

II. *Ueber die Krystallisation des Adulars, nebst einigen allgemeinen Bemerkungen über das zwei und eingliedrige System; von A. T. Kupffer, Professor in Kasan.*

I.

Der Feldspath gehört zu denjenigen Mineraliengattungen, deren Krystallisation am sorgfältigsten und von den ausgezeichnetsten Krystallographen studirt worden ist; und wir sind in der That schon so weit gekommen, daßs niemand mehr an der Nothwendigkeit, ihn in mehrere Gattungen theilen zu müssen, zweifelt. Die Formen dieser verschiedenen Gattungen sind nicht nur in ihren Winkeln, sondern auch in Hinsicht der Vertheilung ihrer Flächen so sehr von einander abweichend, daßs ihre Unterscheidung auch ohne genaue Winkelmessung möglich ist; und so konnte es geschehen, daßs nach unumstößlicher Festsetzung der Species dennoch die genauere Bestimmung der Krystallform noch zu wünschen übrig blieb. Dieses Schicksal hat besonders den Adular getroffen; wir wissen ihn vollkommen von den übrigen Feldspathen zu unterscheiden. Aber da die hintere Zuschärfungsfläche x (Fig. 2. Taf. IV.) seiner rhombischen Säule fast nie glänzend ist, so besitzen wir keine Messung, aus der man die Neigung dieser Fläche gegen die Axe ableiten könnte, und es ist uns unbekannt, ob sie eben so gegen die Axe geneigt ist, wie die Fläche P , oder nicht, ob mithin die Grundform des Adulars ein grades oder ein schiefes Rhombenoctaëder ist.

Einige kleine und wohlgebildete Krystalle aus Tyrol haben mich in den Stand gesetzt, diese Frage zu entscheiden. Ich fand durchgehends die Neigung von x gegen die Axe größer als die Neigung von P gegen die

Axe, wie aus folgenden Messungen mit dem Reflexionsgoniometer hervorgeht.

Die Flächen P und T waren sehr glänzend, einige Bilder waren vorzüglich schön, andere sehr schwach; wo sich Doppelbilder zeigten, wurden die Messungen verworfen. Die Fläche x gab im Allgemeinen ein deutliches Bild, sehr oft aber Doppelbilder, die jedoch nie mehr als um $10'$ von einander entfernt waren.

Neigung von T zu T , Mittel aus 3 Messungen *), deren grösste Differenz $1'5$ betrug	118° 48'6 **)
Neigung von T zu P , Mittel aus 5 Messungen, deren grösste Differenz $3'8$ betrug	112 16,0 ***)
Neigung von x zu T , Mittel aus 2 Messungen	110 40 $\frac{1}{4}$
Neigung von x zu P , Mittel aus 2 Messungen	129 40,8

Diese Messungen sind zwar als diejenigen, die am besten unter einander stimmen, aus mehreren ausgesucht, von denen einige um $10'$ von einander abweichen; aber der Unterschied von x zu T und von P zu T ist zu groß, als daß ein Beobachtungsfehler an demselben Schuld seyn könnte.

Bezeichnet man die Neigung von T zu P mit G , die halbe Neigung von T zu T mit F , die Neigung von P gegen die Axe mit g , so ist

$$\cos g = \frac{\cos G}{\sin F}$$

*) Ich verstehe hier unter jeder Messung das Resultat von 10 bis 12 Repetitionen an demselben Flächenpaar; drei Messungen erfordern also 3 Reihen von Werthen, an drei verschiedenen Flächenpaaren beobachtet.

**) Mohs fand 118° 52'; G. Rose aber 119° 18'.

***) G. Rose fand 112° 14'.

und man findet g , oder die Neigung von P
 gegen die Axe, gleich $63^\circ 53',0$
 Eben so findet man die Neigung von x gegen
 die Axe $65^\circ 47,3$

Die Summe dieser beiden Winkel weicht nur um $\frac{1}{2}'$
 von dem beobachteten Werth der Neigung von $x:P$ ab.

Ich habe mich durch mehrere Messungen überzeugt,
 dafs die Fläche P auf die vordere Seitenkante *grade*
 aufgesetzt ist.

Die Grundform des Feldspaths ist also ein schiefes
 Rhombenoctaëder, dessen vordere und hintere Endkante
 um $63^\circ 53'$ und $65^\circ 47,3$ gegen die verticale Axe ge-
 neigt sind, und dessen Basiskanten so liegen, dafs ihre
 mit der verticalen Axe parallele Abstumpfungsflächen einen
 Winkel von $118^\circ 48,6$ mit einander machen.

Die übrigen Winkel kann man leicht durch folgende
 allgemeine Formeln für das schiefe Rhombenoctaëder
 finden.

A. Winkel an der Grundform

bezeichnet man die Neigungen der vordern und hintern
 Endkante eines schiefen Rhombenoctaëders mit r und r_1 ;
 die Neigung der Axe a gegen die Axe c aber mit α^*),
 so ist bekanntlich

$$(1) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \sin r \sin r_1}{\sin(r_1 - r)}$$

Legt man ferner Ebenen durch je zwei und zwei
 Axen, so bilden diese Ebenen mit den Octaëderflächen
 und mit den Säulenflächen verschiedene dreikantige Ecken,
 bei denen grösstentheils eine Neigung $= 90^\circ$ ist, und

*) Hier ist nämlich, wie immer, c die verticale Halbaxe des schiefen Rhombenoctaëders, b diejenige halbe Diagonale der Basis, die mit c einen rechten Winkel macht, und a diejenige, welche mit c einen schiefen Winkel macht. Man stellt dasjenige a nach vorn, welches herabwärts geneigt ist; das hintere a bezeichnet man mit a' ; α ist der scharfe Winkel zwischen der Axe a' und c .

deren ebene und Kantenwinkel wie die Seiten und Winkel eines rechtwinklichen sphärischen Dreiecks zusammenhängen. Man erhält so folgende aus der sphärischen Trigonometrie hinlänglich bekannte Formeln, in welchen g die halbe Neigung der vorderen Säulenflächen, γ die halbe Neigung der vordern Basiskante des schiefen Rhombenoctaëders, B und B_1 die Neigung der Octaëderflächen an der vordern und hintern Endkante, D und D_1 die Neigungen der vordern und hintern Octaëderflächen gegen die Basis, C und C_1 die Neigungen der vordern und hintern Octaëderflächen gegen eine durch die Axe b , c gelegte Ebene, und endlich r' die Neigung der Seitenendkante gegen die Axe bedeutet.

$$\begin{array}{ll}
 (2) \quad \operatorname{tg} \gamma = \sin \alpha \operatorname{tg} g & (6) \quad \operatorname{tg} D_1 = \frac{\operatorname{tg}(\alpha + r_1)}{\sin \gamma} \\
 (3) \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} B = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\sin(\alpha - r)} & (7) \quad \cos C = \sin \frac{1}{2} B \cos r \\
 (4) \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} B_1 = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\sin(\alpha + r_1)} & (8) \quad \cos C_1 = \sin \frac{1}{2} B_1 \cos r_1 \\
 (5) \quad \operatorname{tg} D = \frac{\operatorname{tg}(\alpha - r)}{\sin \gamma} & (9) \quad \sin r' = \frac{\operatorname{tg} r}{\operatorname{tg} C}
 \end{array}$$

