Über Dirichletsche Reihen und algebraische Differentialgleichungen.

Von

Alexander Ostrowski in Göttingen.

Inhaltsübersicht.

Einleitung.

Nachdem Hölder bewiesen hat, daß die *Gammafunktion* keiner algebraischen Differentialgleichung genügt[1]), wurde dieselbe Eigenschaft für viele Funktionen bewiesen. Zu den interessantesten Resultaten in dieser Beziehung dürfte der Satz von Hilbert gehören, daß die *Riemann-*

[1]) Math. Ann., 28 (1887), S. 1–13, für andere Beweise des Satzes vgl. E. H. Moore, Math. Ann., 48 (1897), S. 49–74; N. Nielsen, Handbuch der Theorie der Gammafunktion, Leipzig, Teubner (1906); A. Ostrowski, Math. Ann., 79 (1919), S. 286–284.

sche ζ-Funktion keiner algebraischen Differentialgleichung genügt[2]). Im ersten Paragraphen der vorliegenden Abhandlung werde ich nun beweisen, daß dieselbe Eigenscheft *allen Dirichletschen Reihen*

$$\sum \frac{a_n}{n^s}$$

zukommt, bei denen *alle Koeffizienten* a_n *von* 0 *verschieden* sind, oder auch nur *solche Koeffizienten von* 0 *verschieden bleiben, daß die Indizes* n *dieser Koeffizienten* a_n *durch unendlich viele verschiedene Primzahlen teilbar sind.* Noch allgemeiner, jede Dirichletsche Reihe

$$\sum a_n e^{-\lambda_n s}$$

besitzt diese Eigenschaft, bei der alle λ_n sich nicht durch endlich viele unter ihnen linear ganzzahlig ausdrücken lassen, insbesondere also, wenn unter den λ_n unendlich viele linear unabhängig sind. Wir werden diesen Satz in einer insofern noch allgemeineren Gestalt beweisen (Satz 1 u. 6), als wir die Unmöglichkeit einer algebraischen *Differenzendifferentialgleichung* nachweisen, also einer Funktionalgleichung von der Form

$$\begin{gathered}F(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(\nu)}(x), f(x+h_1), \ldots, f^{(\nu_1)}(x+h_1), \ldots, \\ f(x+h_\mu), \ldots, f^{(\nu_\mu)}(x+h_\mu)) = 0,\end{gathered}$$

wo $h_1, h_2, \ldots, h_\mu$ reelle Zahlen sind, F aber ein Polynom in den in F auftretenden Argumenten ist. Dies ist insofern von Wichtigkeit, als sich mit Hilfe der hierin enthaltenen Tatsache, daß die Riemannsche ζ-Funktion keiner algebraischen *Differenzen*differentialgleichung genügt, die Richtigkeit des von Hilbert vor etwa 20 Jahren vermutungsweise als „wahrscheinlich" ausgesprochenen und seitdem noch nicht bewiesenen Satzes nachweisen läßt, daß die Funktion $\zeta(x, s)$, die für $|x| \leqq 1$, $\Re(s) > 1$ durch die Reihe definiert wird:

$$\zeta(x, s) = \frac{x}{1^s} + \frac{x^2}{2^s} + \frac{x^3}{3^s} + \ldots,$$

als Funktion der beiden Variablen x, s aufgefaßt, keiner algebraischen partiellen Differentialgleichung genügt[3]). Dieser Nachweis wird im § 2

---

[2]) Hilbert, Mathematische Probleme, C. R. du 2. congrès international des math., Paris 1902, S. 100. Die Ausführung des Beweises gibt V. E. E. Stadigh, Dissertation, Helsingfors 1902. Wegen Literaturangaben über Funktionen, die keiner algebraischen Differentialgleichung genügen, sei überhaupt auf die Einleitung zur Dissertation von Stadigh, sowie auf die Abhandlung von R. D. Carmichael, Trans. Am. M. Soc., 14 (1913), S. 311 verwiesen.

[3]) Mathematische Probleme, l. c. S. 101.

erbracht (Satz 2), und zwar mit Hilfe der von Hilbert l. c. angegebenen Funktionalgleichung

$$x\frac{\partial \zeta(x, s)}{\partial x} = \zeta(x, s-1),$$

der $\zeta(x, s)$ genügt. Dann geben wir aber für diesen Satz einen zweiten Beweis, der weder von der Hilbertschen Funktionalgleichung noch von den Entwickelungen des ersten Paragraphen Gebrauch macht, und in dessen Verlauf die Eigenschaft, keiner partiellen algebraischen Differentialgleichung zu genügen, z. B. für alle Reihen von der Form

$$\sum \frac{f_n(x)}{n^s}$$

nachgewiesen wird, wo $f_n(x)$ ein beliebiges Polynom genau vom n-ten Grade ist, und die Konvergenzbedingungen erfüllt sind (Satz 3). Im § 3 ziehen wir aus der in § 2 bewiesenen Eigenschaft von $\zeta(x, s)$ weitere Folgerungen. Es ergibt sich z. B., daß es unmöglich ist, $\zeta(x, s)$ aus beliebigen analytischen Funktionen einer Variablen und beliebigen algebraischen Funktionen mehrerer Variablen durch sukzessive Einschachtelung zu gewinnen (Satz 4)[4]). Die beim Beweis erforderlichen Eliminationen lassen sich vollständig streng und besonders einfach und übersichtlich mit Hilfe eines (selbstverständlich längst bekannten) algebraischen Lemmas durchführen, für welches ich im § 4 den auf körpertheoretischen Betrachtungen beruhenden Beweis nachtrage, und das sich bei vielen verwandten Untersuchungen in ähnlicher Weise benutzen läßt. Nachdem im § 4 noch einige Ergänzungen zu den Entwicklungen von § 1 gegeben werden, untersuchen wir im § 5 allgemeiner die Eigenschaften von analytischen Funktionen, die algebraischen Differentialgleichungen genügen können — „*algebraisch-transzendenten Funktionen*“. Die Ergebnisse von § 5 gestatten uns dann, die Sätze von § 1 und § 4 auf Potenzreihen zu übertragen. Es ergibt sich dabei z. B. der Satz, daß man aus jeder Potenzreihe durch Multiplikation gewisser Glieder mit -1 auf unendlich viele verschiedene Weisen Potenzreihen erhalten kann, die keiner algebraischen Differentialgleichung genügen (Satz 11), und einige andere Resultate, aus denen ich etwa den Satz hervorheben möchte, daß die Reihe

$$\frac{x}{1^s} + \frac{x^2}{2^s} + \frac{x^3}{3^s} + \dots$$

für keinen konstanten rationalen gebrochenen Wert von s einer algebraischen Differentialgleichung genügt. Für *irrationale* Werte von s liegt

[4]) Diese Fragestellung ist durch den bekannten Satz von Hilbert angeregt, daß es analytische Funktionen von drei Variablen gibt, die sich nicht durch endlich vielmalige Verkettung von Funktionen von zwei Variablen bilden lassen.. l. c. S. 92

wohl diese Eigenschaft sehr nahe, ich konnte jedoch keinen strengen Beweis hierfür erbringen. Im nächsten Paragraphen (§ 6) kann ich jedoch als Korollar aus einem allgemeineren Satz folgern, daß die Menge der Werte von s, für die $\zeta(x, s)$ einer algebraischen Differentialgleichung genügt, *abzählbar* ist. — Im § 6 greife ich nun die allgemeine Frage an, welche Dirichletsche Reihen überhaupt algebraischen Differentialgleichungen genügen können. Aus den Ergebnissen der beiden ersten Paragraphen folgt, daß eine solche Dirichletsche Reihe vom Typus

$$\sum \frac{a_n}{n^s}$$

die Form haben muß

$$F(n_1^{-s}, n_2^{-s}, \ldots, n_\mu^{-s}),$$

wo $F(x_1, x_2, \ldots, x_\mu)$ eine Potenzreihe in ihren μ Argumenten ist. Und man kann leicht solche Potenzreihen F bilden, die für jede Wahl der ganzen Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_\mu$ Funktionen von s darstellen, die algebraischen Differentialgleichungen genügen. Denn es gibt Funktionen $F(x_1, \ldots, x_\mu)$ mit der Eigenschaft, daß $F(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_\mu(x))$ stets einer algebraischen Differentialgleichung genügt, sobald das gleiche für $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_\mu(x)$ der Fall ist. Wir beweisen nun, daß eine Funktion $F(x_1, \ldots, x_\mu)$ dann und nur dann diese letzte Eigenschaft besitzt, wenn sie einem sogenannten Mayerschen System algebraischer partieller Differentialgleichungen genügt (Satz 15). (Unser Beweisverfahren führt zu einem noch schärferen Satz.) Genügt eine allgemeine Dirichletsche Reihe vom Typus

$$\sum a_n e^{-\lambda_n s}$$

einer algebraischen Differentialgleichung, so läßt sie sich, nach den Ergebnissen der §§ 1 und 2 in der Form darstellen

$$F(e^{-\lambda_1 s}, e^{-\lambda_2 s}, \ldots, e^{-\lambda_\mu s}),$$

wo F eine Potenzreihe ist, die nach positiven *und* negativen Potenzen ihrer Argumente fortschreitet, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu$ aber reelle positive linear unabhängige Zahlen sind. Für Dirichletsche Reihen vom Typus

