega_3 & 0 & 0 \\ -\alpha_4 & -\omega_4 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \qquad \text{(6b)}\quad 2\cdot\Gamma_{2,ik} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\omega_3 & -\omega_4 \\ 0 & 0 & -\beta_3 & -\beta_4 \\ -\omega_3 & -\beta_3 & 0 & 0 \\ -\omega_4 & -\beta_4 & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

$$2\cdot\Gamma_{3,ik}=\begin{vmatrix}\alpha_3 & \omega_3 & 0 & 0\\ \omega_3 & \beta_3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\gamma_3 & -\gamma_4\\ 0 & 0 & -\gamma_4 & +\delta_3\end{vmatrix}; \qquad (6\mathrm{d})\quad 2\cdot\Gamma_{4,ik}=\begin{vmatrix}\alpha_4 & \omega_4 & 0 & 0\\ \omega_4 & \beta_4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & +\gamma_4 & -\delta_3\\ 0 & 0 & -\delta_3 & -\delta_4\end{vmatrix}$$

Aus diesen Größen berechnet man die 21 Krümmungskomponenten nach der Formel

$$(7)\qquad R_{pq,ik}=\frac{\partial\Gamma_{p,qi}}{\partial x^k}-\frac{\partial\Gamma_{p,qk}}{\partial x^i}+g^{\alpha\beta}(\Gamma_{\alpha,pk}\Gamma_{\beta,qi}-\Gamma_{\alpha,pi}\Gamma_{\beta,qk}).$$

Man erhält

$$(8)\qquad 4R_{12,12}=\frac{\omega_3^2-\alpha_3\beta_3}{\gamma}+\frac{\omega_4^2-\alpha_4\beta_4}{\delta}.$$

$$(9)\qquad 4R_{13,13}=-2\alpha_{33}+\frac{\beta\alpha_3^2-2\omega\alpha_3\omega_3+\alpha\omega_3^2}{\Delta}+\frac{\delta\alpha_3\gamma_3-\gamma\alpha_4\gamma_4}{\gamma\delta}.$$

$R_{14,14}$ ergibt sich aus $R_{13,13}$ durch gleichzeitige Vertauschung von 3 mit 4 und γ mit δ. $R_{23,23}$ und $R_{24,24}$ ergeben sich aus diesen zwei Komponenten durch Vertauschung von α mit β.

$$(10)\qquad 4R_{34,34}=-2\gamma_{44}-2\delta_{33}+\frac{\gamma_4^2+\gamma_3\delta_3}{\gamma}+\frac{\delta_3^2+\gamma_4\delta_4}{\delta}.$$

$$(11)\qquad R_{14,23}=-2\omega_{34}+\frac{\alpha\beta_4\omega_3-\omega(\alpha_3\beta_4+\omega_3\omega_4)+\beta\alpha_3\omega_4}{\Delta}+\frac{\delta\omega_3\gamma_4+\gamma\omega_4\delta_3}{\gamma\delta}.$$

$R_{13,42}$ ergibt sich hieraus durch die Vertauschungen $(3, 4)$ und (γ, δ) und nachfolgende Umkehrung des Vorzeichens. $R_{12,34}$ ergibt sich daraus, daß es mit diesen letzten beiden Komponenten zusammen Null ausmachen muß.

$$(12)\qquad 4R_{13,14}=-2\alpha_{34}+\frac{\alpha\omega_3\omega_4-\omega(\alpha_4\omega_3+\alpha_3\omega_4)+\beta\alpha_3\alpha_4}{\Delta}+\frac{\delta\alpha_3\gamma_4+\gamma\alpha_4\delta_3}{\gamma\delta}.$$

Hieraus $R_{23,24}$ durch die Vertauschung (α, β).

$$(13)\qquad 4R_{31,32}=-2\omega_{33}+\frac{\alpha\beta_3\omega_3-\omega(\alpha_3\beta_3+\omega_3^2)+\beta\alpha_3\omega_3}{\Delta}+\frac{\delta\gamma_3\omega_3-\gamma\gamma_4\omega_4}{\gamma\delta}.$$

Hieraus $R_{41,42}$ durch die Vertauschungen $(3, 4)$ und (γ, δ).

Die acht übrigen $R_{pq,ik}$ sind Null.

Aus den $R_{pq,ik}$ bildet man nun endlich durch Benutzung der Formel

$$(14)\qquad R_{i\varkappa}=g^{\alpha\beta}R_{\alpha i,\varkappa\beta}$$

die Komponenten des Einsteinschen Tensors. Man erhält:

$$(15)\qquad 4R_{11}=\frac{2\alpha_{33}}{\gamma}+\frac{2\alpha_{44}}{\delta}+\frac{-\beta\alpha_3^2+\alpha\alpha_3\beta_3+2\omega\alpha_3\omega_3-2\alpha\omega_3^2}{\Delta\gamma}$$
$$+\frac{-\beta\alpha_4^2+\alpha\alpha_4\beta_4+2\omega\alpha_4\omega_4-2\alpha\omega_4^2}{\Delta\delta}+\frac{-\gamma^2\alpha_4\delta_4+\gamma\delta(\alpha_3\delta_3+\alpha_4\gamma_4)-\delta^2\alpha_3\gamma_3}{\gamma^2\delta^2}.$$

Hieraus R_{22} durch die Vertauschung (α, β).

$$(16)\quad 4R_{33} = \frac{2\gamma_{44}}{\delta} + \frac{2\delta_{33}}{\delta} + \frac{2\beta\alpha_{33} - 4\omega\omega_{33} + 2\alpha\beta_{33}}{\Delta} - \frac{\gamma_3\delta_3 + \gamma_4^2}{\gamma\delta} - \frac{\gamma_4\delta_4 + \delta_3^2}{\delta^2}$$
$$+ \frac{-\alpha\beta_3\gamma_3 + 2\omega\gamma_3\omega_3 - \beta\alpha_3\gamma_3}{\Delta\gamma} + \frac{\alpha\beta_4\gamma_4 - 2\omega\gamma_4\omega_4 + \beta\alpha_4\gamma_4}{\Delta\delta}$$
$$+ \frac{1}{\Delta^2}\cdot[-\alpha^2\beta_3^2 - 2\alpha\beta\omega_3^2 - \beta^2\alpha_3^2 + 4\alpha\omega\beta_3\omega_3 + 4\beta\omega\alpha_3\omega_3 - 2\omega^2(\alpha_3\beta_3 + \omega_3^2)].$$

Hieraus R_{44} durch die Vertauschungen $(3, 4)$ und (γ, δ).

$$(17)\quad 4R_{12} = \frac{2\omega_{33}}{\gamma} + \frac{2\omega_{44}}{\delta} + \frac{-\alpha\beta_3\omega_3 + 2\omega\alpha_3\beta_3 - \beta\alpha_3\omega_3}{\Delta\gamma}$$
$$+ \frac{-\alpha\beta_4\omega_4 + 2\omega\alpha_4\beta_4 - \beta\alpha_4\omega_4}{\Delta\delta} + \frac{-\gamma^2\delta_4\omega_4 + \gamma\delta(\delta_3\omega_3 + \gamma_4\omega_4) - \delta^2\gamma_3\omega_3}{\gamma^2\delta^2}.$$

$$(18)\quad 4R_{34} = \frac{2\beta\alpha_{34} + 2\alpha\beta_{34} - 4\omega\omega_{34}}{\Delta} + \frac{-\alpha\beta_3\gamma_4 - \beta\alpha_3\gamma_4 + 2\omega\omega_3\gamma_4}{\Delta\gamma}$$
$$+ \frac{-\alpha\beta_4\gamma_3 - \beta\alpha_4\delta_3 + 2\omega\omega_4\delta_3}{\Delta\delta} + \frac{1}{\Delta^2}[-\alpha^2\beta_3\beta_4 - \beta^2\alpha_3\alpha_4 - 2\alpha\beta\omega_3\omega_4$$
$$+ 2\alpha\omega(\beta_4\omega_3 + \beta_3\omega_4) + 2\beta\omega(\alpha_3\omega_4 + \alpha_4\omega_3) - \omega^2(\alpha_3\beta_4 + \alpha_4\beta_3 + 2\omega_3\omega_4)].$$

Die vier übrigen R_{ik} sind Null.

In den Ausdrücken ist die Kleinheit der Größe ω noch nicht berücksichtigt. Zunächst stellen wir nochmals die für $\omega = 0$ geltenden statischen Werte der Unbekannten zusammen:

$$(19)\quad \omega_0 = 0,\quad \alpha_0 = \frac{r - 2m}{r},\quad \beta_0 = r^2 \sin^2\varphi,\quad \gamma_0 = \frac{r}{r - 2m},\quad \delta_0 = r^2.$$

Diese Ausdrücke betrachten wir als *nullte* Annäherung. Die *prinzipielle* Hauptschwierigkeit besteht darin, über diese hinaus zu einer *ersten* Näherung zu kommen, was im folgenden Abschnitt erledigt wird. Die Aufstellung der *zweiten* Näherung bietet, wenn der allgemeine Gesichtspunkt erst gefunden ist, nur *rechnerische* Schwierigkeiten.

III. Erste Näherungswerte der Integrale.

Bei Betrachtung der Differentialgleichungen zeigt sich folgendes als der Punkt, an dem die Integration ansetzen kann: Bei der Potenzentwicklung der Größen R_{ik} nach Potenzen der unendlich kleinen Größen erster Ordnung ω, ω_3, ω_4 usw. ist jedes folgende Glied um zwei Größenordnungen kleiner als das vorhergehende, und zwar kommen in R_{12} nur die Größen ungerader Ordnung vor, in den übrigen Komponenten nur die von gerader Ordnung. Eine erste Annäherung erhält man also, wenn man die Glieder zweiter und höherer Ordnung streicht, in höchst einfacher Weise. Zunächst ist:

$$(20)\qquad \alpha_1 = \alpha_0,\quad \beta_1 = \beta_0,\quad \gamma_1 = \gamma_0,\quad \delta_1 = \delta_0,$$

wozu noch für ω aus $R_{12} = 0$ eine lineare Differentialgleichung folgt, die nach Einsetzen der Werte (20), (19) lautet:

$$\frac{r-2m}{r}\cdot\omega_{33} + \frac{1}{r^2}\cdot\omega_{44} - \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{r^2}\cdot\omega_4 + \frac{4m}{r^3}\cdot\omega = 0. \tag{21}$$

Diese Gleichung hat leicht auffindbare Integrale von der Form $f(r)\cdot g(\varphi)$, da aber unser rotierender Körper als möglichst einfaches, kugelähnliches Gebilde, nicht z. B. als Dipol oder noch komplizierter gedacht ist, kommt für uns nur die Lösung in Betracht, die in bezug auf die heliozentrische Poldistanz φ die denkbar einfachste Abhängigkeit zeigt und für $\varphi = 0$ verschwindet. Wir geben diese Lösung, da sie überraschend einfach ist, ausnahmsweise in einer Form, die nicht nur für den Außenraum, sondern allgemeiner für den leeren Raum zwischen zwei einander einschließenden Massenschalen gilt:

$$\omega = \left(\frac{\varepsilon}{r} + \varepsilon^* r^2\right)\sin^2\varphi. \quad (\varepsilon,\ \varepsilon^* \text{ unendlich kleine Konstanten.}) \tag{22}$$

Für die weitere Bearbeitung setzen wir aber sofort wieder $\varepsilon^* = 0$. *Dann wird also in großer Entfernung die Wirkung der Rotation unendlich klein*, ein erstes, durchaus befriedigendes Resultat. Wir haben also als *erste Näherung* gefunden:

$$\underline{ds^2 = \frac{r-2m}{r}du^2 + \frac{2\varepsilon\sin^2\varphi}{r}du\,d\vartheta + \frac{\cdot}{r-2m}dr^2 + r^2 d\varphi^2 + r^2\sin^2\varphi\, d\vartheta^2.} \tag{23}$$

Den Wert der Konstanten ε bestimmen wir durch Vergleich mit dem von Lense und Thirring (l. c.) gefundenen Resultat. Formt man das dortige Linienelement auf Polarkoordinaten um, so kommt:

$$\begin{aligned} ds^2 = \frac{r-2kM}{r}du^2 + \frac{8ikMl^2\omega\sin^2\varphi}{5r}du\,d\vartheta \\ + \frac{r+2kM}{r}(dr^2 + r^2 d\varphi^2 + r^2\sin^2\varphi\, d\vartheta^2). \end{aligned} \tag{24}$$

In dieser Formel ist k die Einsteinsche Gravitationskonstante, M die Masse, l der Radius und ω die Rotationsgeschwindigkeit des Zentralkörpers.

Durch die Substitution $r = r' - kM$ läßt sich volle Übereinstimmung mit (23) erzielen und der Vergleich gibt

$$\varepsilon = \frac{4}{5}ikMl^2\omega, \tag{25}$$

oder mit Einführung des Trägheitsmoments der Kugel

$$\varepsilon = 2ik\Theta\omega. \tag{25'}$$

Es wäre leicht, auf Grund dieser Lösung die Beeinflussung der Planetenbahnen durch die Rotation der Sonne zu berechnen. Wir wollen aber auf diesen Gegenstand nicht abschweifen und uns auf eine anschauliche Deutung des Einflusses von ε auf das Linienelement beschränken. Wir deuten zu diesem Behufe ϑ, r, φ als Polarkoordinaten eines Euklidischen Bildraums und t als die zugehörige Zeit einer Lorentzschen Welt. Als Bewegungstransformationen in dieser Welt sind solche anzusehen, die den Ausdruck

$$d\sigma^2 = dt^2 - r^2 \sin^2\varphi\, d\vartheta^2 - dr^2 - r^2\, d\varphi^2 \tag{26}$$

ungeändert lassen. Homogene lineare Transformationen dieser Art der *Koordinatendifferentiale allein* sind *lokale* Bewegungstransformationen, die im allgemeinen nicht integrabel sind. Wir suchen nun durch eine solche Lokaltransformation das Glied mit ε in (23) herauszuschaffen. Hierzu genügt eine Transformation in dt und $d\vartheta$ allein. Man sieht sofort ein, daß dieselbe die Form haben muß:

$$\left\{\begin{aligned} dt &= \operatorname{Cos}\alpha \cdot dt' + r \sin\varphi \cdot \operatorname{Sin}\alpha\, d\vartheta', \\ d\vartheta &= \frac{1}{r\sin\varphi} \cdot \operatorname{Sin}\alpha\, dt' + \operatorname{Cos}\alpha \cdot d\vartheta', \end{aligned}\right. \tag{27}$$

wo α eine Lokalkonstante ist. Da das wegzuschaffende Glied unendlich klein ist, kann man $\operatorname{Cos}\alpha$ durch 1 und $\operatorname{Sin}\alpha$ durch α ersetzen und findet leicht, daß (23) in die orthogonale Form (1) übergeht durch die Lokalbewegung

$$\left\{\begin{aligned} dt &= dt' + \frac{\varepsilon \sin^2\varphi}{2m}\, d\vartheta', \\ d\vartheta &= d\vartheta' + \frac{\varepsilon}{2mr^2}\, dt'. \end{aligned}\right. \tag{28}$$

(Die erste Formel ist nur integrabel, wenn man sich auf einem Kegel $\varphi = \text{konst.}$ hält, die zweite nur auf einer Kugel $r = \text{konst.}$, das ganze System also nur auf einem Parallelkreise.) *Die anschauliche Deutung des Ausdrucks* (25) *besteht also darin, daß auf einem Parallelkreise* (r, φ) *die Wirkung der Rotation des Zentralkörpers gleichkommt einer Rotation des Parallelkreises (des Äthers könnte man sagen), mit der nach außen hin stark abnehmenden, wegen* (25) *von m unabhängigen Winkelgeschwindigkeit* $\frac{\varepsilon}{2mr^2} = \frac{2l^2\omega}{5r^2}$. Es sei nochmals betont, daß man diesen Ausdruck nicht etwa nach r differentiieren darf, um aus dem so bestimmten „*Ätherwind*“ einen „*Ätherwirbel*“ abzuleiten. Für solche Betrachtungen kommt man mit linearen Transformationen wie (28) nicht aus. Merkwürdig ist, wenn man von „Ätherwind“ reden will, der „Mitführungskoeffizient“ $\frac{2}{5}$ an der Oberfläche.

Es sei nur noch betont, daß der „Ätherwind“ nur auf *bewegte*

Massenpunkte Kraftwirkungen ausübt, wie sich aus der Gleichung der geodätischen Linie leicht ergibt.

Für feinere Betrachtungen, insbesondere das Studium der durch den „Ätherwind" hervorgerufenen Kompressionen, Kräfte und Drücke ist aber eine Berechnung der zweiten Näherung unerläßlich, der wir uns jetzt zuwenden.

IV. Zweite Näherungswerte der Integrale.

A. Sechs inhomogene lineare partielle Differentialgleichungen.

Die Abweichungen der zweiten Näherungswerte von den ersten sind nach der Bemerkung am Anfang des Abschnitts III um zwei Größenordnungen kleiner als die ersten Näherungswerte. Wir setzen deshalb in die Gleichungen $R_{ik} = 0$ des Abschnitts II ein:

$$(29)\quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{r-2m}{r} + \varepsilon^2 \cdot a; \quad \beta = r^2 \sin^2\varphi + \varepsilon^2 \cdot b; \quad \gamma = \dfrac{r}{r-2m} + \varepsilon^2 \cdot c; \\ \delta = r^2 + \varepsilon^2 \cdot d; \quad \omega = \dfrac{\varepsilon \sin^2\varphi}{r} + \varepsilon^3 \cdot e. \end{cases}$$

Die Rechnung ist nun ziemlich langwierig, hat aber das Angenehme, daß sich nach ihrer Ausführung eine (durch den Impulssatz bedingte) Kontrolle bietet. Wir werden für die vier Unbekannten a, b, c, d fünf Gleichungen erhalten, die sich nicht nur auf vier, sondern auf drei reduzieren müssen, da in der Meridianebene eine Transformation von folgender Form willkürlich bleiben muß, die die erste Näherung ungeändert läßt:

$$(30)\qquad r = r_1 + \varepsilon^2 r_1 (r_1 - 2m)\frac{\partial \psi}{\partial r_1}, \qquad \varphi = \varphi_1 - \varepsilon^2 \frac{\partial \psi}{\partial \varphi_1},$$

wo ψ eine ganz beliebige Funktion von r_1 und φ_1 ist. Bei dieser Transformation gehen die Größen a, b, c, d, e in folgende über:

$$(31)\quad \begin{cases} a_1 = a + \dfrac{2m(r_1 - 2m)}{r_1}\dfrac{\partial \psi}{\partial r_1}; \\ b_1 = b + 2r_1^2 \cdot (r_1 - 2m)\sin^2\varphi_1 \dfrac{\partial \psi}{\partial r_1} - 2r_1^2 \sin\varphi_1 \cos\varphi_1 \dfrac{\partial \psi}{\partial \varphi_1}; \\ c_1 = c + \dfrac{2r_1(2r_1 - 3m)}{r_1 - 2m}\dfrac{\partial \psi}{\partial r_1} + 2r_1^2 \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial r_1^2}; \; d_1 = d + 2r_1^2(r_1 - 2m)\dfrac{\partial \psi}{\partial r_1} - 2r_1^2 \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi_1^2}; \\ e_1 = e - \dfrac{2\sin\varphi_1 \cos\varphi_1}{r_1}\dfrac{\partial \psi}{\partial \varphi_1} - \dfrac{(r_1 - 2m)\sin^2\varphi_1}{r_1}\dfrac{\partial \psi}{\partial r_1}. \end{cases}$$

Mit Einsetzung der Werte (29) nehmen nun die Krümmungskomponenten R_{ik} (Formeln (15) bis (18)) nach Division durch ε^2 bzw. ε^3 folgende Werte an:

$$(32)\quad \frac{R_{11}}{\varepsilon^2} = \frac{r-2m}{2r} a_{33} + \frac{1}{2r^2} a_{44} + \frac{2r-5m}{2r^2} a_3 + \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{r^2} a_4 + \frac{m^2}{r^3(r-2m)} a$$
$$+ \frac{m(r-2m)}{2r^5 \sin^2\varphi} b_3 - \frac{m(r-2m)}{r^6 \sin^2\varphi} b - \frac{m(r-2m)^2}{2r^4} c_3 - \frac{m^2(r-2m)}{r^5} c$$
$$+ \frac{m(r-2m)}{2r^5} d_3 - \frac{m(r-2m)}{r^6} d - \frac{(r-2m)\sin^2\varphi}{2r^7} - \frac{2\cos^2\varphi}{r^6} - \frac{m^2\sin^2\varphi}{r^7(r-2m)}.$$

$$(33)\quad \frac{R_{22}}{\varepsilon^2} = \frac{r\sin^2\varphi}{2} a_3 + \frac{r\sin\varphi\cos\varphi}{2(r-2m)} a_4 - \frac{m\sin^2\varphi}{r-2m} a + \frac{r-2m}{2r} b_{33} + \frac{1}{2r^2} b_{44}$$
$$- \frac{r-4m}{2r^2} b_3 - \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{r^2} b_4 + \left[\frac{r-2m}{r^3} + \frac{\operatorname{cotg}^2\varphi}{r^2}\right] b - \frac{(r-2m)^2\sin^2\varphi}{2r} c_3$$
$$+ \frac{(r-2m)\sin\varphi\cos\varphi}{2r} c_4 - \frac{(r-2m)(r+m)\sin^2\varphi}{r^2} c + \frac{(r-2m)\sin^2\varphi}{2r^2} d_3$$
$$- \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{2r^2} d_4 + \frac{2m\sin^2\varphi}{r^2} d - \frac{(5r-12m)\sin^4\varphi}{2r^4(r-2m)} - \frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{r^3(r-2m)}.$$

$$(34)\quad \frac{R_{33}}{\varepsilon^2} = \frac{r}{2(r-2m)} a_{33} - \frac{m}{2(r-2m)^2} a_3 + \frac{m(2r-3m)}{r(r-2m)^3} a + \frac{1}{2r^2\sin^2\varphi} b_{33}$$
$$- \frac{2r-5m}{2r^3(r-2m)\sin^2\varphi} b_3 + \frac{r-3m}{r^4(r-2m)\sin^2\varphi} b + \frac{1}{2r^2} c_{44} - \frac{2r-3m}{2r^2} c_3$$
$$+ \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2r^2} c_4 - \frac{m(2r-3m)}{r^3(r-2m)} c + \frac{1}{2r^2} d_{33} - \frac{2r-5m}{2r^3(r-2m)} d_3$$
$$+ \frac{r-3m}{r^4(r-2m)} d - \frac{(11r^2-36rm+30m^2)\sin^2\varphi}{2r^5(r-2m)^3}.$$

$$(35)\quad \frac{R_{44}}{\varepsilon^2} = \frac{r}{2(r-2m)} a_{44} + \frac{r}{2} a_3 - \frac{m}{r-2m} a + \frac{1}{2r^2\sin^2\varphi} b_{44} + \frac{r-2m}{2r^2\sin^2\varphi} b_3$$
$$- \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{r^2\sin^2\varphi} b_4 + \left[\frac{1}{r^2\sin^4\varphi} - \frac{r-2m}{r^3\sin^2\varphi}\right] b + \frac{r-2m}{2r} c_{44} - \frac{(r-2m)^2}{2r} c_3$$
$$- \frac{(r+m)(r-2m)}{r^2} c + \frac{r-2m}{2r} d_{33} - \frac{r-4m}{2r^2} d_3 - \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2r^2} d_4$$
$$+ \frac{r-2m}{r^3} d - \frac{1}{r^3(r-2m)} + \frac{(4r-3m)\sin^2\varphi}{r^4(r-2m)}.$$

$$(36)\quad \frac{R_{34}}{\varepsilon^2} = \frac{r}{2(r-2m)} a_{34} - \frac{r-m}{2(r-2m)^2} a_4 + \frac{1}{2r^2\sin^2\varphi} b_{34} - \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2r^2\sin^2\varphi} b_3$$
$$- \frac{1}{r^3\sin^2\varphi} b_4 + \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{r^3\sin^2\varphi} b - \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2r^2} d_3 + \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{r^3} d + \frac{(5r-9m)\sin\varphi\cos\varphi}{r^4(r-2m)^2}.$$

$$(37)\quad \frac{R_{12}}{\varepsilon^3} = \frac{r-2m}{2r} e_{33} + \frac{1}{2r^2} e_{44} - \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2r^2} e_4 + \frac{2m}{r^3} e + \frac{5\sin^2\varphi}{4r^2} a_3$$
$$+ \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{2r^2(r-2m)} a_4 - \frac{5m\sin^2\varphi}{2r^3(r-2m)} a + \frac{r+2m}{4r^5} b_3 - \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2r^5} b_4$$
$$+ \left[\frac{\operatorname{cotg}^2\varphi}{r^5} - \frac{r+2m}{2r^6}\right] b + \frac{(r-2m)^2\sin^2\varphi}{4r^4} c_3 + \frac{(r-2m)\sin\varphi\cos\varphi}{2r^4} c_4$$
$$- \frac{(r-2m)(2r-m)\sin^2\varphi}{2r^5} c - \frac{(r-2m)\sin^2\varphi}{4r^5} d_3 - \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{2r^5} d_4$$
$$+ \frac{(3r-2m)\sin^2\varphi}{2r^6} d + \frac{(r+3m)\sin^4\varphi}{2r^7(r-2m)} - \frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{r^6(r-2m)}.$$

Diese Ausdrücke sind wiederholt berechnet und kontrolliert worden. Es ist ja klar, daß man bei so komplizierten Ausdrücken, bevor man zur Integration schreitet, erst volle Sicherheit gewinnen muß, daß kein Fehler stehen geblieben ist. Eine weitere Kontrolle bot dann die Anwendung der Transformationen (30), (31).

B. Reduktion auf ein System von 5 + 5 + 1 + 1 gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Bei Betrachtung des Aufbaues der Ausdrücke (32) bis (37) bemerkt man folgendes: In den ersten fünf Ausdrücken tritt e nicht auf, man kann also die Gleichung $R_{12} = 0$ zur Bestimmung von e einstweilen zurückstellen und hat nur fünf Gleichungen für die vier Unbekannten a, b, c, d. An diesen Gleichungen fällt nun weiter auf, daß die Abhängigkeit von φ eine verhältnismäßig einfache zu sein scheint. Setzt man jetzt zunächst diese Abhängigkeit in Form einer Fourierschen Reihe an, so ergibt sich aus Symmetriegründen, daß in diesen Reihen die Sinusglieder verschwinden müssen. Wir wandeln aber die so verbleibende Kosinusreihe sofort in eine nach steigenden Potenzen von $\sin^2\varphi$ fortschreitende Reihe um, in der wir uns auf möglichst wenig Glieder zu beschränken bestrebt sein werden, da ja der rotierende Körper kugelähnlich sein soll. Man sieht leicht ein, daß man mindestens zwei Glieder der Reihe nehmen muß, da die „Störungsglieder" zweigliedrig sind (außer in R_{33} und R_{34}).

Wir machen deshalb folgenden Ansatz:

$$(38)\quad \begin{cases} a = a' + a'' \sin^2\varphi; \quad b = b' \sin^2\varphi + b'' \sin^4\varphi; \quad c = c' + c'' \sin^2\varphi; \\ \qquad d = d' + d'' \sin^2\varphi; \quad e = e' \sin^2\varphi + e'' \sin^4\varphi. \end{cases}$$

Setzt man dies ein, so findet man sofort, daß sich tatsächlich jede Gleichung streng in zwei spaltet, von denen die mit der höheren Potenz von $\sin^2\varphi$ behaftete nur die mit zwei Strichen versehenen Unbekannten enthält. Man hat also jetzt für die Integration folgendes Programm:

Zuerst sind fünf gewöhnliche Differentialgleichungen für die Funktionen a'', b'', c'', d'' zu integrieren, hierauf fünf ähnliche für a', b', c', d', in denen die a'', b'', c'', d'' mit als „Störungsglieder" auftreten. Sodann hat man noch eine Gleichung für e'' und zuletzt noch eine für e' zu integrieren.

Bevor wir dies tun, müssen wir erst noch die Wirkung der erlaubten Transformation (30) auf die neuen Unbekannten studieren. Wir spalten deshalb auch ψ in

$$(39)\qquad \psi = \psi' + \psi'' \sin^2\varphi$$

und finden durch Spaltung von (31):

$$
(40)\quad \begin{cases}
a_1' = a' + \dfrac{2m(r_1-2m)}{r_1}\psi_3'; & a_1'' = a'' + \dfrac{2m(r_1-2m)}{r_1}\psi_3''; \\
b_1' = b' + 2r_1^2(r_1-2m)\psi_3' - 4r_1^2\psi''; & b_1'' = b'' + 2r_1^2(r_1-2m)\psi_3'' + 4r_1^2\psi''; \\
c_1' = c' + \dfrac{2r_1(2r_1-3m)}{r_1-2m}\psi_3' + 2r_1^2\psi_{33}'; & c_1'' = c'' + \dfrac{2r_1(2r_1-3m)}{r_1-2m}\psi_3'' + 2r_1^2\psi_{33}''; \\
d_1' = d' + 2r_1^2(r_1-2m)\psi_3' - 4r_1^2\psi''; & d_1'' = d'' + 2r_1^2(r_1-2m)\psi_3'' + 8r_1^2\psi'' \\
e_1' = e' - \dfrac{4}{r_1}\psi'' - \dfrac{r_1-2m}{r_1}\psi_3'; & e_1'' = e'' + \dfrac{4}{r_1}\psi'' - \dfrac{r_1-2m}{r_1}\psi_3''.
\end{cases}
$$

Hierbei wird

$$
(41)\qquad \begin{cases}
r = r_1 + \varepsilon^2 r_1(r_1-2m)(\psi_3' + \psi_3''\sin^2\varphi_1); \\
\varphi = \varphi_1 - 2\varepsilon^2 \sin\varphi_1 \cos\varphi_1\, \psi''.
\end{cases}
$$

Geht man nun von der (zutreffenden) Vermutung aus, daß die Gleichungen durch rationale Funktionen von r erfüllt werden können, so zeigt (40), daß man dann stets ψ'' logarithmenfrei so bestimmen kann, daß die Differenz $b_1'' - d_1''$ einen beliebigen rationalen Wert erhält, z. B. den Wert Null. *Wenn es also überhaupt rationale Lösungen gibt, so gibt es sicher auch solche, bei denen $b'' = d''$ ist.* Diese nun wollen wir zuerst aufsuchen. Wir haben dann für die drei Unbekannten a'', b'', c'' fünf Differentialgleichungen. Wegen des ungleichmäßigen Auftretens des Nenners $(r-2m)$ führen wir aber erst noch statt c'' eine neue Unbekannte

$$
(42)\qquad c''' = c''\cdot(r-2m)
$$

ein und betrachten ferner statt R_{33} den Ausdruck $R_1^1 - R_3^3$. Die aus (32) bis (36) entspringenden Gleichungen lauten dann, wenn man sie mit passenden Potenzen von $(r-2m)$ und r multipliziert, bzw.:

$$
\begin{aligned}
(43)\quad & (r-2m)^2 a_{33}'' + (2r^2 - 9rm + 10m^2)\frac{a_3''}{r} - (6r^2 - 12rm - 2m^2)\frac{a''}{r^2} \\
& + (r-2m)^2\cdot\frac{2m b_3''}{r^4} - (r-2m)^2\cdot\frac{4m b''}{r^5} - (r-2m)^2\cdot\frac{m c_3'''}{r^3} \\
& + (r-2m)^2\cdot\frac{m c'''}{r^4} + \frac{3r^2 - 4rm - 6m^2}{r^6} = 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(44)\quad & (r-2m)a_3'' - (r+m)\frac{2a''}{r} + (r-2m)^2\frac{b_{33}''}{r^2} + (r-2m)\frac{2m b_3''}{r^3} \\
& - (r-2m)\frac{6b''}{r^3} - (r-2m)^2\frac{c_3'''}{r^2} - (3r^2 - 4rm - 4m^2)\frac{c'''}{r^3} \\
& + \frac{-3r + 12m}{r^5} = 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(45)\quad & (r-2m)\cdot 2a_3'' - (3r+2m)\frac{2a''}{r} - (r-2m)^2\frac{2b_{33}''}{r^2} + (r-2m)^2\frac{4b_3''}{r^3} \\
& - (r-2m)^2\frac{4b''}{r^4} + (r-2m)^2\frac{2c_3'''}{r^2} + (r^2 - rm - 2m^2)\frac{4c'''}{r^3} \\
& + \frac{14r - 12m}{r^5} = 0.
\end{aligned}
$$

$$(46)\quad (r-2m)a_3'' - (2r+m)\frac{2a''}{r} + (r-2m)^2\frac{b_{33}''}{r^2} + (r-2m)\frac{2mb_3''}{r^3}$$
$$-(r-2m)\frac{6b''}{r^3} - (r-2m)^2\frac{c_3'''}{r^2} - (5r^2-8rm-4m^2)\frac{c'''}{r^3}$$
$$+\frac{8r-6m}{r^5} = 0.$$

$$(47)\quad (r-2m)\cdot 2a_3'' - (r-m)\frac{2a''}{r} + (r-2m)^2\frac{2b_3''}{r^3} - (r-2m)^2\frac{4b''}{r^4}$$
$$-(r^2-3rm+2m^2)\frac{2c'''}{r^3} + \frac{10r-18m}{r^5} = 0.$$

Durch Subtraktion der Gleichung (46) von (44) kommt die von b'' freie Gleichung:

$$(48)\qquad 2a'' + (r-2m)\frac{2c'''}{r^2} + \frac{-11r+18m}{r^5} = 0.$$

Ebenso durch Subtraktion der mit $\frac{m}{r}$ multiplizierten Gleichung (47) von (43):

$$(49)\quad (r-2m)^2 a_{33}'' + (2r^2-11rm+14m^2)\frac{a_3''}{r} - (3r-7m)\frac{2a'''}{r}$$
$$-(r-2m)^2\cdot\frac{mc_3'''}{r^3} + (3r^2-10rm+8m^2)\frac{mc'''}{r^4}$$
$$+\frac{3r^2-14rm+12m^2}{r^6} = 0.$$

Hierauf subtrahiere man die mit $\frac{m}{r}$ multiplizierte Gleichung (48) von (49). Dann läßt sich eine Division durch $\left(1-\frac{2m}{r}\right)$ ausführen, und es kommt:

$$(50)\qquad (r-2m)ra_{33}'' + (2r-7m)a_3'' - 6a'' - (r-2m)\frac{mc_3'''}{r^2}$$
$$+(r-4m)\frac{mc'''}{r^3} + \frac{3r+3m}{r^5} = 0.$$

Schließlich muß man noch (48) nach r differentiieren, mit $\frac{m}{2}$ multiplizieren und zu (50) addieren. Dann erhält man *eine Differentialgleichung für a'' allein*:

$$(51)\quad (r-2m)ra_{33}'' + (2r-6m)a_3'' - 6a'' + \frac{3r^2+25rm-45m^2}{r^6} = 0.$$

Diese Gleichung zweiter Ordnung besitzt eine einparametrige Schar logarithmenfreier Integrale. Man bestätigt am besten durch Einsetzen, daß

$$(52)\qquad a'' = \frac{3}{4mr^3} + \frac{1}{4r^4} - \frac{3m}{2r^5} + \text{Const.}\,(r-2m)^2$$

ist. Die Konstante muß natürlich gleich Null gesetzt werden, da die

Wirkung der Rotation für $r = \infty$ nicht unendlich werden darf. Zu a'' liefert (48) den Wert

$$c''' = -\frac{3}{4\,m\,r^2} + \frac{15}{4\,r^3}. \tag{53}$$

Zur Bestimmung von b'' wählen wir zwecks Vermeidung von b''_{33} die Gleichung (47). Diese lautet nach Einsetzung von (52), (53) und wohlgelungener Division (es ist dies immer eine sehr angenehme Kontrolle) durch $2 \cdot \left(1 - \frac{2\,m}{r}\right)^2$:

$$r\,b''_3 - 2\,b'' = \frac{9}{4\,m\,r} + \frac{6}{r^2}. \tag{54}$$

Das im Unendlichen verschwindende Integral hiervon lautet

$$b'' = -\frac{3}{4\,m\,r} - \frac{3}{2\,r^2}. \tag{55}$$

Man überzeugt sich durch Einsetzen, daß die gefundenen Integrale die Gleichungen (43) bis (47) befriedigen. Hiermit ist der erste Punkt des Integrationsprogramms erledigt und die Lösung kontrolliert.

Was die Wirkung der erlaubten Transformation auf die nunmehr zu bestimmenden Funktionen a', b', c', d' betrifft, so lehrt (40), daß durch eine solche die Differenz $b' - d'$ (abweichend von $b'' - d''$) nicht geändert werden kann. Wohl aber kann ψ'_3 (vielleicht nicht ψ', was aber nichts schadet, da ψ' selbst in (40) und (41) nicht auftritt) logarithmenfrei so bestimmt werden, daß die Änderung einer der Größen b', d' oder a' einen beliebigen rationalen Wert annimmt. In der Hoffnung, daß sich auch für a', b', c', d' rationale Funktionen ergeben werden, können wir also annehmen, daß ψ_3 logarithmenfrei so bestimmt werden kann, daß z. B. $b' = 0$ wird. Dann ergibt sich aus $R_{34} = 0$ sofort, daß auch $d' = 0$ ist. Es sind also nur die zwei Funktionen a' und c' zu bestimmen. Durch eine ähnliche, aber etwas einfachere Rechnung wie oben, deren Unterdrückung gestattet sei. erhält man die im Unendlichen verschwindenden Lösungen:

$$a' = -\frac{1}{2\,m\,r^3} - \frac{1}{2\,r^4}, \qquad b' = 0; \qquad c' = \frac{3\,(r-m)}{2\,m\,r^2\,(r-2\,m)^2}; \qquad d' = 0. \tag{56}$$

Jetzt bleibt noch die Bestimmung von e aus $R_{12} = 0$ (Gleichung 37). Diese Gleichung spaltet sich mittels (38) zunächst in folgende:

$$\begin{aligned} &\frac{r-2\,m}{2\,r}\,e'_{33} - \frac{r-2\,m}{r^3}\,e' + \frac{4}{r^2}\,e'' + \frac{5}{4\,r^2}\,a'_3 - \frac{5\,m}{2\,r^3\,(r-2\,m)}\,a' + \frac{1}{r^2(r-2\,m)}\,a'' \\ &+ \frac{r+2\,m}{4\,r^5}\,b'_3 - \frac{r+2\,m}{2\,r^6}\,b' - \frac{1}{r^5}\,b'' + \frac{(r-2\,m)^2}{4\,r^4}\,c'_3 - \frac{(r-2\,m)\,(2\,r-m)}{2\,r^5}\,c' \\ &+ \frac{r-2\,m}{r^4}\,c'' - \frac{r-2\,m}{4\,r^5}\,d'_3 + \frac{3\,r-2\,m}{2\,r^6}\,d' - \frac{1}{r^5}\,d'' - \frac{1}{r^6\,(r-2\,m)} = 0. \end{aligned} \tag{57}$$

$$(58)\quad \frac{r-2m}{2r}e''_{33} - \frac{6r-2m}{r^3}e'' + \frac{5}{4r^2}a''_3 - \frac{2r+5m}{2r^3(r-2m)}a'' + \frac{r+2m}{4r^5}b''_3$$
$$+ \frac{r-2m}{2r^6}b'' + \frac{(r-2m)^2}{4r^4}c''_3 - \frac{(r-2m)(4r-m)}{2r^5}c'' - \frac{r-2m}{4r^5}d''_3$$
$$+ \frac{5r-2m}{2r^6}d'' + \frac{3r+3m}{2r^7(r-2m)} = 0.$$

Nach Einsetzung der Werte von a'', b'', c'', d'' geht (58) über in

$$(59)\quad \frac{r-2m}{2r}e''_{33} - \frac{6r-2m}{r^3}e'' - \frac{15}{4mr^6} - \frac{18}{r^7} + \frac{21m}{r^8} = 0.$$

Das in Betracht kommende Integral von (59) lautet

$$(60)\quad e'' = -\frac{5}{8m^2r^3} - \frac{5}{8mr^4} + \frac{3}{4r^5}.$$

Die Gleichung (57) wird nach Einsetzung und Division durch $\left(1-\frac{2m}{r}\right)$:

$$(61)\quad \frac{1}{2}e'_{33} - \frac{1}{r^2}e' - \frac{5}{2m^2r^5} - \frac{27}{4mr^6} = 0,$$

und ihr Integral:

$$(62)\quad e' = \frac{1}{2m^2r^3} + \frac{3}{4mr^4}.$$

C. Die Lösung.

Zusammenfassend haben wir für das Linienelementquadrat

$$(4)\quad d\tau^2 = \alpha\,du^2 + 2\,\omega\,du\,d\vartheta + \beta\,d\vartheta^2 + \gamma\,dr^2 + \delta\,d\varphi^2$$

zunächst folgende Ausdrücke der Koeffizienten gefunden:

$$(63)\quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{r-2m}{r} + \varepsilon^2\left\{\dfrac{-r-m}{2mr^4} + \dfrac{3r^2+rm-6m^2}{4mr^5}\sin^2\varphi\right\}; \\ \beta = r^2\sin^2\varphi + \varepsilon^2\sin^2\varphi\cdot\left\{0 + \dfrac{-3r-6m}{4mr^2}\sin^2\varphi\right\}; \\ \gamma = \dfrac{r}{r-2m} + \varepsilon^2\left\{\dfrac{3r-3m}{2mr^2(r-2m)^2} + \dfrac{-3r+15m}{4mr^3(r-2m)}\sin^2\varphi\right\}; \\ \delta = r^2 + \varepsilon^2\left\{0 + \dfrac{-3r-6m}{4mr^2}\sin^2\varphi\right\}; \\ \omega = \dfrac{\varepsilon\sin^2\varphi}{r} + \varepsilon^3\sin^2\varphi\cdot\left\{\dfrac{2r+3m}{4m^2r^4} + \dfrac{-5r^2-5rm+6m^2}{8m^2r^5}\sin^2\varphi\right\}, \end{cases}$$

Ausdrücke, die noch anderweitig etwas normiert werden können, da ja eine Transformation der Form (30) freigestellt ist. Wählt man z. B. in (39)

$$(64)\quad \psi'_3 = \frac{r+m}{4m^2r^3(r-2m)};\qquad \psi'' = \frac{r+m}{8m^2r^3},$$

so erhält man statt (63) die etwas einfacheren Ausdrücke:

$$(65)\quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{r-2m}{r} + \varepsilon^2 \cdot \dfrac{r+2m}{4mr^1}\sin^2\varphi; \\ \beta = r^2\sin^2\varphi + 0(!); \\ \gamma = \dfrac{r}{r-2m} + \varepsilon^2\left\{\dfrac{-1}{2m^2r(r-2m)} + \dfrac{2r-3m}{4m^2r^2(r-2m)}\sin^2\varphi\right\}; \\ \delta = r^2 + \varepsilon^2 \cdot \dfrac{r+m}{2m^2r}\sin^2\varphi; \\ \omega = \dfrac{\varepsilon\sin^2\varphi}{r} + \varepsilon^3\sin^2\varphi\left\{\dfrac{-1}{4m^2r^3} + \dfrac{r-2m}{8m^2r^4}\sin^2\varphi\right\}. \end{cases}$$

Mit diesen Werten lautet die Wurzel aus der Determinante $\Delta\delta\gamma$:

$$(66)\quad \begin{aligned} \sqrt{g} &= r^2\sin\varphi + \varepsilon^2\sin\varphi \cdot \left\{-\frac{1}{4m^2} + \frac{\sin^2\varphi}{2m^2}\right\} \\ &= r^2\sin\varphi - \varepsilon^2\frac{\sin\varphi\cos 2\varphi}{4m^2}. \end{aligned}$$

Auch die Werte (65) wurden durch direktes Einsetzen in die Differentialgleichungen kontrolliert.

Die Koordinatenwahl, die zu (65) führt, dürfte wegen $b = 0$ empfehlenswert sein. Doch wollen wir auch noch auf solche Koordinaten transformieren, für die $\sqrt{g_1} = r_1^2\sin\varphi_1$ wird. Um dies zu tun, beachten wir, daß sich $\sqrt{g}$ bei der Transformation (30) mit der Funktionaldeterminante von r, φ nach r_1, φ_1 multipliziert. Wir haben also zur Bestimmung von ψ die Gleichung:

$$(67)\quad r^2\sin\varphi \cdot \left[1 - \frac{\varepsilon^2\cos 2\varphi}{4m^2r^2}\right] \cdot \left[1 + \varepsilon^2\left\{\frac{\partial}{\partial r_1}\left(r_1(r_1-2m)\frac{\partial\psi}{\partial r_1}\right) - \frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi_1^2}\right\}\right] = r_1^2\sin\varphi_1,$$

in deren ersten Teil noch die Werte (30) einzusetzen sind. Dann kommt:

$$(68)\quad \frac{\partial}{\partial r_1}\left(r_1(r_1-2m)\frac{\partial\psi}{\partial r_1}\right) - \frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi_1^2} + 2(r_1-2m)\frac{\partial\psi}{\partial r_1} - \operatorname{cotg}\varphi_1\frac{\partial\psi}{\partial\varphi_1} = \frac{\cos 2\varphi_1}{4m^2r_1^2}.$$

Mittels (39) spaltet sich diese in zwei Gleichungen, in denen wir den Index 1 weglassen:

$$(69)\quad r(r-2m)\psi_{33}'' + (4r-6m)\psi_3'' + 6\psi'' = -\frac{1}{2m^2r^2};$$

$$(70)\quad r(r-2m)\psi_{33}' + (4r-6m)\psi_3' - 4\psi'' = +\frac{1}{4m^2r^2}.$$

(69) besitzt nur ein einziges rationales Integral:

$$(71)\quad \psi'' = \frac{-1}{8m^2r^2}.$$

Dagegen bleibt in ψ_3' (auf ψ' selbst kommt es nicht an) merkwürdigerweise *eine Konstante h willkürlich*:

$$\psi'_3 = \frac{-r+2hm}{4m^2r^3(r-2m)}. \tag{72}$$

Mit diesen ψ-Werten erhält man die dritte Form der Lösung:

$$\left\{\begin{aligned}
\alpha &= \frac{r-2m}{r} + \varepsilon^2 \left\{\frac{-r+2hm}{2mr^4} + \frac{3r-2m}{4mr^4}\sin^2\varphi\right\};\\
\beta &= r^2\sin^2\varphi + \varepsilon^2 \sin^2\varphi \cdot \left\{\frac{h}{mr} - \frac{1}{mr}\sin^2\varphi\right\};\\
\gamma &= \frac{r}{r-2m} + \varepsilon^2 \left\{\frac{(1-4h)r+6hm}{2mr^2(r-2m)^2} + \frac{3}{4mr^2(r-2m)}\sin^2\varphi\right\};\\
\delta &= r^2 + \varepsilon^2 \cdot \left\{\frac{h}{mr} - \frac{1}{2mr}\sin^2\varphi\right\};\\
\omega &= \frac{\varepsilon\sin^2\varphi}{r} + \varepsilon^3\sin^2\varphi \cdot \left\{\frac{r-hm}{2m^2r^4} + \frac{-5r+2m}{8m^2r^4}\sin^2\varphi\right\}.
\end{aligned}\right| \quad \sqrt{g} = r^2\sin\varphi. \tag{73}$$

Man kann schwanken, ob man für die willkürliche Konstante h den Wert 0 oder 1 vorziehen soll.

(Eingegangen am 26. Juli 1921.)