Aus (1) findet man, indem man $r = 63^\circ 53',0$ und $r_1 = 65^\circ 47',3$ setzt:

$$\alpha = 88^\circ 50',2.$$

Ferner aus (2), da $g = 59^\circ 24',3$

$$\gamma = 59^\circ 24',0.$$

Und so fort gerechnet:

$$\begin{array}{ll}
 \frac{1}{2} B = 75^\circ 59',4 & C = 64^\circ 43',0 \\
 \frac{1}{2} B_1 = 75^\circ 46',7 & C_1 = 66^\circ 43',5 \\
 D = 28^\circ 23',8 & r' = 74^\circ 28',0 \\
 D_1 = 28^\circ 51',4 &
 \end{array}$$

B. Neigungen der secundären Flächen.

Die am Adular vorkommenden Flächen sind nach der Weissischen Bezeichnungsart (siehe dessen Abhandlung über mehrere neu beobachtete Krystallflächen des Feldspaths etc., in den Schriften der Berliner Aca-

demie für 1820 und 21), aus der auch die Figuren 1. 2. 3. 4. Taf. IV. entnommen sind folgende:

$$\begin{array}{ll}
 T = [a:b:\infty c] & g = [\infty a:b:c] \\
 M = [\infty a:b:\infty c] & o = [a':\frac{1}{2}b:c] \\
 z = [3a:b:\infty c] & s = [a':\frac{1}{6}b:c] \\
 k = [a:\infty b:\infty c] & n = [a:\frac{1}{4}b:c] \\
 P = [a:\infty b:c] & i = [a:\frac{1}{12}b:c] \\
 x = [a':\infty b:c] & h = [a:\frac{3}{4}b:c] \\
 y = [\frac{1}{3}a':\infty b:c] & m = [\frac{1}{3}a:\frac{1}{2}b:c] \\
 q = [3a':\infty b:c] & u = [\frac{1}{3}a':\frac{1}{4}b:c] \\
 r = [\frac{3}{5}a':\infty b:c] & v = [\frac{1}{3}a':\frac{1}{8}b:c] \\
 t = [\frac{1}{5}a:\infty b:c] & d = [\frac{1}{5}a:\frac{1}{8}b:c]
 \end{array}$$

Weifs hat diesen Zeichen rechtwinkliche Axen zum Grunde gelegt; wir haben aber oben gesehen, daß die Halbaxe a mit der Halbaxe c einen schiefen Winkel macht, welches übrigens an den Coëfficienten der obigen Zeichen nichts ändert.

Von den Neigungen dieser Flächen sind diejenigen von Flächen, die durch die Säulenkanten der Grundform oder durch ihre vordere und hintere Endkante gehen, am leichtesten zu berechnen. Es ist offenbar

$$tg \frac{1}{2} \frac{z}{z} = \frac{1}{3} tg g; \quad tg \frac{1}{2} \frac{o}{o} = \frac{1}{2} tg \frac{1}{2} B_1; \quad tg \frac{1}{2} \frac{n}{n} = \frac{1}{4} tg \frac{1}{2} B$$

und so fort. Man findet so nach und nach Neigung von:

$$\begin{array}{ll}
 z:z \dots 58^\circ 49',4 & n:n \dots 90^\circ 6',9 \\
 o:o \dots 126 \quad 14,4^*) & i:i \dots 36 \quad 56,4 \\
 s:s \dots 66 \quad 39,6 & h:h \dots 143 \quad 12,0
 \end{array}$$

Gehen die Flächen durch abgeleitete Endkanten, so muß man erst die Neigung dieser gegen die Axe berechnen, vermöge der Formeln:

$$\left. \begin{array}{l}
 \cot \varphi = \frac{\sin(\Phi + r)}{n \sin \Phi \sin r} \\
 \cot \varphi_1 = \frac{(\sin \Phi - \varphi_1)}{n \sin \Phi \sin r_1}
 \end{array} \right\} \text{worin } \cot \Phi = (n-1) \cot \alpha.$$

*) Diesen Winkel fand Mohs mit dem Reflexionsgoniometer gleich $126^\circ 12'$.

Hier ist ϱ die Neigung einer vordern abgeleiteten Endkante gegen die Axe, ϱ_r die einer hintern; n ist der Coëfficient von a oder a' im Weissischen Zeichen der graden Abstumpfungsfäche der abgeleiteten Endkante, den Coëfficienten von c der Einheit gleich gesetzt. Man findet so: Neigung von

γ gegen die Axe ..	$35^{\circ} 41',5$	t gegen die Axe ..	$22^{\circ} 52',5$
q - - - ..	$81 \ 54,2$	$mm^*)$ - - - ..	$34 \ 56,3$
r - - - ..	$52 \ 39,5$		

Jetzt ist es leicht, die Neigung Γ von Flächen zu finden, die durch eine von diesen Endkanten gehen, und zugleich durch die Seitenendkanten des Grundoctaëders, vermöge der Formel:

$$tg \frac{1}{2} \Gamma = \frac{tg r'}{\sin \varrho}$$

Das zweite Glied dieser Gleichung mit dem Coëfficienten von b im Weissischen Zeichen multiplicirt, giebt die Tangente der halben Neigung der abgeleiteten Flächen, oder:

$$tg \frac{1}{2} \Delta = \beta \cdot \frac{tg r'}{\sin \varrho}$$

wenn man die Neigung der abgeleiteten Flächen mit Δ , den Coëfficienten von b , den ihr Zeichen enthält mit β , und die Neigung der Endkante, durch welche sie gehen, gegen die Axe mit ϱ bezeichnet. Man findet so: Neigung von

$m:m$	$144^{\circ} 40',8$	$v:v$	$75^{\circ} 11',0$
$u:u$	$113 \ 59,8$	$d:d$	$98 \ 19,4$

Um die Neigungen der Endflächen P, x, y, t gegen die Säulenflächen T' und z zu berechnen, bedient man sich des rechtwinklichen sphärischen Dreiecks, wel-

*) Ich bezeichne die Durchschnittslinie zweier Flächen, indem ich die Buchstaben der beiden Flächen neben einander schreibe. mm heisst also die von den Flächen m, m gebildete Endkante.

ches aus dem Durchschnitt der Endfläche mit der Säulenfläche, und mit einer durch die Säulenkante TT (oder zz) und die Axe c gelegten Ebene gebildet wird. In demselben ist, nach den bekannten trigonometrischen Formeln für's rechtwinkliche sphärische Dreieck

$$\cos G = \sin F \cos g$$

$$\operatorname{tg} f = \operatorname{tg} F \sin g$$

$$\operatorname{tg} h = \frac{\operatorname{tg} g}{\cos F}$$

worin G die Neigung der Endfläche gegen die Säulenfläche, F die halbe Neigung der Säulenflächen, g das Complement der Neigung der Endfläche gegen die Axe zu 180° , f den halben ebenen Winkel zwischen den Durchschnittslinien der Endfläche mit den beiden Säulenflächen, und h den ebenen Winkel zwischen der Säulenkante und der Durchschnittslinie der Endfläche mit der Säulenfläche bedeutet. Man findet vermittelst dieser Formeln: Neigung von

$P:T$	112° 16',0	$t:T$	142° 28',4
$P:z$	102 29,1	$t:z$	116 54,0
$x:T$	110 40,3	$r:T$	121 28,5
$x:z'$	101 37,1	$r:z'$	107 19,8
$y:T$	134 19,2	$q:T$	96 57,9
$y:z'$	113 29,4	$q:z$	93 57,9