$$\sum \frac{a_n}{n^s}$$

schreitet die Potenzreihe F nach positiven Potenzen ihrer Argumente fort, und nur in diesem Fall kann man auf die Existenz einer analytischen Funktion schließen, die durch die in einem gewissen Gebiete konvergente Potenzreihe F dargestellt wird. Jedenfalls kann wohl selbst im Falle der Existenz einer solchen Funktion F daraus, daß sie für ein gewisses Wertsystem linear unabhängiger $\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu$ zu einer eine algebraische Differentialgleichung befriedigenden Dirichletschen Reihe führt, noch nicht geschlossen werden, daß sie die im oben angegebenen Satz vorausgesetzte Eigenschaft besitzt. Es läßt sich aber beweisen, daß sie einer algebraischen partiellen Differentialgleichung genügt (Satz 19), und diese Eigenschaft bleibt sogar dann bestehen, wenn die Potenzreihe $F(x_1, \ldots, x_\mu)$ keinen 2μ-dimensionalen Konvergenzbereich besitzt. In diesem Falle gibt es eine partielle algebraische Differentialgleichung, der die Potenzreihe $F(x_1, \ldots, x_\mu)$ *formal* genügt. Dagegen kann bewiesen werden, und ich gebe diesen Beweis am Schlusse des § 7, daß, wenn die Funktionen $F(e^{-\lambda_1 s}, e^{-\lambda_2 s}, \ldots, e^{-\lambda_\mu s})$ für jedes linear unabhängige Wertsystem der positiven λ einer algebraischen Differentialgleichung genügen, dasselbe stets auch für

$$F(\varphi_1(s), \varphi_2(s), \ldots, \varphi_\mu(s))$$

gilt, sobald $\varphi_1(s), \ldots, \varphi_\mu(s)$ algebraischen Differentialgleichungen genügen (Satz 20). Auch diese letzten Ergebnisse lassen sich auf die nach beliebigen Potenzen von x entwickelten Integrale algebraischer Differentialgleichungen übertragen, worauf ich ebenfalls im § 7 eingehe. Diese Resultate hängen eng zusammen mit den von Poincaré, Picard und anderen entwickelten Methoden zur Untersuchung von Integralen von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung in der Umgebung kritischer Stellen[5]).

In § 8 beweise ich endlich (Satz 21 und 22), daß eine Potenzreihe

$$\sum a_i x^{n_i} \qquad (n_{i-1} < n_i < \ldots \text{ad inf.}),$$

in der nicht alle n_i sich linear ganzzahlig durch endlich viele unter ihnen darstellen lassen, keiner an der dem Wert $x = 0$ entsprechenden Stelle *analytischen* Differentialgleichung genügen kann. (Für komplexe n_i sind noch einige weitere Voraussetzungen nötig.) Durch diesen Satz wird ein Beispiel von so schweren (Verzweigungs-) Singularitäten gegeben, daß die mit ihnen behafteten Funktionen nicht einmal als Lösungen von an der entsprechenden Stelle *analytischen* Differentialgleichungen erhalten werden können. Der Beweis verläuft ganz nach demselben Schema, wie in § 1, abgesehen von einem Punkt, der bei algebraischen Differentialgleichungen selbstverständlich ist. Es handelt sich um eine Tatsache, in der insbesondere der Satz enthalten ist, daß, wenn eine analytische Funktion einer analytischen Differentialgleichung genügt, sie auch einer solchen analytischen Differentialgleichung genügt, bei der sie kein *singuläres Integral* ist. Ein direkter Beweis dieser Tatsache bietet Schwierigkeiten, da der Weierstraßsche Vorbereitungssatz bei Potenzreihen in

---

[5]) E. Picard, Traité d'Analyse, 3 (2. éd.), S. 1—40.

mehreren Variablen bekanntlich im allgemeinen erst nach einer geeigneten linearen Transformation anwendbar ist, eine solche aber bei Differentialgleichungen nicht zulässig ist. Daher mußte diese Schwierigkeit auf einem Umwege überwunden werden.

Die Hilfsmittel, mit denen die Beweise geführt werden, sind sehr elementar. Aus der Theorie der Dirichletschen Reihen wird nur der Eindeutigkeitssatz benutzt, nach dem in einer konvergenten, nach wachsendem λ geordneten Dirichletschen Reihe $\sum a_i e^{-\lambda_i s}$, die als Funktion von s für alle hinreichend große positive s verschwindet, alle Koeffizienten a_i verschwinden. Im übrigen haben sich die meisten Beweise auf einfache formal algebraische Schlüsse zurückführen lassen[6]).

§ 1.

Über die Eigenschaft einer Klasse von Dirichletschen Reihen, keiner algebraischen Differenzendifferentialgleichung zu genügen.

Definition. *Unter einer algebraischen Differenzendifferentialgleichung verstehen wir eine Funktionalgleichung von der Form:*

$$F(x, f^{(\nu)}(x+h_\mu)) = 0, \tag{1}$$

wo $h_1, h_2, \ldots$ endlich viele reelle Zahlen sind, und F eine Polynom in seinen Argumenten ist.

Hilfssatz 1. *Genügt eine analytische Funktion $\varphi(x)$ einer algebraischen Differenzendifferentialgleichung von der Form* (1), *so genügt sie auch einer Differenzendifferentialgleichung*

$$F(f^{(\nu)}(x+h_\mu)) = 0,$$

in der F die unabhängige Variable x explizit nicht enthält.

Wir können annehmen, daß F ein in seinen Argumenten irreduzibles Polynom vom Grade n ist. Differenzieren wir (1) total nach x, so entsteht eine neue Differenzendifferentialgleichung für φ

$$F^*(x, f^{(\nu)}(x+h_\mu)) = 0,$$

wo $F^*(x, f^{(\nu)}(x+h_\mu))$ ein Polynom in seinen Argumenten ist, *dessen Grad nicht höher als n ist.* Andererseits enthält F^* sicher wenigstens einen bei der Differentiation hinzukommenden Ausdruck $f^{(\nu)}(x+h_\mu)$, der in F nicht vorkommt. Daher kann F^* durch F nicht teilbar sein, und da F irreduzibel ist, wird die Resultante der Polynome F und F^* in bezug auf x ein nicht identisch verschwindendes Polynom $F^{**}(f^{(\nu)}(x+h_\mu))$ sein.

[6]) Die vorliegende Abhandlung stellt einen Abdruck einer von der philosophischen Fakultät der Universität Göttingen angenommenen Inauguraldissertation dar.

Denn sonst hätten die Polynome F und F^* einen gemeinsamen Teiler, der in bezug auf x ganz, in den Ausdrücken $f^{(\nu)}(x+h_\mu)$ rational wäre. Daher würden sie nach den bekannten Sätzen über die eindeutige Zerlegung von Polynomen in irreduzible Faktoren auch einen gemeinsamen Teiler besitzen, der in x und $f^{(\nu)}(x+h_\mu)$ *ganz* wäre, und dies ist unmöglich. Nun gilt eine Identität

$$F^{**} = M_1 F + M_2 F^*,$$

wo M_1 und M_2 Polynome in $x, f^{(\nu)}(x+h_\mu)$ sind. Daher genügt $\varphi(x)$ auch der algebraischen Differenzendifferentialgleichung

$$F^{**}(f^{(\nu)}(x+h_\mu)) = 0,$$

in der x explizite nicht vorkommt, w. z. b. w.

Durch sukzessive Anwendung desselben Beweisverfahrens beweist man ohne weiteres, daß *wenn eine analytische Funktion $\varphi(x, y, \ldots)$ einer algebraischen partiellen Differentialgleichung genügt, sie auch einer solchen algebraischen partiellen Differentialgleichung genügt, in der $x, y, \ldots$ explizit nicht vorkommen.*

Hilfssatz 2. *Es seien $\tau, \varkappa$ ganze positive Zahlen, $k_1, k_2, \ldots, k_\varkappa$ reelle untereinander verschiedene Zahlen und es werde ein Ausdruck betrachtet*

$$L(\lambda) = \sum c_{t,i}\,\lambda^t e^{\lambda k_i} \quad (t = 0, 1, \ldots, \tau;\ i = 1, 2, \ldots, \varkappa),$$

in dem nicht alle c verschwinden. Dann besitzt dieser Ausdruck als Funktion von λ nur endlich viele reelle Wurzeln.

Beweis. Besitzt $L(\lambda)$ unendlich viele reelle Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, so können wir aus ihnen jedenfalls eine Teilfolge von solchen Wurzeln herausgreifen, die gegen $+\infty$ oder $-\infty$ konvergieren. Denn sonst würden die λ_i eine Häufungsstelle im Endlichen haben, und da $L(\lambda)$ in jedem endlichen Punkte regulär ist, so müßte $L(\lambda)$ für jeden Wert von λ verschwinden, und dann kann man für $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ etwa die Zahlen $1, 2, 3, \ldots$ annehmen. Es habe daher bereits die Folge

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \ldots \qquad (\lambda_i \neq 0,\ i = 1, 2, 3 \ldots)$$

der Wurzeln von $L(\lambda)$ die Eigenschaft, daß etwa $\lim\limits_{i=\infty} \lambda_i = \infty$ ist. (Der Fall daß $\lim\limits_{i=\infty} \lambda_i = -\infty$ ist, wird auf diesen zurückgeführt, indem man anstatt $L(\lambda)$ den Ausdruck $L(-\lambda)$ betrachtet.) Es sei $c_{t_1, i_1}\lambda^{t_1} e^{\lambda k_{i_1}}$ dasjenige Glied von $L(\lambda)$ mit $c_{t_1, i_1} \neq 0$, welches das größte k_i und unter allen Gliedern von $L(\lambda)$ mit diesem k_i das größte t hat. Lassen wir in der Gleichung

$$\frac{1}{c_{t_1, i_1}} \lambda_i^{-t_1} e^{-\lambda_i k_{i_1}} L(\lambda_i) = 1 + \sum{}' \frac{c_{t,p}}{c_{t_1, i_1}} \lambda_i^{t-t_1} e^{\lambda_i (k_p - k_{i_1})} = 0$$

i unendlich werden, so erhalten wir einen Widerspruch, w. z. b. w.

Es sei nun $\varphi(s) = \sum a_i e^{-\lambda_i s}$ eine Dirichletsche Reihe, über deren Konvergenz nichts bekannt zu sein braucht, jedoch sei $\operatorname{Lim}_{i=\infty} \lambda_i = +\infty$. Es sei $F(f^{(\nu)}(s+h_\mu)) = 0$ eine algebraische Differenzendifferentialgleichung, in der s explizite nicht vorkommt. Man denke sich $\varphi(s)$ in den Ausdruck F für $f(s)$ eingetragen und das Resultat rein formal ausgerechnet und in eine Dirichletsche Reihe umgeordnet. Verschwinden alle Glieder der so entstehenden Dirichletschen Reihe, so sagen wir, $\varphi(s)$ genüge *formal* der Gleichung $F(f^{(\nu)}(s+h_\mu)) = 0$.

Wir werden im Folgenden bei jedem Ausdruck von der Form $e^{-\lambda s}$ stets λ als seinen *Exponenten* bezeichnen.

Hilfssatz 3. *Genügt eine Dirichletsche Reihe*

$$\varphi(s) = \sum_0^\infty a_i e^{-\lambda_i s} \qquad (\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots \text{ ad inf.})$$

formal einer algebraischen Differenzendifferentialgleichung

$$(2) \qquad F(f^{(\nu)}(s+h_\mu)) = 0,$$

in der s explizite nicht vorkommt, so läßt sich von einem bestimmten λ_i an jedes λ_i linear ganzzahlig durch die vorhergehenden λ_i ausdrücken.

Es sei n der Gesamtgrad des Polynoms F in bezug auf die Argumente $f^{(\nu)}(s+h_\mu)$. Wir können annehmen, daß n den kleinstmöglichen Wert hat, so daß $\varphi(s)$ gewiß keiner algebraischen Differenzendifferentialgleichung formal genügt, deren Gesamtgrad kleiner als n ist. Wir bilden nun die Ausdrücke

$$F_{\varrho,\sigma}(f^{(\nu)}(s+h_\mu)) = \frac{\partial F(f^{(\nu)}(s+h_\mu))}{\partial (f^{(\varrho)}(s+h_\sigma))}.$$

Fassen wir einen dieser Ausdrücke $F_{\varrho,\sigma}$ ins Auge, so ist er ein Polynom in $f^{(\nu)}(s+h_\mu)$, dessen Gesamtgrad kleiner als n ist. Tragen wir daher in $F_{\varrho,\sigma}$ für $f(s)$ die Reihe $\varphi(s)$ ein und rechnen das Resultat formal in eine Dirichletsche Reihe um, so können nicht alle Glieder dieser Dirichletschen Reihe verschwinden. Es sei das erste nicht verschwindende Glied der entstehenden Dirichletschen Reihe gleich $b_{\varrho,\sigma} e^{-\lambda_{\varrho,\sigma} s}$. Wir denken uns diese Anfangsglieder für jedes in Betracht kommende Zahlenpaar ϱ, σ berechnet.

Da die λ_i von einem gewissen i an positiv werden, und bei der Bildung von $F_{\varrho,\sigma}(\varphi^{(\nu)}(s+h_\mu))$ die einzelnen Glieder der Reihen $\varphi^{(\nu)}(s+h_\mu)$ höchstens $(n-1)$mal miteinander multipliziert werden, so ist klar, daß nur endlich viele Glieder der Reihen $\varphi^{(\nu)}(s+h_\mu)$ zur Bildung der Glieder $b_{\varrho,\sigma} e^{-\lambda_{\varrho,\sigma} s}$ oder der vorhergehenden Glieder in $F_{\varrho,\sigma}(\varphi^{(\nu)}(s+h_\mu))$, die sich weggehoben haben, beitragen können. Es gibt daher eine solche positive

Zahl Λ, daß, wenn wir die Reihe $\varphi(s)$ bei irgendeinem Glied mit dem Exponenten $\lambda_i > \Lambda$ abbrechen und den so entstehenden, nur aus endlich vielen Gliedern bestehenden Ausdruck in $F_{\varrho,\sigma}(f^{(\nu)}(s+h_\mu))$ für $f(s)$ eintragen, die Resultate wieder die Anfangsglieder $b_{\varrho,\sigma}\, e^{-\lambda_{\varrho,\sigma} s}$ haben werden.

Die kleinste unter den Zahlen $\lambda_{\varrho,\sigma}$ möge mit Λ_1 bezeichnet werden, und es seien etwa $\lambda_{\varrho_1,\sigma_1} = \lambda_{\varrho_2,\sigma_2} = \ldots = \lambda_{\varrho_m,\sigma_m} = \Lambda_1$, während alle übrigen $\lambda_{\varrho,\sigma} > \Lambda_1$ sein mögen.

Es werde nun für ein $\lambda_i > \Lambda$

$$\varphi(s) = A_i(s) + R_i(s), \qquad A_i(s) = \sum_0^{i-1} a_t\, e^{-\lambda_t s}, \qquad R_i(s) = \sum_i^{\infty} a_t\, e^{-\lambda_t s}$$

gesetzt. Tragen wir $A_i(s) + R_i(s)$ in $F(f^{(\nu)}(s+h_\mu))$ für $f(s)$ ein und entwickeln nach dem Taylorschen Lehrsatze, so entsteht

$$(3)\quad F(\varphi^{(\nu)}(s+h_\mu)) = F(A_i^{(\nu)}(s+h_\mu)) + \sum F_{\varrho,\sigma}(A_i^{(\nu)}(s+h_\mu))\, \frac{d^\varrho R_i(s+h_\sigma)}{d s^\varrho}$$
$$+ \sum_2 \Psi_2(R_i^{(\nu)}(s+h_\mu))\, F_2(A_i^{(\nu)}(s+h_\mu)) + \ldots$$

Hier sind $F_2, F_3, \ldots$ die zweiten, dritten usw. Ableitungen von F nach seinen Argumenten, $\Psi_2, \Psi_3, \ldots$ sind aber gewisse *homogene* Formen zweiter, dritter usw. Dimension in den $R_i^{(\nu)}(s+h_\mu)$. Daher sind die Exponenten der Anfangsglieder von $\Psi_2(R^{(\nu)}(s+h_\mu))$, $\Psi_3(R^{(\nu)}(s+h_\mu))$, $\ldots$ wenigstens gleich $2\lambda_i$, $3\lambda_i$, usw. Da aber andererseits die Gesamtgrade der Polynome $F_2, F_3, \ldots$ höchstens $n-2$, $n-3$, $\ldots$ sind, so erhalten wir für die Exponenten der Anfangsglieder des dritten, vierten usw. Bestandteils von (3) als Abschätzungen nach unten $2\lambda_i - (n-2)|\lambda_0|$, $3\lambda_i - (n-3)|\lambda_0|$, $\ldots$

Fassen wir jetzt den zweiten Bestandteil der rechten Seite von (3) ins Auge, so erhalten wir für sein Anfangsglied den Ausdruck

$$(4)\qquad a_i\, e^{-(\Lambda_1+\lambda_i)s} \sum b_{\varrho_t,\sigma_t}(-\lambda_i)^{\varrho_t}\, e^{-\lambda_i h_{\sigma_t}},$$

sofern die Summe

$$\sum b_{\varrho_t,\sigma_t}(-\lambda)^{\varrho_t}\, e^{-\lambda h_{\sigma_t}}$$

für $\lambda = \lambda_i$ von 0 verschieden bleibt. Nach dem Hilfssatz 2 besitzt aber diese Summe als Funktion von λ nur endlich viele reelle Wurzeln. Bezeichnen wir ihre größte Wurzel durch Λ_2, so wird für $\lambda_i > \Lambda + |\Lambda_1| + |\Lambda_2| + n|\lambda_0|$ das Glied (4) sich mit keinem anderen Gliede aus dem zweiten, dem dritten usw. Bestandteil der rechten Seite von (3) wegheben können. Da aber nach unserer Annahme jedes Glied der rechten Seite von (3) sich weghebt, so kommt unter den Gliedern von $F(A_i^{(\nu)}(s+h_\mu))$ ein Glied mit dem Exponenten $\Lambda_1 + \lambda_i$ vor. Daher setzt sich der Exponent $\Lambda_1 + \lambda_i$ linear ganzzahlig aus den Exponenten $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{i-1}$ der Glieder von

$A_i(s)$ zusammen. Andererseits setzt sich auch A_1 linear ganzzahlig aus $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{i-1}$ zusammen, da $\lambda_i > A_1 + n|\lambda_0|$ ist. Daher ist λ_i eine lineare ganzzahlige Funktion von $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{i-1}$, w. z. b. w.

Unter den Bedingungen des Hilfssatzes 3 lassen sich alle λ_i als ganzzahlige Linearformen derjenigen Exponenten λ darstellen, die kleiner als $A + |A_1| + |A_2| + n|\lambda_0| + 1$ sind. Das Exponentensystem λ_i von $\varphi(s)$ *besitzt* also, wie wir sagen werden, *eine endliche lineare Basis aus den Zahlen* λ_i *selbst.* Es sei etwa λ_j das letzte λ, das $< A + |A_1| + |A_2| + n|\lambda_0| + 1$ ist. $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_j$ brauchen natürlich nicht linear unabhängig zu sein. Ist die Anzahl der linear unabhängigen unter ihnen etwa α, so lassen sich bekanntlich α solche ganzzahlige Linearformen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\alpha$ von $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_j$ bilden, daß sich umgekehrt $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_j$ und daher auch alle λ_i linear ganzzahlig durch $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\alpha$ ausdrücken lassen. Setzen wir nun in die Reihe $\varphi(s)$ diese Ausdrücke der λ_i ein, so läßt sich $\varphi(s)$ auch schreiben:

$$\Phi\left(e^{-\omega_1 s}, e^{-\omega_2 s}, \ldots, e^{-\omega_\alpha s}\right),$$

wo $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_\alpha)$ eine nach ganzen positiven und negativen Potenzen von $x_1, \ldots, x_\alpha$ fortschreitende Potenzreihe ist, die allerdings vorläufig nur formal hingeschrieben werden kann, solange über die Konvergenz von $\varphi(s)$ nichts bekannt ist. — Dabei können alle ω_i positiv angenommen werden.

Aus dem Hilfssatz 3 folgt insbesondere, daß unter den Exponenten λ_i nicht unendlich viele linear unabhängig sein können, falls $\varphi(s)$ der Gleichung (2) formal genügt. Um uns über die Tragweite dieses Resultates Rechenschaft zu geben, betrachten wir speziell Dirichletsche Reihen vom Typus

$$\sum \frac{a_n}{n^s} = \sum a_n e^{-s \log n}. \tag{5}$$

Aus der Eindeutigkeit der Zerlegung der natürlichen Zahlen in Primfaktoren folgt, daß die Logarithmen sämtlicher Primzahlen linear unabhängig sind. Sind nun unter allen Zahlen $\log n$, die in (5) wirklich vorkommen, nur endlich viele linear unabhängige, so sind von einem gewissen n an alle in (5) auftretenden Zahlen $\log n$ von gewissen endlich vielen Logarithmen natürlicher Zahlen linear abhängig, etwa von $\log n_1, \log n_2, \ldots, \log n_j$. Dann enthalten aber alle in (5) wirklich auftretenden Nenner n nur solche Primfaktoren, die in $n_1, n_2, \ldots, n_j$ vorkommen. Sind also die Indizes n der von 0 verschiedenen a_n in (5) durch unendlich viele verschiedene Primzahlen teilbar, so kann (5) sicher keiner Gleichung (2) formal genügen. Kommen aber in den in (5) wirklich auftretenden Nennern nur endlich viele Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_\beta$ vor, so kann man (5) formal in der Form schreiben

$$\Psi\left(p_1^{-s}, p_2^{-s}, \ldots, p_\beta^{-s}\right),$$

wo $\Psi(x_1, x_2, \ldots, x_\beta)$ eine nach positiven Potenzen von $x_1, \ldots, x_\beta$ fortschreitende Potenzreihe ist. Besitzt aber (5) einen Konvergenzbereich (daher auch einen Bereich absoluter Konvergenz), so besitzt auch $\Psi(x_1, \ldots, x_\beta)$ einen Bereich absoluter Konvergenz und stellt in ihm eine analytische Funktion von $x_1, \ldots, x_\beta$ dar.

Satz 1. *Besitzt eine Dirichletsche Reihe*

$$\varphi(s) = \sum a_i e^{-\lambda_i s}$$

einen Bereich Ω absoluter Konvergenz und genügt die durch sie in Ω dargestellte analytische Funktion einer algebraischen Differenzendifferentialgleichung, so besitzt das System der Zahlen λ_i eine endliche lineare Basis aus den Zahlen λ_i.

Beweis. Genügt die analytische Funktion $\varphi(s)$ in Ω einer algebraischen Differenzendifferentialgleichung, so genügt sie auch, nach dem Hilfssatz 1 einer Gleichung von der Form (2) des Hilfssatzes 3. Setzen wir $\varphi(s)$ in jene Gleichung ein, und bedenken, daß auch die Reihen $\varphi^{(\nu)}(s + h_\mu)$ in einem gewissen Bereich absolut konvergieren und dort die analytischen Funktionen $\varphi^{(\nu)}(s + h_\mu)$ darstellen, so dürfen wir, da das formal gebildete Produkt von endlich vielen absolut konvergenten Dirichletschen Reihen ebenfalls einen absoluten Konvergenzbereich besitzt und in ihm das Produkt der entsprechenden Funktionen darstellt, mit der Reihe $\varphi(s)$ formal rechnen. Die so entstehende Reihe $D(s)$ besitzt einen absoluten Konvergenzbereich und stellt in ihm das Resultat der Einsetzung von $\varphi(s)$ in die linke Seite der Differenzendifferentialgleichung dar. Da aber dieses Resultat identisch verschwindet, so muß nach dem Eindeutigkeitssatze auch die Reihe $D(s)$ identisch verschwinden. Daher genügt $\varphi(s)$ *formal* einer algebraischen Differenzendifferentialgleichung von der Art der Gleichung (2) im Hilfssatz 3 und die Anwendung des Hilfssatzes 3 beweist den Satz.

§ 2.

Beweis der Eigenschaft der Reihe $x + \frac{x^2}{2^s} + \frac{x^3}{3^s} + \ldots$ und analog gebauter Reihen, keiner algebraischen partiellen Differentialgleichung zu genügen.

Wir können nun den Beweis des von Hilbert in seinem Pariser Vortrag über „Mathematische Probleme“ als „wahrscheinlich“ bezeichneten Satzes erbringen:

Satz 2. *Die Funktion*

$$\zeta(x, s) = x + \frac{x^2}{2^s} + \frac{x^3}{3^s} + \ldots$$

genügt als Funktion der Variablen x, s keiner partiellen algebraischen Differentialgleichung.

Die Funktion $\zeta(x, s)$ genügt, wie man sofort nachrechnet, der von Hilbert angegebenen Funktionalgleichung:

$$x\frac{\partial \zeta(x, s)}{\partial x} = \zeta(x, s-1). \tag{6}$$

Aus dieser Funktionalgleichung erhält man sofort die allgemeineren

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\mu} \zeta(x, s-\nu) = \zeta(x, s-\mu-\nu) \tag{7}$$

und

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\mu}\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^{\lambda} \zeta(x, s-\nu) = \frac{\partial^{\lambda}\zeta}{\partial s^{\lambda}}(x, s-\mu-\nu). \tag{8}$$

Es genüge nun $\zeta(x, s)$ einer partiellen algebraischen Differentialgleichung

$$\Phi(\zeta_{\mu,\lambda}(x, s)) = 0,$$

wo $\zeta_{\mu,\lambda}(x, s)$ für $\frac{\partial^{\mu}\partial^{\lambda}}{\partial x^{\mu}\partial s^{\lambda}}\zeta(x, s)$ gesetzt ist, und Φ ein Polynom in seinen Argumenten ist, das wir von x, s frei voraussetzen können, wegen der an den Hilfssatz 2 geknüpften Folgerung.

Die Funktionalgleichung (6) gestattet nun, die Ableitungen von $\zeta(x, s)$ nach x durch die Größen $\zeta(x, s-\nu)$ sukzessive auszudrücken:

$$\frac{\partial^{\mu}\zeta(x, s)}{\partial x^{\mu}} = \frac{1}{x^{\mu}}\zeta(x, s-\mu) + c_{\mu,\mu-1}\zeta(x, s-\mu+1) + \dots + c_{\mu,1}\zeta(x, s-1). \tag{9}$$

Hier sind die Koeffizienten c rationale Funktionen von x. Die Gleichungen (9) lassen sich offenbar nach den Größen $f(x, s-\nu)$ auflösen:

$$\zeta(x, s-\mu) = x^{\mu}\frac{\partial^{\mu}\zeta(x, s)}{\partial x^{\mu}} + \gamma_{\mu,\mu-1}\frac{\partial^{\mu-1}\zeta(x, s)}{\partial x^{\mu-1}} + \dots + \gamma_{\mu,1}\frac{\partial\zeta(x, s)}{\partial x}, \tag{10}$$

und γ sind ebenfalls rationale (sogar ganze) Funktionen von x. Differentiieren wir die Gleichungen (9) und (10) λ mal nach s, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{\mu+\lambda}\zeta(x, s)}{\partial x^{\mu}\partial s^{\lambda}} = \frac{1}{x^{\mu}}\frac{\partial^{\lambda}\zeta(x, s-\mu)}{\partial s^{\lambda}} &+ c_{\mu,\mu-1}\frac{\partial^{\lambda}\zeta(x, s-\mu+1)}{\partial s^{\lambda}} + \dots \\ &+ c_{\mu,1}\frac{\partial^{\lambda}\zeta(x, s-1)}{\partial s^{\lambda}},\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{\lambda}\zeta(x, s-\mu)}{\partial s^{\lambda}} = x^{\mu}\frac{\partial^{\mu+\lambda}\zeta(x, s)}{\partial x^{\mu}\partial s^{\lambda}} &+ \gamma_{\mu,\mu-1}\frac{\partial^{\mu+\lambda-1}\zeta(x, s)}{\partial x^{\mu-1}\partial s^{\lambda}} + \dots \\ &+ \gamma_{\mu,1}\frac{\partial^{\lambda+1}\zeta(x, s)}{\partial x\,\partial s^{\lambda}},\end{aligned} \tag{12}$$

da c und γ von s unabhängig sind. Und auch hier bilden für jeden Wert von λ die entsprechenden Gleichungssysteme (11) und (12) Auflösungen voneinander. Setzt man nun in das Polynom $\Phi(\zeta_{\mu,\lambda}(x, s))$ für die Ableitungen $\frac{\partial^{\mu+\lambda}\zeta(x, s)}{\partial x^{\mu}\partial s^{\lambda}}$ die Ausdrücke (11) ein, so entsteht ein Polynom

$$\psi\left(\frac{\partial^\varrho \zeta(x, s-\nu)}{\partial s^\varrho}\right)$$

in den Ausdrücken $\frac{\partial^\varrho \zeta(x, s-\nu)}{\partial s^\varrho}$, dessen Koeffizienten rationale Funktionen von x sind. Setzen wir in das Polynom ψ aber für seine Argumente die Ausdrücke (12) ein, so ergibt sich wieder Φ. Daher kann ψ nicht identisch verschwinden.

Wir multiplizieren nun das Polynom ψ mit einer solchen Potenz von x, daß ψ ganz auch in bezug auf x wird und dividieren durch eine möglichst große Potenz von $x-1$, falls das entstehende Polynom dann durch $x-1$ teilbar ist. Setzen wir dann $x=1$ für hinreichend große s, so entsteht aus $\zeta(x, s)$ die Dirichletsche Reihe

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots,$$

aus den Ausdrücken $\frac{\partial^\varrho \zeta(x, s-\nu)}{\partial s^\varrho}$ die Ausdrücke $\zeta^{(\varrho)}(s-\nu)$, und aus der Gleichung

$$\psi\left(\frac{\partial^\varrho \zeta(x, s-\nu)}{\partial s^\varrho}\right) = 0$$

eine algebraische Differenzendifferentialgleichung für $\zeta(s)$. Nach dem Satz 1 und den Bemerkungen, die wir an den Beweis des Hilfssatzes 3 geknüpft haben, genügt aber $\zeta(s)$ keiner algebraischen Differenzendifferentialgleichung. Damit ist der Satz 2 bewiesen.

Wir haben bei dem Beweis des Satzes 2 die Funktionalgleichung (6) benutzt, der $\zeta(x, s)$ genügt. Man kann aber durch direkte Verwendung derselben Methode, die uns zum Beweis des Hilfssatzes 3 führte, ein viel allgemeineres Resultat erhalten.

Es sei

$$F(x, s) = \sum \varphi_i(x) e^{-\lambda_i s} \qquad (\lambda_0 < \lambda_1 < \dots \text{ ad inf.})$$

eine in einem gewissen Bereiche der x-Ebene und einer gewissen s-Halbebene (ebenso wie ihre sämtliche partielle Ableitungen nach x) absolut und gleichmäßig konvergente Reihe, und es seien $\varphi_i(x)$ nicht identisch verschwindende Polynome in x, deren genaue Grade durch m_i bezeichnet werden mögen. Es genüge $F(x, s)$ einer algebraischen partiellen Differentialgleichung

$$\Phi(F_{\mu,\nu}(x, s)) = 0,$$

deren linke Seite als ein von x und s freies Polynom in den partiellen Ableitungen $F_{\mu,\nu}(x, s) = \frac{\partial^{\mu+\nu} F}{\partial x^\mu \partial s^\nu}$ angenommen werden kann. Bezeichnen wir allgemein die partiellen Ableitungen Φ nach $F_{\mu,\nu}$ durch $\Phi_{\mu,\nu}$, so dürfen wir annehmen, daß $F(x, s)$ keiner der partiellen Differentialgleichungen

$$\Phi_{\mu,\nu}(F_{\sigma,\varrho}) = 0$$

genügt. Setzt man die Reihenentwicklung für $F(x, s)$ in $\Phi_{\mu,\nu}(F_{\sigma,\varrho})$ ein und ordnet das Resultat formal wie eine gewöhnliche Dirichletsche Reihe, so kann die so entstehende Reihenentwicklung

$$\sum \psi_i(x)\, e^{-\varkappa_i s} \tag{13}$$

nicht identisch verschwinden. Denn da die Reihe für $F(x, s)$ und ihre sämtlichen partiellen Ableitungen in einem gewissen Bereich absolut konvergieren, konvergiert jedenfalls auch die Reihe (13) absolut in einem gewissen Bereich und stellt in jenem Bereich die analytische Funktion $\Phi_{\mu\nu}(F_{\sigma,\varrho})$ dar. Es sei nun das erste Glied in (13) mit nicht identisch verschwindendem ψ_i etwa $\psi_1 e^{-\varkappa_1 s}$. Brechen wir die Reihe $F(x, s)$ bei einem hinreichend großen i ab, so ändert sich dieses erste Glied nicht.

Wir stellen nun für jedes in Betracht kommende Wertepaar von μ, ν solche erste Glieder auf und suchen den kleinsten der in ihnen auftretenden Exponenten $\varkappa_1$ — er sei etwa durch $\varLambda$ bezeichnet und trete etwa bei $\Phi_{\mu_\tau, \nu_\tau}$ $(\tau = 1, 2, \ldots)$ auf. Die entsprechenden Polynome $\psi_1(x)$ seien durch $\psi^{(\tau)}(x)$, ihre genauen Grade durch $m^{(\tau)}$ bezeichnet.

Wir setzen nun

$$F(x, s) = A_i(x, s) + R_i(x, s),$$

$$A_i(x, s) = \sum_0^{i-1} \varphi_t(x)\, e^{-\lambda_t s}, \quad R_i(x, s) = \sum_i^{\infty} \varphi_t(x)\, e^{-\lambda_t s},$$

und tragen $A_i + R_i$ in Φ ein. So entsteht:

$$\begin{aligned} \Phi(F_{\sigma,\varrho}) = \Phi\left(\frac{\partial^{\sigma+\varrho} A_i}{\partial x^\sigma \partial s^\varrho}\right) + \sum_{\mu,\nu} \Phi_{\mu,\nu}\left(\frac{\partial^{\sigma+\varrho} A_i}{\partial x^\sigma \partial s^\varrho}\right) \frac{\partial^{\mu+\nu} R_i}{\partial x^\mu \partial s^\nu} \\ + \sum \Phi_2\left(\frac{\partial^{\sigma+\varrho} A_i}{\partial x^\sigma \partial s^\varrho}\right) \Psi_2\left(\frac{\partial^{\mu+\nu} R_i}{\partial x^\mu \partial s^\nu}\right) + \cdots. \end{aligned} \tag{14}$$

Hier sind $\Phi_2, \Phi_3, \ldots$ zweite, dritte, ... Ableitungen von Φ nach seinen Argumenten, $\Psi_2, \Psi_3, \ldots$ sind aber gewisse homogene Formen zweiter, dritter, ... Dimension in den Ableitungen von R_i.

Wir nehmen jetzt an, daß $\lim\limits_{i=\infty} m_i = \infty$ *ist*, und suchen unter dieser Voraussetzung dasjenige Glied der Reihenentwicklung des zweiten, dritten usw. Bestandteils von (14), dessen Exponent möglichst klein ist. Dieses Glied ist für hinreichend große i

$$\sum_\tau \psi^{(\tau)}(x) \frac{\partial^{\mu_\tau} \varphi_i(x)}{\partial x^{\mu_\tau}} (-\lambda_i)^{\nu_\tau} e^{-(\lambda_i + \varLambda) s}, \tag{15}$$

sofern es nicht identisch in x verschwindet. Denn einerseits ist für andere Werte von μ, ν der Exponent des Anfangsgliedes von $\Phi_{\mu,\nu}\left(\frac{\partial^{\sigma+\varrho} A_i}{\partial x^\sigma \partial s^\varrho}\right)$ größer als Λ, andererseits ist der Exponent des Anfangsgliedes von Ψ_2, $\Psi_3, \ldots$ wenigstens gleich $2\lambda_i$ für hinreichend große i. Da nun $\Phi(F_{\sigma,\varrho})$ identisch verschwindet, so ist für jedes hinreichend große i das Glied (15) gleich 0, oder es hebt sich mit einem Glied aus $\Phi\left(\frac{\partial^{\sigma+\varrho} A_i}{\partial x^\sigma \partial s^\varrho}\right)$ weg. Das zweite wird nun sicher unendlich oft *nicht* der Fall sein, falls entweder: 1. die Exponenten λ_i besitzen keine endliche lineare Basis, oder 2. $\operatorname*{Lim\,sup}_{i=\infty} \frac{\lambda_i}{\lambda_{i-1}} = \infty$ ist. Unter jeder von diesen Annahmen muß also

$$(16) \qquad \sum_\tau \psi^{(\tau)}(x) \frac{\partial^{\mu_\tau} \varphi_i(x)}{\partial x^{\mu_\tau}} (-\lambda_i)^{\nu_\tau}$$

für unendlich viele i verschwinden. Setzen wir in (16) den Koeffizient der höchsten Potenz von x gleich 0, so erhalten wir eine Gleichung von der Form

$$(17) \qquad \Theta(m_i, \lambda_i) = 0,$$

wo Θ ein Polynom in m_i, λ_i mit konstanten von i unabhängigen und nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten ist.

Diese letzte Gleichung kann aber sicher nicht für unendlich viele i bestehen, falls entweder m_i rascher wächst als jede Potenz von λ_i, oder λ_i rascher wächst als jede Potenz von m_i, falls also

$$\text{entweder} \quad \operatorname*{Lim}_{i=\infty} \frac{\log m_i}{\log \lambda_i} = \infty \quad \text{oder} \quad \operatorname*{Lim}_{i=\infty} \frac{\log \lambda_i}{\log m_i} = \infty$$

ist. Um zu einem schärferen Resultat zu gelangen, entwickeln wir die mit i unendlich werdenden Wurzeln m_i von (17) nach Potenzen von λ_i in der Umgebung der unendlich fernen Stelle. Wir erhalten endlich viele nach gebrochenen abnehmenden Potenzen von λ_i fortschreitende Reihenentwicklungen, die mit einer positiven Potenz von λ_i beginnen. Daraus folgt, daß unter den Häufungswerten von $\frac{\log m_i}{\log \lambda_i}$ endlich viele von 0 verschiedene rationale Zahlen vorkommen müssen. — Wir fassen das Resultat zusammen im

Satz 3. *Es sei*

$$F(x, s) = \sum \varphi_i(x) e^{-\lambda_i s} \qquad (\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots \text{ ad inf.})$$

eine in einem gewissen Bereiche der x-Ebene und einer gewissen s-Halbebene (ebensowie ihre sämtliche partielle Differentialquotienten nach x) absolut und gleichmäßig konvergente Reihe, und es seien $\varphi_i(x)$ Polynome in x mit *genauen Graden m_i, die mit wachsendem i über alle Grenzen wachsen. Es komme unter den Häufungswerten von $\frac{\log m_i}{\log \lambda_i}$ keine von 0 verschiedene rationale Zahl vor* (*dies ist sicher der Fall, falls* $\lim\limits_{i=\infty} \frac{\log m_i}{\log \lambda_i}$ *gleich* 0 *oder* ∞ *ist*). *Ist eine von den beiden Bedingungen erfüllt:*

1. *die Exponenten λ_i besitzen keine endliche lineare Basis,*
2. *es ist* $\limsup\limits_{i=\infty} \frac{\lambda_i}{\lambda_{i-1}} = \infty$,

so genügt $F(x, s)$ keiner algebraischen partiellen Differentialgleichung.

An diesem Satz ist besonders bemerkenswert, daß in ihm nur über Gradzahlen der Polynome $\varphi_i(x)$ Annahmen gemacht werden, nicht aber über ihre Koeffizienten, abgesehen von den Annahmen, die in den Konvergenzforderungen enthalten sind. Er läßt sich offenbar nach mehreren Richtungen verschärfen, insbesondere ist, wie man leicht beweisen kann, die Forderung der *absoluten* Konvergenz unwesentlich.

Da $\lim\limits_{n=\infty} \frac{\log n}{\log \log n} = \infty$ ist, ist der Satz 2 im Satz 3 enthalten.

§ 3.

Über eine Klasse analytischer Funktionen von zwei Variablen.

Wir werden in diesem Paragraphen beweisen, daß die im vorigen Paragraphen betrachteten Funktionen sich nicht aus beliebigen analytischen Funktionen einer Variablen und algebraischen Funktionen mehrerer Variablen durch sukzessive Einschachtelungen erhalten lassen. Die bei diesem Beweis (und bei den weiteren Betrachtungen dieses Paragraphen) vorkommenden Eliminationen lassen sich vollständig streng und besonders einfach und übersichtlich mit Hilfe des folgenden sehr leicht durch körpertheoretische Betrachtungen beweisbaren Lemmas begründen:

Es genüge jede der $n+1$ Funktionen

$$f_1(x_1, \ldots, x_n), \quad f_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \quad f_{n+1}(x_1, \ldots, x_n)$$

einer algebraischen Gleichung, deren Koeffizienten Polynome in $x_1, \ldots, x_n$ mit Koeffizienten aus einem beliebigen Körper K sind. Dann besteht zwischen den Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_{n+1}$ eine algebraische Relation in bezug auf den Körper K, d. h. es gibt ein solches Polynom $\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1})$ mit Koeffzienten aus dem Körper K, die nicht sämtlich verschwinden, daß

$$\Phi(f_1(x_1, \ldots, x_n), f_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_{n+1}(x_1, \ldots, x_n)) = 0$$

identisch in x_i ist.

Wir werden nun den Begriff einer *uneigentlichen* Funktion von

2 Variablen x, s einführen, und zwar werden wir für die Zwecke des Beweises uneigentliche Funktionen verschiedenen *Ranges* unterscheiden.

Als eine uneigentliche Funktion *ersten* Ranges werden wir jede analytische Funktion bezeichnen, die nur von einer der beiden Variablen x, s abhängt. Als eine uneigentliche Funktion *zweiten* Ranges $\varphi(x, s)$ bezeichnen wir jede algebraische Funktion von mehreren uneigentlichen Funktionen ersten Ranges, die ein gemeinsames Existenzgebiet in x, s besitzen. Als eine uneigentliche Funktion *dritten* Ranges bezeichnen wir eine analytische Funktion $\psi(\varphi(x, s))$ von einer uneigentlichen Funktion $\varphi(x, s)$ zweiten Ranges, unter der Voraussetzung, daß das Existenzgebiet von ψ einen Teil des Wertgebietes von φ enthält, der dem gemeinsamen Existenzgebiet der in φ vorkommenden Funktionen ersten Ranges entspricht. Allgemein soll unter einer uneigentlichen Funktion $2n$-ten Ranges eine algebraische Funktion von mehreren uneigentlichen Funktionen $(2n-1)$-ten Ranges, unter einer uneigentlichen Funktion $(2n+1)$-ten Ranges eine analytische Funktion von einer uneigentlichen Funktion $2n$-ten Ranges verstanden werden. Dabei ist aber stets an der Voraussetzung festzuhalten, daß die Existenz- und die entsprechenden Wertgebiete sämtlicher vorkommenden Funktionen *zueinander passen.*

Jede analytische Funktion von zwei Variablen, die nicht eine uneigentliche Funktion von irgendeinem endlichen Rang ist, bezeichnen wir als *eigentliche Funktion von zwei Variablen.* Die uneigentlichen Funktionen ungeraden Ranges, die zum Aufbau einer uneigentlichen Funktion dienen, bezeichnen wir als deren *Komponenten.* Eine solche Komponente besteht aus einer analytischen Funktion in einer Variablen, in die statt der Variablen eine uneigentliche Funktion geraden Ranges eingesetzt ist. Diese analytische Funktion einer Variable bezeichnen wir als die *Hauptfunktion* der Komponente. So hat z. B. die uneigentliche Funktion vierten Ranges

$$\varphi(\psi(x) + \varphi(s)) + \varphi(x) + \varphi(s)$$

vier Komponenten

$$\varphi(\psi(x) + \varphi(s)), \quad \psi(x), \quad \varphi(x), \quad \varphi(s)$$

mit den Hauptfunktionen $\varphi(z)$, $\psi(z)$, $\varphi(z)$, $\varphi(z)$.

Hat eine Komponente die Form $\varphi(\Phi(x, s))$, so bezeichnen wir die Funktion $\varphi^{(\varkappa)}(\Phi(x, s))$, wo $\varphi^{(\varkappa)}(z)$ die $\varkappa$-te Ableitung der Hauptfunktion $\varphi(z)$ ist, als die *$\varkappa$-te Derivierte der Komponente.* (Sie ist also nicht etwa mit einer der partiellen Ableitungen der Komponente identisch.)

Diese Unterscheidungen werden wichtig bei der Bildung der partiellen Ableitungen einer uneigentlichen Funktion. Es sei $\Phi(x, s)$ eine uneigentliche Funktion m-ten Ranges, und sie enthalte μ Komponenten. Bilden wir eine $\varkappa$-te partielle Ableitung von $\Phi(x, s)$, so ist sie offenbar eine algebraische Funktion der ersten $\varkappa$ Derivierten aller Komponenten von Φ, also eine algebraische Funktion von höchstens $\varkappa\mu$ Argumenten. Folglich hängen $\frac{(\varkappa+1)(\varkappa+2)}{2}$ erste partielle Ableitungen von Φ bis zur $\varkappa$-ten Ordnung algebraisch höchstens von $\varkappa\mu$ Argumenten ab. Und da für ein hinreichend großes $\varkappa$ die Zahl $\frac{(\varkappa+1)(\varkappa+2)}{2}$ größer als $\varkappa\mu$ ist, so folgt hieraus nach unserem Lemma, daß jede uneigentliche Funktion von 2 Variablen einer algebraischen partiellen Differentialgleichung genügt. Und hieraus folgt insbesondere der

Satz 4. *Sowohl die Funktion*

$$\zeta(x, s) = \frac{x}{1^s} + \frac{x^2}{2^s} + \frac{x^3}{3^s} + \dots$$

als auch allgemeiner jede Funktion, die durch eine den Bedingungen des Satzes 3 genügende Reihe dargestellt ist, ist eine eigentliche Funktion von 2 Variablen, läßt sich also nicht durch Verkettung von analytischen Funktionen einer Variable mit algebraischen Funktionen mehrerer Variablen gewinnen.

Wir können indessen darüber hinaus noch zeigen, daß die Funktionen, von denen im Satze 4 die Rede ist, nicht einmal einer partiellen Differentialgleichung genügen können, deren Koeffizienten uneigentliche Funktionen von x und s sind. Genauer gilt der

Satz 5. *Genügt eine analytische Funktion $f(x, s)$ von zwei Variablen einer partiellen Differentialgleichung, deren linke Seite ein Polynom in der unbekannten Funktion und ihren Ableitungen ist mit Koeffizienten, die uneigentliche Funktionen von zwei Variablen sind, so genügt sie auch einer solchen partiellen Differentialgleichung, deren linke Seite ein Polynom in der unbekannten Funktion und ihren Ableitungen mit Zahlenkoeffizienten ist.*

Es sei die Differentialgleichung, — unter $f_{i,k}$ allgemein $\frac{\partial^{i+k} f(x, s)}{\partial x^i \partial s^k}$ verstanden, —

$$\Phi(f_{i,k}) = 0, \tag{18}$$

der $f(x, s)$ genügt. von der m-ten Ordnung, und es sei Φ ein Polynom in bezug auf f und die partiellen Ableitungen von f, dessen Koeffizienten uneigentliche Funktionen von x, s sind. Es möge zugleich Φ eine solche Differentialgleichung von kleinstmöglicher Ordnung sein. Die Anzahl der verschiedenen Komponenten, die in den Koeffizienten von Φ auftreten, bezeichnen wir durch μ. Es sei $f_{i, m-i}$ eine in Φ wirklich auftretende Ableitung m-ter Ordnung, bei der i möglichst groß gewählt sei. Den partiellen Differentialquotienten von Φ nach dieser Ableitung bezeichnen wir durch S. Da wir m möglichst klein angenommen haben, ist S von 0 verschieden.

Bilden wir nun die $\varkappa + 1$ Gleichungen, die aus (18) durch $\varkappa$-malige „totale" Differentiation nach x und s hervorgehen,

$$\frac{d^\varkappa \Phi}{dx^\varkappa} = 0, \quad \frac{d^\varkappa \Phi}{dx^{\varkappa-1}ds} = 0, \ldots, \quad \frac{d^\varkappa \Phi}{ds^\varkappa} = 0,$$

so haben sie die Gestalt

$$(19) \quad Sf_{i+\varkappa, m-i} = \varphi_1(f_{e,n}),\ Sf_{i+\varkappa-1, m-i+1} = \varphi_2(f_{e,n}), \ldots,\ Sf_{i, m-i+\varkappa} = \varphi_{\varkappa+1}(f_{e,n}),$$

wo die φ Polynome in solchen $f_{e,n}$ sind, deren Ordnungen $e + n$ höchstens gleich $m + \varkappa$ sind. Von den $f_{e,n}$ aber, deren Ordnungen gleich $m + \varkappa$ sind, enthält $\varphi_{\varkappa+1}$ nur solche mit $e < i$, $\varphi_\varkappa$ nur solche mit $e < i + 1, \ldots,$ φ_1 nur solche mit $e < i + \varkappa$. Daher können wir von den Gleichungen (19) durch sukzessive Substitutionen zu den Gleichungen von der Form gelangen

$$(20) \quad S^l f_{i+\varkappa, m-i} = \psi_1(f_{e,n}),\ S^l f_{i+\varkappa-1, m-i+1} = \psi_2(f_{e,n}), \ldots,\ S^l f_{i, m-i+\varkappa} = \psi_{\varkappa+1}(f_{e,n}).$$

Hier sind die Argumente $f_{e,n}$ der ψ partielle Ableitungen von f bis zur $(m + \varkappa)$-ten Ordnung, von den Ableitungen $(m + \varkappa)$-ter Ordnung kommen jedoch in den ψ die Ableitungen $f_{e,n}$, bei denen $e \geqq i$, $n \geqq m - i$ ist, *nicht* vor, und die Gleichungen (20) dienen gerade dazu, diese $f_{e,n}$ durch die übrigen partiellen Ableitungen m-ter Ordnung und die partiellen Ableitungen niedrigerer Ordnung auszudrücken. Lassen wir $\varkappa$ alle ganzen Werte durchlaufen von 1 bis $\varkappa'$ und benutzen sukzessive die Gleichungen (20) für kleinere Werte von $\varkappa$, so kommen wir endlich zu den Ausdrücken, die alle $f_{e,n}$ mit $m < e + n \leqq m + \varkappa'$, $e \geqq i$, $n \geqq m - i$ durch die übrigen partiellen Ableitungen bis zur $(m + \varkappa')$-ten Ordnung rational darzustellen gestatten. Bezeichnen wir die $\frac{\varkappa'(\varkappa'+3)}{2}$ Ableitungen $f_{e,n}$ mit $m < e + n \leqq m + \varkappa'$, $e \geqq i$, $n \geqq m - i$ in irgendeiner Reihenfolge mit $p_1, p_2, \ldots,$ die übrigen partiellen Ableitungen von f bis zur $(m + \varkappa')$-ten Ordnung mit $q_1, q_2, \ldots,$ so haben wir Darstellungen von der Form

$$(21) \qquad S^l p_t = \chi_t(q_g) \qquad \left(t = 1, 2, \ldots, \frac{\varkappa'(\varkappa'+3)}{2}\right).$$

Hier sind χ und S Polynome in den Argumenten q_g mit Koeffizienten, die algebraisch in den Derivierten verschiedener Komponenten der Koeffizienten von Φ bis zur $\varkappa'$-ten Ordnung sind, also in höchstens $\mu(\varkappa' + 1)$ Größen. Fassen wir die Größen q_g als Unbestimmte auf und bezeichnen den durch ihre Adjunktion zum Körper aller komplexer Zahlen hervorgehenden Körper durch K, die in S und den χ vorkommenden Derivierten aller Komponenten der Koeffizienten von Φ und diese Komponenten selbst in irgendeiner Reihenfolge durch $x_1, x_2, \ldots,$ und nehmen wir

$\varkappa' > 2\mu$ an, so läßt sich das obige Lemma anwenden, und wir sehen, daß zwischen den Funktionen $\frac{\chi_t}{S}$ der x eine identische Relation mit Koeffizienten aus dem Körper K besteht. Daher besteht zwischen den p_t eine Relation

$$\Psi(p_t, q_g) = 0, \tag{22}$$

deren linke Seite ein Polynom in den p_t ist mit nicht identisch verschwindenden Koeffizienten, die rationale Funktionen der q_g sind. Wir können nun diese Koeffizienten offenbar auch als Polynome in den q_g annehmen und erhalten aus (22) eine algebraische partielle Differentialgleichung für $f(x, s)$. — Es liegt nahe zu vermuten, daß die Sätze 4 und 5 auch dann bestehen bleiben, wenn wir die Definition der uneigentlichen Funktionen in der Richtung erweitern, daß die zu ihrem Aufbau benutzten Funktionen einer Variablen nur stetig, nicht aber analytisch zu sein brauchen, wenn nur die uneigentlichen Funktionen selbst analytisch sind; daß also die Funktionen des Satzes 4 sich nicht aus beliebigen stetigen Funktionen einer Variablen und algebraischen Funktionen mehrerer Variablen aufbauen lassen. Es ist mir jedoch nicht gelungen, einen lückenlos strengen Beweis hierfür zu erbringen.

§ 4.

Der Hauptsatz für beliebige konvergente Dirichletsche Reihen und einige Erweiterungen des Hauptsatzes.

Satz 6. *Genügt die durch eine konvergente Dirichletsche Reihe dargestellte Funktion*

$$\varphi(s) = \sum a_i e^{-\lambda_i s}$$

einer algebraischen Differenzendifferentialgleichung, so besitzt das System der Exponenten λ_i eine endliche lineare Basis.

Beweis. Genügt die analytische Funktion $\varphi(s)$ einer algebraischen Differenzendifferentialgleichung, so genügt sie nach dem Hilfssatz 1 auch einer solchen

$$F(f^{(\nu)}(s + h_\mu)) = 0, \tag{23}$$

in der F ein von s unabhängiges Polynom in seinen Argumenten ist. Es wird daher genügen, um unseren Satz zu beweisen, zu zeigen, daß die Reihe $\varphi(s)$ auch *formal* der Gleichung (23) genügt, da dann die Behauptung aus dem Hilfssatz 3 folgt. Nehmen wir nun an, daß die Dirichletsche Reihe

$$F(\varphi^{(\nu)}(s + h_\mu)), \tag{24}$$

die sich durch das formale Umrechnen ergibt, nicht identisch verschwindet, und es sei $a e^{-\lambda s}$ ihr erstes nicht verschwindendes Glied. Zur Bildung des Exponenten λ in (24) und der Exponenten der vorhergehenden Glieder von (24), die sich weggehoben haben, haben offenbar nur endlich viele Exponenten λ_i von $\varphi(s)$ beigetragen. Z. B. sind bereits alle Exponenten $\lambda_i > n|\lambda_0| + |\lambda|$, wo n den Gesamtgrad von F bedeutet, sicher ohne jeden Einfluß. Ändern wir daher $\varphi(s)$ in solchen Gliedern irgendwie ab, denen $\lambda_i > n|\lambda_0| + |\lambda|$ entsprechen, so ist das Anfangsglied des Resultats der Einsetzung der so abgeänderten Reihe wieder $a e^{-\lambda s}$. Brechen wir die Reihe $\varphi(s)$ bei irgendeinem hinreichend großen λ_i ab, so ist die Differenz zwischen $\varphi(s)$ und dem entstehenden Abschnitt

$$A_i(s) = \sum_0^{i-1} a_i e^{-\lambda_p s}$$

von $\varphi(s)$ eine Funktion $R_i(s)$, die sich wegen der gleichmäßigen Konvergenz Dirichletscher Reihen in der Form schreiben läßt

$$e^{-\lambda_i s} S(s),$$

wo $\lim\limits_{s=\infty} S(s) = a_i$ ist. — Hier und im folgenden ist die Bezeichnung $\lim\limits_{s=\infty}$ so zu verstehen, daß dabei s durch reelle positive Werte läuft. — Und ebenso läßt sich dann schreiben

$$(25) \qquad \varphi^{(\nu)}(s + h_\mu) = A_i^{(\nu)}(s + h_\mu) + e^{-\lambda_i s} S^{(\nu,\mu)}(s),$$

wo $\lim\limits_{s=\infty} S^{(\nu,\mu)}(s)$ eine endliche Konstante ist. Setzt man jetzt in die Gleichung (23) $\varphi(s) = A_i(s) + e^{-\lambda_i s} S(s)$ und die Ausdrücke (25) ein, und entwickelt nach dem Taylorschen Lehrsatz, so entsteht eine Gleichung von der Form

$$(26) \qquad F(A_i^{(\nu)}(s + h_\mu)) + e^{-(\lambda_i - n|\lambda_0|)s} \Phi(s) = 0,$$

wo $\lim\limits_{s=\infty} \Phi(s)$ *endlich* ist. Andererseits läßt sich $F(A_i^{(\nu)}(s + h_\mu))$ in der Form schreiben

$$e^{-\lambda s} P(s),$$

wo $\lim\limits_{s=\infty} P(s) = a \neq 0$ ist, sofern $\lambda_i > |\lambda| + n|\lambda_0|$ ist. Setzen wir aber dies in (26) ein, multiplizieren mit $e^{\lambda s}$ und lassen dann s gegen $+\infty$ konvergieren, so erhalten wir, sobald $\lambda_i > |\lambda| + n|\lambda_0|$ ist, $a = 0$, was der Annahme widerspricht. W. z. b. w.

Kehren wir noch einmal zum Beweis des Hilfssatzes 3 im § 1 zurück und namentlich zur Gleichung (3). Wir hatten aus ihr gefolgert, daß für jedes hinreichend große λ_i in $F(A_i^{(\nu)}(s + h_\mu))$ ein Glied mit dem

Exponenten $A_1 + \lambda_i$ vorkommt. Da aber F vom Gesamtgrade n ist, entsteht jeder Exponent, der bei den Gliedern von $F(A_i^{(\nu)}(s + h_\mu))$ auftritt, aus höchstens n Zahlen durch Addition, von denen jede einer der Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{i-1}$ gleich ist. Wir erhalten daher für λ_i die Relation $|A_1 + \lambda_i| \leqq n |\lambda_{i-1}|$, aus der, da A_1 konstant ist,

$$\operatorname*{Lim\,sup}_{i=\infty} \frac{\lambda_i}{\lambda_{i-1}} \leqq n$$

folgt. Wir gelangen zu dem Satze:

Satz 7. *Eine konvergente Dirichletsche Reihe*

$$\sum a_i e^{-\lambda_i s},$$

bei der

$$\operatorname*{Lim\,sup}_{i=\infty} \frac{\lambda_i}{\lambda_{i-1}} = \infty$$

ist, kann keiner algebraischen Differenzendifferentialgleichung genügen.

Wir fassen nun wieder die Gleichung (3) des Beweises des Hilfssatzes 3 ins Auge, nehmen jetzt jedoch an, daß alle Zahlen $h_\mu = 0$ sind, daß also die Gleichung $F(f^{(\nu)}(s + h_\mu)) = 0$ sich auf die Form $F(f^{(\nu)}(s)) = 0$ reduziert und daher zu einer *Differential*gleichung wird. Dann muß der Ausdruck, der aus (4) entsteht, wenn wir noch für b_{ϱ_t, σ_t} einfach b_{ϱ_t} setzen,

$$a_i e^{-(A_1+\lambda_i)s} \sum b_{\varrho_t}(-\lambda_i)^{\varrho_t} \tag{27}$$

in $F(A_i^{(\nu)}(s))$ für hinreichend große i enthalten sein, daher muß der Koeffizient

$$a_i \sum b_{\varrho_t}(-\lambda_i)^{\varrho_t}$$

von (27) sich rational mit rationalen Koeffizienten durch die Koeffizienten von F, durch $a_0, \ldots, a_{i-1}$, $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{i-1}$ ausdrücken lassen. Da aber sich alle λ_i ganzzahlig linear durch endlich viele unter ihnen ausdrücken lassen, so können wir alle a_i sukzessive durch die Koeffizienten von F, durch b_{ϱ_t} und eine endliche Anzahl gewisser Zahlen unter a_i und λ_i, also durch *endlich viele Zahlen* rational mit rationalen Koeffizienten darstellen. — Wir werden sagen, daß ein System von Zahlen $k_1, k_2, \ldots$ *eine endliche Basis* besitzt, wenn es endlich viele solche Zahlen $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_r$ gibt, daß sich alle k_i als rationale Funktionen mit rationalen Koeffizienten von $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_r$ darstellen lassen. Das System der Zahlen $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_r$ wollen wir dann als *Basis* der Zahlen k_i bezeichnen. Mit Hilfe dieser Bezeichnung können wir dann den Satz aussprechen:

Satz 8. *Eine Dirichletsche Reihe*

$$\sum a_i e^{-\lambda_i s},$$

bei der das System der Koeffizienten a_i keine endliche Basis besitzt, genügt keiner algebraischen Differentialgleichung.

Die Anwendung dieses Satzes wird dadurch vereinfacht, daß es im Falle der Existenz einer Basis genügt, für die Zahlen der Basis des Systems der a_i gewisse *unter den a_i selbst* zu nehmen. Es gilt nämlich der

Hilfssatz 4. *Besitzt ein System von Zahlen $k_1, k_2, \ldots$ eine endliche Basis, so besitzt es auch eine endliche Basis, deren Elemente in diesem System selbst enthalten sind.*

Der Beweis erfordert den Nachweis der Ausführbarkeit gewisser Eliminationen, der auf direktem Wege mit Hilfe der allgemeinen Eliminationstheorie nur sehr umständlich zu führen wäre. Diese Schwierigkeiten lassen sich aber umgehen, wenn man gewisse körpertheoretische Betrachtungen heranzieht. Wir stützen uns dabei auf einige Sätze aus der grundlegenden Arbeit von E. Steinitz: *Algebraische Theorie der Körper*[7]), und namentlich aus dem § 22 der Steinitzschen Arbeit.

Man lege einen Körper $\mathfrak{K}$ zugrunde und betrachte im übrigen nur Größen, die in einem festen $\mathfrak{K}$ umfassenden Körper $\mathfrak{L}$ (einer „Erweiterung" von $\mathfrak{K}$) enthalten sind. Eine Größe a von $\mathfrak{L}$ nennt man *algebraisch* in bezug auf $\mathfrak{K}$, wenn sie Wurzel eines Polynoms in einer Variablen mit Koeffizienten aus $\mathfrak{K}$ ist. Ist $\mathfrak{S}$ ein System von Größen, so nennt man eine Größe *a algebraisch abhängig* von $\mathfrak{S}$ (in bezug auf $\mathfrak{K}$), wenn a in bezug auf den Körper $\mathfrak{K}(\mathfrak{S})$ algebraisch ist, der aus $\mathfrak{K}$ durch Adjunktion aller Größen von $\mathfrak{S}$ entsteht. Ein Größensystem $\mathfrak{S}'$ nennt man algebraisch abhängig von $\mathfrak{S}$, wenn jede Größe von $\mathfrak{S}'$ von $\mathfrak{S}$ algebraisch abhängt. Es gilt nun der Satz: Hängt $\mathfrak{S}_3$ von $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_2$ von $\mathfrak{S}_1$ algebraisch ab, so hängt $\mathfrak{S}_3$ von $\mathfrak{S}_1$ algebraisch ab. Daher sind wir berechtigt, zwei Systeme $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ *äquivalent* zu nennen, wenn jedes vom anderen algebraisch abhängt. Ein System $\mathfrak{S}$, welches keinem echten Teil von sich äquivalent ist und nicht aus einer in bezug auf $\mathfrak{K}$ algebraischen Größe besteht, nennt man *irreduzibel*. