UNA DEFINIZIONE SINTETICA DELLE CURVE POLARI; (*)

Nota di **G. B. GUCCIA**, in Palermo.

Adunanza del 13 agosto 1893.

1. Siano nel piano: $[C]^k$ un sistema lineare di curve, d'ordine n e dimensione k; P un punto qualsiasi.

Qual'è il luogo dei punti in cui rette condotte da P hanno contatti d'ordine k con curve del sistema $[C]^k$?

Si indichi con Φ_P^k il luogo cercato e con μ_k il suo ordine.

a) Sia $k=1$. Poichè vi è una, ed una sola, retta uscente da P, la quale è ivi tangente ad una curva del fascio (C), ne segue che *la curva* Φ_P^1 *passa con un ramo pel punto* P. D'altra parte, una retta condotta ad arbitrio per P contiene, come è noto, $2(n-1)$ punti (diversi da P), in ciascuno dei quali essa è tangente ad una curva del fascio (C). Di qui s'inferisce che *il luogo* Φ_P^1 *è dell'ordine*:

$$(1) \qquad \mu_1 = 1 + 2(n-1) = 2n-1.$$

(*) Questa breve nota è estratta da un §, ancora inedito, delle *Ricerche sui sistemi lineari di curve algebriche piane, dotati di singolarità ordinarie*, una parte delle quali si è pubblicata in questi Rendiconti, t. VII, 1893, pp. 193-255. Così, mi riserbo di far conoscere più tardi le proprietà dei luoghi Φ_P^k e degl'inviluppi Ω_R^k qui considerati.

b) Sia $k > 1$. Si indichi con:

B un punto base semplice di un sistema lineare $[C]^i$ d'ordine n e dimensione i;

R' una retta condotta ad arbitrio per B;

ν'_i la classe della curva, $\Omega^i_{R'}$, inviluppo delle rette, le quali, nei nei punti di R', hanno contatti d'ordine i con curve del sistema $[C]^i$;

ξ_i il numero delle rette uscenti da B, ciascuna delle quali ha un contatto d'ordine $i+1$ con una curva di $[C]^i$.

Fra le curve del sistema $[C]^i$ ve ne è una, ed una sola, che ha in B un contatto d'ordine i con la retta R'. D'altra parte, la retta R' contiene $(i+1)(n-1-i)$ punti (*), in ciascuno dei quali essa ha un contatto d'ordine i con una curva di $[C]^i$. Di qui s'inferisce che l'inviluppo $\Omega^i_{R'}$ ha, nella retta R', una tangente multipla del grado:

$$(i+1)(n-1-i)+1=(i+1)(n-i)-i.$$

Tutte le curve di $[C]^i$ che passano per un punto qualsiasi Q della retta R' costituiscono un sistema lineare $[C]^{i-1}$, nel quale vi sono, per ipotesi, ξ_{i-1} curve, ciascuna delle quali ha in Q un contatto d'ordine i con una retta. Sono dunque in numero

$$(i+1)(n-i)-i+\xi_{i-1}$$

le tangenti che si possono condurre da Q alla curva $\Omega^i_{R'}$. Si ha quindi:

$$\nu'_i=\xi_{i-1}+(i+1)(n-i)-i. \qquad (2)$$

Ritorniamo al luogo cercato Φ^k_P relativo al sistema $[C]^k$.

Si conduca nel piano una trasversale arbitraria T. Per un punto qualunque α di questa retta passa una, ed una sola, curva del sistema $[C]^k$, la quale ha ivi un contatto d'ordine $k-1$ con la retta $P\alpha$. Questa curva incontrerà T in altri $n-1$ punti β. Reciproca-

(*) Intorno alla formola $(t+1)(n-t)$ cfr.: *Due proposizioni relative alle involuzioni di specie qualunque, dotate di singolarità ordinarie* (questi Rendiconti, t. VII, 1893, pp. 49-60), nota a piè della pagina 55.

mente: Si assuma ad arbitrio un punto β nella retta T. Tutte le curve di $[C]^k$, le quali passano per β costituiscono un sistema lineare $[C]^{k-1}$. Ora, le ν'_{k-1} rette uscenti da P e tangenti all'inviluppo Ω_T^{k-1} relativo al sistema $[C]^{k-1}$ incontreranno la retta T in altrettanti punti α. Cosi: a ciascun punto α corrispondono $n - 1$ punti β ed a ciascun punto β corrispondono ν'_{k-1} punti α. Vi saranno dunque (*) $n - 1 + \nu'_{k-1}$ punti α, ciascuno dei quali coinciderà con uno dei corrispondenti β. Poichè ognuna di queste coincidenze è un punto comune alla retta T e al luogo Φ_P^k, ne segue che:

$$\mu_k = n + \nu'_{k-1} - 1. \tag{3}$$

Una trasversale condotta ad arbitrio pel punto P contiene

$$(k + 1)(n - k)$$

punti (diversi da P), in ciascuno dei quali essa ha un contatto d'ordine k con una curva del sistema $[C]^k$. Essendo questi i soli punti in cui la trasversale incontra il luogo Φ_P^k, oltre il punto P, se ne conclude che il luogo medesimo avrà in P un punto multiplo del grado:

$$\mu_k - (k + 1)(n - k).$$

Si osservi, che una qualsiasi delle tangenti in P alla curva Φ_P^k è una retta che ha ivi un contatto d'ordine k con una curva del sistema $[C]^k$, val quanto dire un contatto d'ordine k con una curva del sistema minore $[C]^{k-1}$ dotato d'un punto base semplice in P. Si ha quindi:

$$\xi_{k-1} = \mu_k - (k + 1)(n - k); \tag{4}$$

(*) de Jonquières, *Théorèmes généraux concernant les courbes géométriques planes d'un ordre quelconque* (Journal de Mathématiques, 2e série, t. VI, 1861, pp. 113-136).—Cremona, *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane* (Mem. Acc. Bologna, XII$_1$, 1862), n° 83. — Riguardo al « principio di corrispondenza », fin qui esclusivamente attribuito a Chasles, rimandiamo il lettore alla recente ed interessante monografia del Segre: *Intorno alla storia del principio di corrispondenza e dei sistemi di curve* (Bibliotheca Mathematica, 1892, pp. 33-47).

e scrivendo $k-1$ in luogo di k:

$$\xi_{k-2} = \mu_{k-1} - k(n-k+1). \tag{5}$$

Ora, dalle (2) (per $i = k-1$), (3) e (5) ricaviamo la formola di ricorrenza:

$$\mu_k = \mu_{k-1} + n - k;$$

mediante la quale, in virtù della (1), si deduce:

$$\mu_k = \frac{(k+1)(2n-k)}{2}. \tag{6}$$

D'altra parte, dalle (4) e (6) si trae:

$$\xi_{k-1} = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Possiamo quindi enunciare la seguente proposizione:

Dato un sistema lineare d'ordine n e dimensione k, il luogo dei punti in cui rette uscenti da un punto fisso P hanno contatti d'ordine k con curve del sistema, è una curva, Φ^k_P, dell'ordine

$$\frac{(k+1)(2n-k)}{2},$$

la quale passa con

$$\frac{k(k+1)}{2}$$

rami pel punto P (*)

2. Suppongasi che il sistema $[C]^k$ sia tale rispetto al punto P, che, per ogni retta R condotta per P e per tutt'i valori successivi di l da 1 a k vi sia un sistema lineare $[C]^{k-l}$, contenuto in $[C]^{k-l+1}$,

---

(*) Per $k=1$ cfr. Cremona, *Introduz.*, etc., n° 85. Le curve Φ^k_P relative ai punti del piano costituiscono un sistema ∞^k, che è lineare per $k=1$. Delle curve Φ^1_P mi sono già servito nelle mie *Lezioni di Geometria superiore* (1889-90, litogr., pp. 155-162) per determinare, in varî casi di singolarità, l'abbassamento che subisce il numero dei punti doppi di un fascio.

la curva generica del quale abbia σ_l $(1 \leqq \sigma_1 < \sigma_2 < \ldots < \sigma_k \leqq n)$ delle sue intersezioni con R riunite in P.

In queste ipotesi come si comporterà il luogo Φ_P^k nel punto P?

In virtù di una proposizione dimostrata altrove (*), la retta R conterrà

$$(k+1)(n-k) - \left[\sum_{l=1}^{l=k} \sigma_l - \frac{k(k+1)}{2}\right]$$
$$= \frac{(k+1)(2n-k)}{2} - \sum_{l=1}^{l=k} \sigma_l$$

punti, in ciascuno dei quali la retta medesima ha con una curva del sistema $[C]^k$ un contatto d'ordine k. Poichè son questi i soli punti in cui la retta R incontra la curva Φ_P^k oltre il punto P, se ne conclude che

$$\frac{(k+1)(2n-k)}{2} - \left[\frac{(k+1)(2n-k)}{2} - \sum_{l=1}^{l=k} \sigma_l\right] = \sum_{l=1}^{l=k} \sigma_l$$

intersezioni di R e Φ_P^k coincideranno nel punto P. Epperò:

La curva Φ_P^k passa con

$$\sum_{l=1}^{l=k} \sigma_l$$

rami pel punto P.

3. Nelle ipotesi del n° precedente, si osservi, come sopra (n° 1), che una tangente in P alla curva Φ_P^k è una retta che ha in questo punto un contatto d'ordine k con una curva del sistema $[C]^k$, val quanto dire: un contatto d'ordine k con uno dei σ_1 rami di una curva del sistema minore $[C]^{k-1}$. Pertanto, ponendo:

$$k - 1 = t, \quad \sigma_1 = r, \quad \sigma_l = \rho_{l-1}, \quad (l = 2, 3, \ldots t-1)$$

abbiamo la proposizione seguente:

(*) *Due proposizioni*, etc., Lemma II.

Siano dati nel piano: un sistema lineare $[C]^t$ *ed un punto* P. *Suppongasi:*

1° *che il sistema* $[C]^t$ *abbia in* P *un punto base* (r)*-plo;*

2° *che, per ogni retta* R *uscente da* P, *e per tutt'i valori successivi di* i *da* 1 *a* t, *vi sia un sistema lineare* $[C]^{t-i}$, *contenuto in* $[C]^{t-i+1}$, *la curva generica del quale abbia* ρ_i *delle sue intersezioni con* R *riunite in* P; *dove:*

$$r < \rho_1 < \rho_2 < \ldots < \rho_t \leqq n.$$

In queste ipotesi vi saranno:

$$r + \sum_{i=1}^{i=t} \rho_i$$

rette uscenti da P, *ciascuna delle quali ha ivi un contatto d'ordine* $t+1$ *con uno degli* r *rami di una curva del sistema* $[C]^t$.

4. In particolare, il sistema $[C]^t$ sia dotato in P d'un punto base (r)-plo $(r \geqq t)$, i cui gruppi di tangenti alle singole curve costituiscano un'involuzione di grado r e specie t (che per semplicità supporremo non abbia raggi base). In questo caso il sistema $[C]^t$ non conterrà curve dotate in P d'un punto di moltiplicità $> r$ (*). Ma, condotta per P una retta arbitraria R, per tutt'i valori successivi di i da 1 a t vi sarà un sistema lineare $[C]^{t-i}$, contenuto in $[C]^{t-i+1}$, la cui curva generica passa pel punto P con r rami, uno dei quali ha ivi un contatto d'ordine i con la retta R. Talchè, ponendo nel teorema precedente $\rho_i = r + i$, si ha la proposizione:

Dato un sistema lineare ∞^t, *il quale possiede un punto base* (r)*-plo,* P $(r \geqq t)$, *i cui gruppi di tangenti alle singole curve costituiscono un'involuzione di grado* r *e specie* t *senza raggi base, vi sono:*

$$\frac{(t+1)(2r+t)}{2}$$

(*) *Ricerche*, etc., n° 12.

rette uscenti da P, ciascuna delle quali ha ivi un contatto d'ordine $t + 1$ con uno degli r rami di una curva del sistema (*).

5. Siano dati una curva C d'ordine n ed un punto qualsiasi P. Si indichi con:

R una retta scelta ad arbitrio nel piano;

φ_{n-l} $(l = 0, 1, 2, \ldots r - 1)$ un gruppo qualunque di $n - l$ rette uscenti dal punto P.

Le $r+1$ curve d'ordine n, linearmente indipendenti:

$$\varphi_n, \quad \varphi_{n-1} R, \ \ldots \ \varphi_{n-r+1} R^{r-1}, \ C$$

(dove R^j indica la retta R contata j volte) individueranno un sistema lineare, d'ordine n e dimensione r:

$$[\varphi_n, \quad \varphi_{n-1} R, \ \ldots \ \varphi_{n-r+1} R^{r-1}, \ C], \tag{7}$$

tale che: per tutt'i valori successivi di i da 1 ad r, il sistema ∞^{r-i}:

$$[\varphi_n, \quad \varphi_{n-1} R, \ \ldots \ \varphi_{n-r+i} R^{r-i}], \tag{8}$$

contenuto nel sistema ∞^{r-i+1}:

$$[\varphi_n, \quad \varphi_{n-1} R, \ \ldots \ \varphi_{n-r+i-1} R^{r-i+1}] \ (^{**}),$$

ha in P un punto base $(n - r + i)$-plo (***).

Poichè la curva generica del sistema (8) ha $n - r + i$ intersezioni riunite in P con ogni retta uscente da questo punto, ne segue (n[i] 1 e 2) che la curva Φ_P^r, luogo dei punti in cui rette condotte da P hanno contatti d'ordine r con curve del sistema (7), la

---

(*) Cfr. Doehlemann, *Ueber lineare Systeme in der Ebene und im Raum und über deren Jacobi'sche Curve beziehungsweise Jacobi'sche Fläche* (Math. Ann., XLI, 1893, pp. 545-570), p. 549.

(**) Per $i = 1$: contenuto nel sistema ∞^r (7).

(***) *Ricerche*, etc., Teorema I, *a*.

quale è dell'ordine

$$\frac{(r+1)(2n-r)}{2},$$

passerà con

$$\sum_{i=1}^{i=r}(n-r+i) = nr - \frac{r(r-1)}{2}$$

rami pel punto P.

Ora, egli è evidente che il luogo Φ_P^r sarà composto delle

$$\sum_{l=0}^{l=r-1}(n-l) = nr - \frac{r(r-1)}{2}$$

rette uscenti da P, che costituiscono i gruppi φ_n, φ_{n-1}, ... φ_{n-r+1}, e di una curva residuale, d'ordine

$$\frac{(r+1)(2n-r)}{2} - \left[nr - \frac{r(r-1)}{2}\right] = n - r,$$

la quale non passa, in generale, pel punto P.

Dico che quest'ultima curva (che indicherò con C_P^r) è la $(r)^{ma}$ polare del punto P rispetto alla curva data C.

A tal uopo è mestieri dimostrare: *a*) che, per $r = 1$, la curva C_P^1 coincide con la prima polare di P rispetto a C; *b*) che, per $r = 2, 3, \ldots$, la curva C_P^r coincide con la prima polare di P rispetto a C_P^{r-1}.

a) In virtù della sua definizione, il luogo Φ_P^1 passerà per gli $n(n-1)$ punti di contatto delle tangenti condotte da P alla curva C. Questi punti, non potendo trovarsi sulle rette dei gruppi φ_n, φ_{n-1}, ... φ_{n-r+1} (i quali, per ipotesi, sono stati assunti ad arbitrio) si troveranno tutti necessariamente sulla curva C_P^1. Ora, siccome per gli $n(n-1)$ punti comuni a due curve d'ordini n ed $n-1$ non può passare un'altra curva d'ordine $n-1$, così si conclude senz'altro che la curva C_P^1 coincide colla prima polare di P rispetto a C.

b) Sia Q il punto di contatto di una tangente condotta da P alla curva C_P^{r-1}. Il sistema ∞^{r-1}

$$[\varphi_n, \varphi_{n-1} R, \ldots \varphi_{n-r+2} R^{r-2}, C]$$

conterrà una curva, la quale avrà in Q un contatto d'ordine r con la retta PQ. Ma quest'ultimo sistema è contenuto nel sistema ∞^r (7); dunque: il punto Q apparterrà anche alla curva C_P^r. Ora, poichè la curva C_P^r (d'ordine $n-r$) passa per gli $(n-r)(n-r+1)$ punti di contatto delle tangenti condotte da P alla curva C_P^{r-1} (d'ordine $n-r+1$), ne segue, come sopra (a), che essa è la prima polare di P rispetto a C_P^{r-1}.

Si ha quindi la seguente proposizione:

Siano dati: una curva fondamentale C, d'ordine n, ed un polo qualsiasi P. Indicando con:

R una retta scelta ad arbitrio nel piano;

φ_{n-l} $(l=0, 1, 2, \ldots r-1)$ un gruppo qualunque di $n-l$ rette uscenti da P;

allora: la $(r)^{\text{ma}}$ polare di P rispetto a C è la curva (d'ordine $n-r$) che, insieme ai gruppi di rette

$$\varphi_n, \quad \varphi_{n-1}, \ \ldots \ \varphi_{n-r+1},$$

costituisce il luogo dei punti in cui rette condotte da P hanno contatti d'ordine r con curve del sistema lineare (d'ordine n e dimensione r) determinato dalle $r+1$ curve:

$$\varphi_n, \quad \varphi_{n-1} R, \ \ldots \ \varphi_{n-r+1} R^{r-1}, \ C$$

(dove R^j indica la retta R contata j volte).

In particolare, per $r=1$:

La prima polare di un punto P rispetto ad una curva C, d'ordine n, è la curva (d'ordine $n-1$) che, insieme ad un gruppo qualsiasi, φ_n, di n rette uscenti da P, costituisce il luogo dei punti di contatto delle tangenti condotte da P alle curve del fascio (φ_n, C) (*).

(*) È mio debito far conoscere che il prof. Cremona, al quale avevo comunicato il superiore teorema, mi scriveva, in data del 28 agosto 1893, di essergli già noto pel caso particolare $r=1$.

6. Un teorema affatto analogo si ha, nello spazio, per le superficie polari di un punto rispetto ad una superficie data. D'altra parte, segando il sistema lineare (7) con una retta condotta pel punto P si ritrova, nel campo binario, la definizione data dal sig. Kohn pei centri armonici di grado $n - r$ (*).

Palermo, settembre 1893.

G. B. Guccia.

(*) G. Kohn, *Zur Theorie der harmonischen Mittelpunkte* (Sitzb. der k. Akad. der Wissensch. zu Wien, II. Abth., Juli-Heft, 1883), n° 8 (ponendo ivi $n - r$ in luogo di r).