Ebenen Winkel zwischen

(h) TT u. PT ..	104° 0',6	(2f) TT u. Tt ..	140° 20',6
(2f) PT u. PT ..	113 16,2	Tt u. Tt ..	66 38,6
Tz u. Pz ..	113 7,5	Tz u. tz ..	154 9,4
Pz u. Pz ..	53 41,8	tz u. tz ..	24 43,2
$T^i T^i$ u. $x T^i$..	102 53,5	TT u. Tr ..	111 13,3
$x T^i$ u. $x T^i$..	114 5,4	Tr u. Tr ..	106 43,2
$T^i z^i$ u. $x z^i$..	111 23,4	Tz u. rz ..	123 36,5
$x z^i$ u. $x z^i$..	54 25,4	rz u. rz ..	48 16,8
$T^i T^i$ u. $y T^i$..	125 16,1	$T^i T^i$ u. $q T^i$..	94 8,5
$y T^i$ u. $y T^i$..	89 18,2	$q T^i$ u. $q T^i$..	118 18,4
$T^i z^i$ u. $y z^i$..	140 26,2	$T^i z^i$ u. $q z^i$..	97 3,9
$y z^i$ u. $y z^i$..	36 27',2	$q z^i$ u. $q z^i$..	58 20,0

Auf ähnliche Weise findet man:

Neigung von g gegen g $148^{\circ} 56',4$

- - g gegen eine durch Axen b, c ge-

legte Ebene $88^{\circ} 52',8$

ferner Neigung von:

$g:P$	$150^{\circ} 52',4$	$h:x$	$127^{\circ} 17',0$
$g:x$	$150^{\circ} 31',3$	$i:x$	$101^{\circ} 40',1$
$o:y$	$140^{\circ} 32',5$	$m:t$	$158^{\circ} 43',4$
$o:r$	$150^{\circ} 18',0$	$m:P$	$146^{\circ} 29',8$
$n:x$	$116^{\circ} 51',8$	$g:n$	$125^{\circ} 49',7$
$n:t$	$122^{\circ} 17',1$	$q:o$	$148^{\circ} 58',3$
$o:P$	$124^{\circ} 42',5$		

Um die Neigungen der verschiedenen Endflächen von der Form $[a\alpha:\beta b:c]$ gegen einander zu berechnen, z. B. von u gegen o , lege man eine Ebene durch die Kanten uu , oo , und die Axe c ; diese Ebene bildet offenbar mit den Flächen u , o ein sphärisches Dreieck, in welchem uns die Neigungen der Flächen u , o gegen die eben bezeichnete Ebene (nämlich $\frac{1}{2}\frac{u}{u}$ und $\frac{1}{2}\frac{o}{o}$) und die

Neigung der beiden Kanten uu und oo gegen einander (nämlich das Complement der Differenz ihrer Neigungen gegen die Axe zu 180°) bekannt sind. Bezeichnet man also die beiden ersten Neigungen mit B , C , die letzten

Winkel mit a ; endlich die Neigung $\frac{u}{o}$ mit A und die ebenen Winkel, die zwischen den Kanten uu , uo und oo eingeschlossen sind, mit b und c , so ist nach den bekannten Gaussischen Formeln:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{1}{2}(b-c) &= \operatorname{tg} \frac{1}{2}a \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}(B-C)}{\sin \frac{1}{2}(B+C)} \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2}(b+c) &= \operatorname{tg} \frac{1}{2}a \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}(B-C)}{\cos \frac{1}{2}(B+C)} \\ \cos \frac{1}{2}A &= \sin \frac{1}{2}a \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}(B-C)}{\sin \frac{1}{2}(b-c)} \end{aligned}$$

Diese Formeln sind so bequem zur Rechnung, und führen so schnell zum Ziele, besonders wenn man mehrere Winkel zu berechnen hat, daß sie in ähnlichen Fällen vorzugsweise anzuwenden sind.

Man findet vermittelst dieser Formeln die Neigung von:

$o:T^i$	123° 1',6	$g:o$	153° 49',8
$o:z^i$	124 59,2	$g:T^i$	98 48,2
$s:T^i$	128 15,6	$g:T^i$	96 51,6
$u:T^i$	149 40,4	$g:z$	104 3,4
$u:o$	153 21,0	$g:z^i$	102 55,6
$o:v$	146 1,2	$n:g$	143 50,8
$v:T^i$	146 2,8	$n:m$	143 33,8
$v:z$	158 58,4	$n:s$	146 58,8
$v:n$	129 11,6	$n:d$	150 0,2
$o:n$	136 15,2	$d:T^i$	158 53,0
$n:T^i$	128 53,0	$h:T^i$	121 21,0
$n:T^i$	95 14,4	$i:T^i$	127 4,0
$n:z$	140 12,4		

Von diesen Neigungen lassen sich einige schon aus andern durch bloße Subtraction oder Addition finden, indem die Flächen, die sie bilden, in einer Zone liegen: es ist aber besser, sie besonders zu berechnen, damit man die auf beiden Wegen gefundenen Werthe controliren und sich so überzeugen könne, daß kein Fehler in der Rechnung vorgefallen ist, was bei einer so großen Menge Winkel so leicht geschieht. Alle angeführten Winkel sind mit Logarithmen von 5 Decimalen berechnet, so daß man nicht immer einer 0',1 sicher ist. Wenn man die Gaussischen Formeln anwendet, berechnet man mit jeder Neigung zugleich zwei ebene Winkel; ich habe diese indess der Kürze wegen, und weil sie uns nicht besonders interessiren, weggelassen. Ich will sie nur für Fig. 1. Taf. IV. vollständig anführen.

Ebener Winkel zwischen den Kanten:

$T^i T^i$ u. $T^i \gamma$. . 125° 16'	nT u. nz . . 140° 23'
$T^i \gamma$ u. $T^i u$. . 130 43	nz u. nM . . 136 27
$T^i u$ u. $T^i v$. . 143 39	nM u. nv . . 129 6
$T^i v$ u. $T^i z^i$. . 140 21	nv u. no . . 134 4
$T^i z^i$ u. $z^i v$. . 96 47	no u. nP . . 96 50
$z^i M$ u. vM . . 144 16	vM u. vn . . 115 47
vM u. Mn . . 99 38	vn u. vo . . 117 16
Mn u. Mz . . 116 7	vo u. vu . . 126 57
Mz u. nz . . 96 47	vu u. uo . . 84 41
Tz u. nT . . 125 16	ou u. ov . . 94 52
nT u. Tt . . 94 23	on u. oP . . 121 26
tT u. TT . . 140 21	oP u. ox . . 110 33
Tt u. Tt . . 66 39	ou u. ov . . 143 42
Tt u. tn . . 113 21	Po u. Pn . . 123 22
tn u. tP . . 123 20	Po u. Px . . 146 38
Pn u. nt . . 129 6	uy u. $T^i \gamma$. . 135 21
nt u. nT . . 134 4	$T^i \gamma$ u. $T^i \gamma$. . 89 18

II.

Ich habe in meiner Abhandlung über die Krystallisation des Kupfervitriols *) gezeigt; dafs jedwede drei Durchschnittslinien in einem System von Krystallflächen als Axen dienen können. Dieser Linien giebt es aber viele, und es fragt sich, welche von ihnen man vorzugsweise als Axen ansehen soll.

Die meisten Krystalle sind so gebildet, dafs immer mehrere Flächen sich unter parallelen Linien schneiden. Auf diese Weise erscheinen an denselben mehrere Zonen von Flächen, deren Axen man vorzugsweise als Axen des ganzen Systems von Flächen, welche den Krystall ausmachen, ansehen kann. Aber auch dieser Axen giebt es gewöhnlich mehr als drei, und wir müssen wieder

*) Siehe diese Annalen, Jahrgang 1826, St. 9.

unter ihnen wählen. Man unterscheidet deshalb gewisse Hauptzonen, als diejenigen, in welchen die allermeisten Flächen liegen; unter den Axen dieser Hauptzonen giebt es in den meisten Fällen drei, die rechte oder überhaupt solche Winkel unter einander machen, welche Tautometrie herbeiführen; und diese nimmt man alsdann als die wahren Axen an. Wo sich alle diese Axen unter schiefen Winkeln schneiden, ist die Wahl willkürlicher; aber auch in diesem Fall lassen sich gewisse Regeln vorschreiben, wie aus dem Folgenden hervorgehen wird.

Die Hauptzonen stehen also in der engsten Verbindung mit der Grundform, und deuten unmittelbar auf dieselbe hin. In den Systemen des Rhomboëders und der geraden Octaëder ist dieser Zusammenhang besonders deutlich wahrzunehmen, so daß man bei diesen Formen nur der Vertheilung der parallelkantigen Flächen zu folgen braucht, um sogleich diese Grundform zu erkennen; da ferner bei diesen Systemen die horizontalen Axen mit den verticalen, und bei den Octaëdern auch die horizontalen Axen unter einander rechte Winkel machen sollen, so ist die Wahl unter mehreren Axen, die sich dem Beobachter darbieten, so beschränkt, daß hier fast nichts der Willkür überlassen bleibt. Nur beim Rhomboëder und Quadratoctaëder kann die Wahl zwischen den Axen der für's Erste angenommenen Grundform und den Axen des nächst stumpferen Körpers zweifelhaft bleiben. Verfährt man eben so bei den Systemen der schiefen Octaëder, d. h. geht man nur von der respectiven Lage wirklich und in großer Anzahl existirender und nicht von der Lage bloß denkbarer Flächen aus, so wird man nothwendig auf schiefwinkliche Axen geführt, die wenigen Fälle ausgenommen, wo eine Reduction auf rechtwinkliche Axen sich gewissermaßen von selbst darbietet, z. B. beim Pyroxen.

Es sey, Fig. 5. Taf. IV., der durch die Axen a , c

gelegte Durchschnitt eines schiefen Rhombenoc-taëders; BD ist die Halbaxe a , *); AD die Halbaxe c ; AB ist eine vordere Endkante, deren gerade Abstumpfungsfläche, auf die schiefwinklichen Axen BD , AD bezogen, folgendes Zeichen hat:

$$[a, : \infty b : c].$$

Wir wollen nun eine mit AC rechtwinkliche Axe BC ziehen, so kann man BD auch als eine Endkante ansehen, an dem geraden Rhombenoc-taëder, dessen Axen mit den Linien AC , BC zusammenfallen. Die Weissischen, auf rechtwinkliche Axen bezogenen Zeichen der geraden Abstumpfungsflächen der Endkanten BD und AB seyen:

$$[a : \infty b : pc] \text{ und } [a : \infty b : mc],$$

so ist offenbar, wenn man $BC = a$ setzt

$$DC = p; \quad AC = m,$$

mithin $AD = m - p$.

Es sey BF eine andere vordere Endkante, deren grade Abstumpfungsfläche

$$[a : \infty b : m'c]$$

zum Zeichen habe, alsdann ist $FC = m'$, also

$$FD = m' - p.$$

Die Zeichen der Abstumpfungsflächen der Kanten AB , FB , auf die schiefwinklichen Axen BD , AD bezogen, sind hiernach offenbar, wenn man $BD = a$ setzt,

$$[a, : \infty b : (m - p)c] \text{ und } [a, : \infty b : (m' - p)c].$$

Will man dem Zeichen der graden Abstumpfungsfläche der Endkante AB , auf die schiefwinklichen Axen bezogen, die Form:

$$[a, : \infty b : c]$$

geben, so muß man die Coëfficienten von c in den obigen Zeichen mit $(m - p)$ dividiren, und erhält so:

*) Ich bezeichne die nach vorn gerichtete Halbaxe des schiefen Rhombenoc-taëders mit as , wo der Exponent s andeuten soll, daß sie einen schiefen Winkel mit der verticalen Axe c macht.

$$\frac{m' - p}{m - p}$$

als der Werth des Coëfficienten von c im Zeichen der Abstumpfungsfläche irgend eine vordere Endkante, auf schiefwinkliche Axen bezogen, deren Weissisches Zeichen

$$[a : \infty b : m'c]$$

ist.

Ist $m' < p$, oder trifft die Endkante die Axe AC unterhalb D , z. B. in G (Fig. 7. Taf. IV.), so wird der Coëfficient von c im Zeichen, welches sich auf schiefwinkliche Axen bezieht, negativ, welches anzeigt, daß die in Frage stehende Endkante am schiefen Rhombenocäeder hinten liegt, während sie beim graden vorn liegt.

Liegt endlich die grade Abstumpfungsfläche der Endkante, deren Weissisches Zeichen

$$[a : \infty b : m''c]$$

sey, hinten, wie z. B. $B'I'$ (Fig. 6. Taf. IV.), so ist offenbar, wenn man BH mit $B'H'$ parallel macht

$$HD = CD + CH.$$

Es ist aber $CD = p$, $HC = CH' = m''$; HD ist der Coëfficient von c im Zeichen der Abstumpfungsfläche, das sich auf schiefwinkliche Axen bezieht, der aber noch vorher mit $m - p$ dividirt werden muß; dieser Coëfficient ist also:

$$\frac{m'' + p}{m - p}.$$

Ich will mich jetzt bemühen, an einem Beispiel zu zeigen, daß wenn Flächen, die einem schiefen Octäeder angehören, die man aber auf rechtwinkliche Axen bezogen hat, sehr zusammengesetzte Zeichen haben, diese sehr einfach werden, wenn man die natürlichen schiefwinklichen Axen wieder einführt, so daß in dieser Einfachheit der Zeichen der beste Beweis für die Schiefwinklichkeit der Axen liegt.

Die Grundform des Titanits (oder Sphens) ist nach G. Rose ein grades Rhombenocäeder, dessen hintere

Endkante von der Fläche P^1 , dessen Basiskanten von den Flächen M , M gerade abgestumpft werden *). Die Weifsischen (auf rechtwinkliche Axen zu beziehenden) Zeichen aller vorkommenden Flächen sind folgende:

Abstumpfungsf lächen vorderer und hinterer Endkanten.	$\left\{ \begin{array}{l} M = [a : b : \infty c] \\ l = [a : 3b : \infty c] \\ q = [\infty a : b : \infty c] \\ T^1 = [a^1 : \infty b : c] \\ f = [a : \infty b : 5c] * \\ g^1 = [a^1 : \infty b : 7c] * \\ x = [a : \infty b : 9c] \\ \gamma = [a : \infty b : 17c] \\ \nu^1 = [a^1 : \infty b : 19c] \\ z = [a : \infty b : 27c] \\ h^1 = [a^1 : \infty b : 55c] * \end{array} \right.$	Zuspitzungsf lächen oder Flächen abgeteilt. leitender Oeräder.	$\left\{ \begin{array}{l} o^1 = [a^1 : \frac{1}{2}b : c] \\ r^1 = [a^1 : \frac{1}{6}b : c] \\ u = [\frac{1}{2}a : \frac{1}{2}b : c] \\ n = [\frac{1}{3}a : \frac{1}{4}b : c] \\ d = [\frac{1}{3}a : \frac{1}{12}b : c] \\ \omega^1 = [\frac{1}{7}a^1 : \frac{1}{8}b : c] \\ i^1 = [\frac{1}{10}a^1 : \frac{1}{3}b : c] \\ k = [\frac{1}{11}a : \frac{1}{2}b : c] \\ s = [\frac{1}{17}a : \frac{1}{2}b : c] \\ t^1 = [\frac{1}{19}a^1 : \frac{1}{12}b : c] \end{array} \right.$
-------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Die Accente zeigen an, daß die so bezeichneten Flächen hinten liegen. Die mit einem Stern bezeichneten Abstumpfungsf lächen vorderer oder hinterer Endkanten kommen nicht wirklich vor; man hat sie nur mit hergesetzt, um zu zeigen, welche Flächen dieser Art noch in der Entwicklung des Systems möglich sind; die Endkanten, welche von diesen Flächen abgestumpft werden, und deren Lage man aus den Coëfficienten von a ersehen kann, sind, bis auf die letzte h^1 , Durchschnittslinien vorkommender Flächen; f stumpft nämlich die Endkante nn ab; γ^1 die Endkante von $\omega^1 \nu^1$. Man kann diese Liste noch mit folgenden Flächen vermehren:

$\xi = [a^1 : \infty b : 10c] *$ und $\vartheta = [a : \infty b : 11c] *$,
welche die Endkanten $i^1 i^1$ und kk abstumpfen.

Bei der ersten Ansicht dieser Zeichen ist es schon auffallend, wieviel weniger einfach die Coëfficienten von a sind,

*) Rose's vortreffliche Abhandlung befindet sich in Jedermanns Händen, so daß ich es für überflüssig halte, seine Figuren hieher setzen zu lassen. Ueberdiß braucht man sie nicht notwendig, um das Folgende zu verstehen.

sind, als diejenigen von b ; in der That, wenn man nicht die rechte Grundform in Bezug auf die Axe a getroffen hat, so kann der Erfolg davon nur in den Coëfficienten von a sichtbar werden. Wir wollen deshalb versuchen, ein schiefes Rhombenoctaëder als Grundform anzunehmen; die Coëfficienten selbst sollen uns in der Wahl derselben leiten.

Es sey wieder die Fig. 6. Taf. IV. der Durchschnitt eines schiefen Rhombenoctaëders, durch die Halbaxen a_1 , c gelegt und BC senkrecht auf AC ; es sey AB die vordere Endkante, BD die Halbaxe a_1 , und AH' die hintere Endkante des schiefen Rhombenoctaëders. Man ziehe BH parallel mit AH' , so ist offenbar

$$AC = 2 DC + CH.$$

Nun ist aber, nach dem Vorhergehenden, AC gleich dem Coëfficienten von c im Weissischen Zeichen der Abstumpfungsfäche von AB (oder der vordern Endkante), DC gleich dem Coëfficienten von c im Zeichen der Abstumpfungsfäche von BD (oder der Basis), und endlich CH gleich dem Coëfficienten von c im Zeichen der Abstumpfungsfäche der hintern Endkante des schiefen Rhombenoctaëders. Wenn also drei Coëfficienten von c in den oben angeführten Zeichen das durch diese Gleichung ausgedrückte Verhältnifs zu einander haben, so kann man von den ihnen zugehörigen Flächen die eine als Basis, die beiden andern als grade Abstumpfungsfächen der vordern und hintern Endkante des schiefen Rhombenoctaëders, das man substituiren will, ansehen. Die Zahlen 5, 7 und 10 genügen aber der obigen Gleichung, denn

$$17 = 2.5 + 7;$$

man kann also f als die Basis, y als die grade Abstumpfungsfäche der vordern, g' als die grade Abstumpfungsfäche der hintern Endkante eines schiefen Rhombenoctaëders ansehen, auf das wir nun auch die übrigen Flächen beziehen wollen. Wir haben nämlich nach dem

Vorhergehenden als Coëfficienten von c , in den Zeichen, die sich auf schiefwinklige Axen beziehen

$$\frac{m' - p}{m - p} \text{ für die vordern Flächen}$$

$$\frac{m'' + p}{m - p} \text{ für die hintern Flächen.}$$

Hier ist $p = s$, $m = 17$, m' und m'' sind die Coëfficienten von c in den obigen Weissischen Zeichen der graden Abstumpfungsläche der vordern und hintern Endflächen.

Man findet so folgende Coëfficienten von c :

für P' .. $\frac{1}{2}$	für ν' .. 2
- f .. 0	- z .. $\frac{1}{6}$ od besser 2*)
- g' .. 1	- h' .. 5
- x .. $\frac{1}{3}$	- ξ' .. $\frac{1}{3}$
- y .. 1	- ϑ .. $\frac{1}{2}$

Da nun auch

$$5 + 2.1 = 7$$

$$17 + 2.1 = 19$$

$$1 + 2.5 = 11$$

so kann man auch

- 1) P' als die Basis, g' als die Abstumpfung der vordern, f als die der hintern Endkante,
- 2) P' als die Basis, y als die Abstumpfung der vordern, ν' als die der hintern,
- 3) f als die Basis, ϑ als die Abstumpfung der vordern, und P' als die der hintern Endkante ansehen. Diese drei Suppositionen werden drei verschiedene Reihen von Coëfficienten von c geben, unter denen man zu wählen hat. Man sieht leicht ein, daß man die Suppositionen noch sehr vervielfältigen kann.

*) Da die Fläche z nicht ausgebildet vorkommt, und ihre Lage bloß durch Messung, und nicht durch Zonen bestimmt worden ist, so ist diese Substitution erlaubt.

Wir haben bisher die Flächen I, I als Säulenflächen angesehen, aber es ist möglich, daß die Zeichen noch einfacher oder wenigstens symmetrischer werden, wenn man der Axe c eine andere Lage giebt. Wir wollen z. B., ohne die Axe b zu verändern, die Axe c der Kante ss und die Axe a der Kante $o'o'$ parallel ziehen.

Es sey (Fig. 7. Taf. IV.) $BD=ED$ die alte Halbaxe a , AD die alte Halbaxe c , AB die Kante ss und AH die Kante $o'o'$, indem $DH=2ED$; es sey ferner AL eine andere Endkante, deren grade Abstumpfungsfäche folgendes Zeichen habe:

$$[a a; \infty b : c],$$

so daß also $LD=a a$. Zieht man nun BF parallel mit AL , so ist offenbar

$$\frac{AF}{AH} = \frac{BL}{LI}$$

Nun ist aber $BL=LD-BD=a(a-1)$ und $LH=LD+DH=a(a+2)$; also:

$$\frac{AF}{AH} = \frac{a-1}{a+2}.$$

Ist nun AB die neue Axe c , und AH die neue Axe a , so ist das Zeichen der Abstumpfungsfäche der Endkante AL , auf diese neue Axe bezogen, folgendes:

$$\left[\frac{(a-1)}{(a+2)} a; \infty b : c \right].$$

Wir können auch im Allgemeinen dem neuen Coefficienten von a , folgende Gestalt geben, die keines weiteren Beweises bedarf

$$\frac{a-n}{a-n'},$$

wo n, n' die alten Coefficienten von a , in den Zeichen der Abstumpfungsfächen der Endkanten, die als neue Axen dienen sollen, bedeuten; also im obigen Fall $n=1$, $n'=-2$.

Setzt man z. B. $n=1$, $n'=-1$, oder zieht man die

Axe c der Endkante ss und die Axe a , der Kante $\varpi'\varpi'$ parallel, so bekommt man folgende Coëfficienten von a :

$$\begin{array}{l|l} \text{für } P' \dots & 3 \\ - x \dots & \frac{1}{2} \\ - z \dots & -\frac{1}{3} \\ - f \dots & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{für } g' \dots, \infty \\ - \varpi' \dots & -3 \\ - \xi' \dots & -9 \\ - \vartheta \dots & \frac{1}{3} \end{array}$$

Um die Coëfficienten von b zu finden, braucht man nur dieselbe Figur (Fig. 7. Taf. IV.) anzusehen. Man ziehe durch A eine Linie senkrecht auf die Ebene BAH , so ist diese Linie die neue Halbaxe b . Man bezeichne den Coëfficienten der neuen Halbaxe b mit β' , den Coëfficienten der alten durch D gehenden mit β . Denkt man sich nun durch BF eine Ebene gelegt, die mit der durch AL gehenden Krystallebene parallel ist, so wird:

- 1) Die alte Halbaxe b , die durch D geht, so von der durch BF gehenden Ebene geschnitten, daß die gegenseitigen Abschnitte sich verhalten wie

$$\frac{AD}{DG} = \frac{BL}{BD}.$$

Wir haben also:

$$\frac{\beta'}{\beta} \cdot \frac{BD}{DL} = \frac{BL}{BD},$$

woraus, da $BD=\eta$, $DL=\alpha$, $BL=\alpha-\eta$:

$$\frac{\beta'}{\beta} = \frac{\alpha-\eta}{\alpha}.$$

Hiernach haben wir folgendes allgemeine Schema der Verwandlung eines Zeichens in das andere.

Altes Zeichen. Neues Zeichen.

$$[\alpha a; \beta b; c] \quad \left[\frac{\alpha-\eta}{\alpha-\eta'} : a, \frac{\alpha-\eta}{\alpha} \beta b; c \right]$$

Beim schiefen Rhombenoctaëder, auf welches sich das neue Zeichen bezieht, gehen die Axen c und a denjenigen Endkanten des alten schiefen Rhombenoctaëders parallel, welche von den Flächen $[\eta a; \infty b; c]$ und

$[n'a; \infty b:c]$ grade abgestumpft werden, die Halbaxe b aber bleibt in ihrer frühern Lage parallel.

Die Zeichen der bekannten Flächen am Titanit sind, wenn man $n=1$ und $n'=-1$ setzt, und wenn man alle Coëfficienten von b durch 3 dividirt, folgende:

Endflächen.

Vordere.		Hintere.
$P=[3a; \infty b:c]$. .	$\nu=[3a; \infty b:c]$
$r=[3a; b:c]$. . .	$t=[3a; b:c]$
$o=[3a; 3b:c]$		
$n=[a; b:c]$. . .	$l=[a; b:c]$
$x=[\frac{1}{2}a; \infty b:c]$		$M=[a; \frac{1}{3}b:c]$
$k=[\frac{1}{3}a; b:c]$. . .	$z=[\frac{1}{3}a; \infty b:c]$
		$\nu'=[9a; 3b:c]$

Säulenflächen.

$$s=[a; \frac{1}{3}b: \infty c]$$

$$y=[a; \infty b: \infty c]$$

Abstumpfungsfläche der Seitenendkante.

$$w'=[\infty a; b:c]$$

Man kann diese Aufgabe auch ganz allgemein behandeln, auf folgende Weise:

Es seyen zwei Krystallebenen gegeben, deren Gleichungen

$$Ax + By + Cz - 1 = 0$$

$$A_{(1)}x + B_{(1)}y + C_{(1)}z - 1 = 0;$$

es seyen ferner drei Linien gegeben, die durch denselben Punkt gehen, und deren Gleichungen folgende sind:

$$\left\{ \begin{array}{l} c(x' - x) + a(z' - z) = 0 \\ c(y' - y) + b(z' - z) = 0 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c'(x' - x) + a'(z' - z) = 0 \\ c''(x' - x) + b'(z' - z) = 0 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c''(x' - x) + a''(z' - z) = 0 \\ c'''(x' - x) + b''(z' - z) = 0 \end{array} \right\}$$

so ist nach meiner bereits citirten Abhandlung über den Kupfervitriol (dies. Ann. Bd. 84. p. 71.).

$$\left. \begin{aligned} \frac{q_{(x)} \cdot p}{p_{(x)} \cdot q} &= \frac{(Cc' - Bb' - Aa')(C_{(x)}c - B_{(x)}b - A_{(x)}a)}{(C_{(x)}c - B_{(x)}b - A_{(x)}a)(Cc - Bb - Aa)} \\ \frac{r_{(x)} \cdot p}{p_{(x)} \cdot r} &= \frac{(Cc'' - Bb'' - Aa'')(C_{(x)}c - B_{(x)}b - A_{(x)}a)}{(C_{(x)}c'' - B_{(x)}b'' - A_{(x)}a'')(Cc - Bb - Aa)} \end{aligned} \right\} \dots (I)$$

Hier bezeichnen p, q, r die Entfernungen der Durchschnittspunkte der drei Linien mit der ersten Ebene von dem Durchschnittspunkt der drei Linien, und $p_{(x)}, q_{(x)}, r_{(x)}$ dieselben Größen in Bezug auf die zweite Ebene.

Es sey nun

$$[\alpha a : \beta b : c]$$

das Zeichen der ersten Krystallebene auf die ursprünglichen Axen bezogen, und

$$[\alpha' a : \beta' b : c]$$

das Zeichen derselben Ebene auf die drei Linien als Axen bezogen; ferner

$$[\alpha_{(x)} a : \beta_{(x)} b : c] \text{ und } [\alpha'_{(x)} a : \beta'_{(x)} b : c]$$

die Zeichen für die zweite Krystallebene, in derselben Beziehung, so ist offenbar

$$\begin{array}{l|l} p=c & p_{(x)}=c \\ q=\alpha' a & q_{(x)}=\alpha'_{(x)} a \\ r=\beta' b & r_{(x)}=\beta'_{(x)} b \end{array}$$

folglich auch

$$\begin{array}{l|l} A=\frac{1}{\alpha a} & A_{(x)}=\frac{1}{\alpha_{(x)} a} \\ B=\frac{1}{\beta b} & B_{(x)}=\frac{1}{\beta_{(x)} a} \\ C=\frac{1}{c} & C_{(x)}=\frac{1}{c} \end{array}$$

Ferner wenn die Zeichen der Krystallebenen, aus deren Durchschnitt die drei Linien entstehen, die wir als neue Axen ansehen wollen, folgende sind:

$$\left. \begin{aligned} [n a : \mathfrak{D} b : c] \\ [n_{(x)} a : \mathfrak{D}_{(x)} b : c] \end{aligned} \right\} \text{ für die erste Linie oder für die neue } \text{Axe } c$$

$$\left. \begin{aligned} [n' a : \mathfrak{D}' b : c] \\ [n'_{(x)} a : \mathfrak{D}'_{(x)} b : c] \end{aligned} \right\} \text{ für die zweite Linie oder für die neue } \text{Axe } a$$

$$\left. \begin{aligned} [n'' a : \mathfrak{D}'' b : c] \\ [n''_{(x)} a : \mathfrak{D}''_{(x)} b : c] \end{aligned} \right\} \text{ für die dritte Linie oder für die neue } \text{Axe } b$$

so ist nach einem bekannten Satze aus der analytischen Geometrie (vergl. die angeführte Abhandlung, p. 72.), nach den gehörigen Substitutionen

$$\begin{array}{l|l} c = \frac{1}{ab} \left(\frac{1}{n_{(x)} \mathfrak{F}} - \frac{1}{n \mathfrak{F}_{(x)}} \right) & c' = \frac{1}{ab} \left(\frac{1}{n'_{(x)} \mathfrak{F}'} - \frac{1}{n' \mathfrak{F}'_{(x)}} \right) \\ b = \frac{1}{ac} \left(\frac{1}{n_{(x)}} - \frac{1}{n} \right) & b' = \frac{1}{ac} \left(\frac{1}{n'_{(x)}} - \frac{1}{n'} \right) \\ a = \frac{1}{bc} \left(\frac{1}{\mathfrak{F}} - \frac{1}{\mathfrak{F}_{(x)}} \right)^*) & a' = \frac{1}{bc} \left(\frac{1}{\mathfrak{F}'} - \frac{1}{\mathfrak{F}'_{(x)}} \right) \\ \\ c'' = \frac{1}{ab} \left(\frac{1}{n''_{(x)} \mathfrak{F}''} - \frac{1}{n'' \mathfrak{F}''_{(x)}} \right) \\ b'' = \frac{1}{ac} \left(\frac{1}{n''_{(x)}} - \frac{1}{n''} \right) \\ a'' = \frac{1}{bc} \left(\frac{1}{\mathfrak{F}''} - \frac{1}{\mathfrak{F}''_{(x)}} \right) \end{array}$$

Diese Werthe von p, q etc., A, B, C etc. a, b, c etc. in die Gleichungen (I) gesetzt, geben, nach den gehörigen Reductionen

$$\begin{aligned} \frac{a'_{(x)}}{a'} &= \frac{[\alpha \beta (n' \mathfrak{F}'_{(x)} - n'_{(x)} \mathfrak{F}') - \alpha (n' - n'_{(x)}) \mathfrak{F}' \mathfrak{F}'_{(x)} - \beta (\mathfrak{F}'_{(x)} - \mathfrak{F}') n' n'_{(x)}]}{[\alpha_{(x)} \beta_{(x)} (n' \mathfrak{F}'_{(x)} - n'_{(x)} \mathfrak{F}') - \alpha_{(x)} (n' - n'_{(x)}) \mathfrak{F}' \mathfrak{F}'_{(x)} - \beta_{(x)} (\mathfrak{F}'_{(x)} - \mathfrak{F}') n' n'_{(x)}]} \\ &\times \frac{[\alpha \beta (n \mathfrak{F}_{(x)} - n_{(x)} \mathfrak{F}) - \alpha (n - n_{(x)}) \mathfrak{F} \mathfrak{F}_{(x)} - \beta (\mathfrak{F}_{(x)} - \mathfrak{F}) n n_{(x)}]}{[\alpha \beta (n \mathfrak{F}_{(x)} - n_{(x)} \mathfrak{F}) - \alpha (n - n_{(x)}) \mathfrak{F} \mathfrak{F}_{(x)} - \beta (\mathfrak{F}_{(x)} - \mathfrak{F}) n n_{(x)}]} \\ \frac{\beta'_{(x)}}{\beta'} &= \frac{[\alpha \beta (n'' \mathfrak{F}''_{(x)} - n''_{(x)} \mathfrak{F}'') - \alpha (n'' - n''_{(x)}) \mathfrak{F}'' \mathfrak{F}''_{(x)} - \beta (\mathfrak{F}''_{(x)} - \mathfrak{F}'') n'' n''_{(x)}]}{[\alpha_{(x)} \beta_{(x)} (n'' \mathfrak{F}''_{(x)} - n''_{(x)} \mathfrak{F}'') - \alpha_{(x)} (n'' - n''_{(x)}) \mathfrak{F}'' \mathfrak{F}''_{(x)} - \beta_{(x)} (\mathfrak{F}''_{(x)} - \mathfrak{F}'') n'' n''_{(x)}]} \\ &\times \frac{[\alpha \beta (n \mathfrak{F}_{(x)} - n_{(x)} \mathfrak{F}) - \alpha (n - n_{(x)}) \mathfrak{F} \mathfrak{F}_{(x)} - \beta (\mathfrak{F}_{(x)} - \mathfrak{F}) n n_{(x)}]}{[\alpha \beta (n \mathfrak{F}_{(x)} - n_{(x)} \mathfrak{F}) - \alpha (n - n_{(x)}) \mathfrak{F} \mathfrak{F}_{(x)} - \beta (\mathfrak{F}_{(x)} - \mathfrak{F}) n n_{(x)}]} \end{aligned}$$

*) Man muß hier wieder nicht die Coëfficienten a, b, c mit den in den zweiten Gliedern vorkommenden Halbxen a, b, c verwechseln. Ich habe die Zeichen nicht geändert, damit man die Beziehungen dieser Formeln auf die schon bekannten leichter finde.

Diese Formeln werden viel einfacher, wenn man die Ebenen, aus deren Durchschnitt die drei Linien, oder die neuen Axen, entstehen, schicklich wählt. Es ist klar, daß beim schiefen Rhombenocäeder die erste Linie, oder die neue Halbaxe c als die Durchschnittslinie zweier Krystallebenen angesehen werden kann, die rechts und links die alten Halbaxen b und b' in demselben Verhältniß schneiden, so daß also

$$\mathfrak{S} = -\mathfrak{S}_{(x)},$$

Eben so kann man auch, in Bezug auf die neue Axe a

$$\mathfrak{S}' = -\mathfrak{S}'_{(x)}$$

setzen. Da die neuen Axen a , c immer in Bezug auf die alten als Endkanten des schiefen Rhombenocäeders angesehen werden können, so ist auch

$$n = n_{(x)} \text{ und } n' = n'_{(x)}.$$

Nimmt man auf diese Gleichungen Rücksicht, so verwandelt sich die erste von den obigen Formeln in folgende:

$$\frac{\alpha'_{(x)}}{\alpha'} = \frac{(\alpha_{(x)} - n)}{(\alpha_{(x)} - n')} \cdot \frac{(\alpha - n')}{(\alpha - n)}$$

Da $\alpha'_{(x)}$ offenbar nur von $\alpha_{(x)}$ und α' nur von α abhängen kann, und da überdies hier nur von Verhältnißzahlen, nicht von absoluten Größen die Rede ist, so kann man die Faktoren von einander trennen, und zwei Gleichungen aus der einen machen:

$$\alpha_{(x)} = \frac{(\alpha_{(x)} - n)}{(\alpha_{(x)} - n')} \text{ und } \alpha' = \frac{(\alpha - n)}{(\alpha - n')}$$

welche beide mit der schon oben für diesen Fall geometrisch entwickelten Gleichung identisch sind.

Die Formel für β' wird auch sehr einfach. Man kann offenbar die Axe b ansehen als entstanden aus dem Durchschnitt zweier Krystallflächen von der Form:

$$[a : x b : c] \text{ und } [a' : x b' : c],$$

so daß also $n'' = -n''_{(x)}$ und $\mathfrak{S}'' = \mathfrak{S}''_{(x)} = x$. Diese Werthe in die zweite Formel gesetzt giebt:

$$\frac{\beta'_{(x)}}{\beta'} = \frac{\beta_{(x)} \cdot \alpha \cdot (\alpha_{(x)} - n)}{\beta \alpha_{(x)} (\alpha - n)}$$

Man kann hieraus wieder zwei Gleichungen machen

$$\beta'_{(x)} = \beta_{(x)} \frac{(\alpha_{(x)} - n)}{\alpha_{(x)}} \text{ und } \beta' = \beta \cdot \frac{\alpha - n}{\alpha}$$

welche wieder mit den bereits oben entwickelten identisch sind.

Auf ähnliche Weise, wie die Formen des Titanits, kann man auch die Formen des Epidots, Gypsens etc. behandeln, die auf rechtwinklige Axen bezogen ebenfalls mehr oder weniger complicirte Zeichen bekommen. Wir wollen uns indess nur noch mit der Anwendung unserer Formeln auf das ganz unsymmetrische Octaëder beschäftigen.

Die vorzüglichsten Flächen des Kupfervitriols sind folgende:

$$\begin{array}{ll}
 i = [a, b, c] & T = [a, 3b, c] \\
 x = [a', 3b', c] & z = [a', 3b', c] \\
 P = [a, b', c] & u = [a, \frac{3}{2}b', c] \\
 k = [a', b', c] & y = [a, \frac{3}{2}b', c] \\
 s = [a', b, c] & n = [a, \infty b, \infty c] \\
 M = [a, 3b, c] & r = [\infty a, b, \infty c]
 \end{array}$$

Man sieht aus den Zeichen selbst, daß das Grund-octaëder dasjenige ist, welches von den Flächen i, P, k, s gebildet wird. Wir wollen jetzt ein anderes Grund-octaëder versuchen, nämlich dasjenige, in welchem c und a eben so liegen, wie im frühern, in welchem P ebenfalls als Octaëderfläche auftritt, dessen Basiskante aber von T abgestumpft wird.

Die Ebene, in welcher die Halbaxe b liegt, geht durch die Kante PT und zugleich durch die Halbaxe a , die unverändert bleibt. Man kann sie also als eine Fläche betrachten, welche in der Zone der Flächen P, T liegt, und in deren Zeichen der Coëfficient von a gleich ∞ ist; das Zeichen dieser Fläche ist also **):

$$[\infty a, \frac{3}{2}b', c].$$

*) Hier wird wieder durch den Exponenten s , der den Zeichen der Halbaxen a und b angehängt wird, bezeichnet, daß sie einen schiefen Winkel mit der verticalen Axe c machen.

**) Es seyen $\left[\frac{1}{p}a : \frac{1}{q}b : \frac{1}{r}c \right]$ das Zeichen einer Fläche, die in die Zone der Flächen:

Nun entsteht offenbar die neue Halbaxe b aus dem Durchschnitt dieser Ebene mit n ; die Halbaxe a aus dem Durchschnitt dieser Ebene mit r ; die Halbaxe c endlich aus dem Durchschnitt der Flächen n und r ; wir haben also:

$$\eta'' = \infty; \eta_{(r)}'' = 0 | \eta' = \infty; \eta_{(r)}' = 1 | \eta = 0; \eta_{(r)} = 1 \\ \mathfrak{S}'' = -\frac{3}{2}; \mathfrak{S}_{(r)}'' = 1 | \mathfrak{S}' = -\frac{3}{2}; \mathfrak{S}_{(r)}' = 0 | \mathfrak{S} = 1; \mathfrak{S}_{(r)} = 0$$

Diese Werthe in die obigen Gleichungen gesetzt, geben

$$\frac{\alpha'_{(r)}}{\alpha'} = \frac{\alpha_{(r)}}{\alpha} \quad \text{und} \quad \frac{\beta'_{(r)}}{\beta'} = \frac{\beta_{(r)}(\beta + \frac{3}{2})}{\beta(\beta_{(r)} + \frac{3}{2})}$$

Da wir wieder P als eine Octaëderfläche an der neuen Grundform ansehen, so ist

$$\alpha' = \alpha = 1 \quad \text{und} \quad \beta' = \beta = -1$$

und wir können die Coëfficienten $\alpha'_{(r)}$, $\beta'_{(r)}$ in den auf die neuen Axen sich beziehenden Zeichen leicht aus den Coëfficienten $\alpha_{(r)}$, $\beta_{(r)}$ in dem alten Zeichen berechnen. Man findet so folgende Zeichen für die zwölf Flächen des Kupfervitriols:

$$\begin{array}{ll} P = [a; b'; c] & z = [a'; \frac{1}{3}b; c] \\ k = [a'; b; c] & u = [a'; \frac{1}{3}b'; c] \\ x = [a'; b; c] & i = [a; \frac{1}{3}b; c] \\ y = [a; \frac{1}{3}b'; c] & s = [a'; \frac{2}{3}b; c] \end{array}$$

$$\left[\frac{1}{p'} a : \frac{1}{q'} b : \frac{1}{r'} c \right] \quad \text{und} \quad \left[\frac{1}{p''} a : \frac{1}{q''} b : \frac{1}{r''} c \right]$$

und zugleich in die Zone der Flächen

$$\left[\frac{1}{p'''} a : \frac{1}{q'''} b : \frac{1}{r'''} c \right] \quad \text{und} \quad \left[\frac{1}{p^{IV}} a : \frac{1}{q^{IV}} b : \frac{1}{r^{IV}} c \right]$$

fällt, so ist:

$$\begin{aligned} p(r'q'' - r''q') + p'(qr'' - q''r) + p''(q'r - r'q) &= 0 \\ p(r'''q^{IV} - r^{IV}q''') + p'''(qr^{IV} - q^{IV}r) + p^{IV}(q'''r - qr''') &= 0 \end{aligned}$$

Diese beiden Gleichungen reichen hin, um die unbekannten Coëfficienten p , q , r zu finden, da man immer einen von ihnen willkürlich der Einheit gleich setzen kann. In unserm Fall haben wir

$$\left. \begin{array}{l} p = 0 \\ r = 1 \end{array} \right\} \quad \text{und} \quad \left. \begin{array}{l} p' = 1 \\ q' = -1 \\ r' = 1 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} p'' = 1 \\ q'' = -\frac{1}{3} \\ r'' = 0 \end{array} \right\}$$

folglich bloß vermöge der ersten Gleichung $q = -\frac{2}{3}$.

$$\begin{array}{ll} M=[a, b, \infty c] & n=[a, \infty b, \infty c] \\ T=[a, b', \infty c] & r=[\infty a, b, \infty c] \end{array}$$

III.

Um nun wieder auf den Feldspath zurückzukommen, ohne jedoch diesen Gegenstand erschöpfen zu wollen, so kann man auch hier versuchen, eine andere Axe zu substituiren. Die einfachste Annahme ist hier, $n=1$ und $n'=-1$ zu setzen, d. h. die verticale Axe der Fläche P , die Basis aber der Fläche x parallel zu nehmen. Man bekommt so folgende Zeichen der Flächen des Adulars:

$$\begin{array}{ll} P=[a, \infty b, \infty c] & z=[a':\frac{1}{3}b:c] \\ x=[\infty a, \infty b:c] & t=[\frac{2}{3}a':\infty b:c] \\ q=[2a, \infty b:c] & d=[\frac{2}{3}a':\frac{1}{2}b:c] \\ g=[a, b:c] & m=[\frac{1}{2}a':b:c] \\ r=[4a, \infty b:c] & o=[\infty a, b:c] \\ y=[2a':\infty b:c] & s=[\infty a, \frac{1}{3}b:c] \\ u=[2a':b:c] & n=[a, \frac{1}{2}b:\infty c] \\ v=[2a':\frac{1}{2}b:c] & h=[a, \frac{3}{2}b:\infty c] \\ k=[a':\infty b:c] & i=[a, \frac{1}{6}b:\infty c] \\ T=[a':b:c] & M=[\infty a, b:\infty c] \end{array}$$

Die Coëfficienten von a , bilden hier für die vorderen Flächen folgende Reihe:

2, 1,

diejenigen der hintern aber folgende:

4, 2, 1, $\frac{2}{3}$,

und sie sind, wie man sieht, bedeutend einfacher geworden, was uns so merkwürdiger ist, da die hier substituirte Axe mit der optischen Axe des Adulars zusammenfällt.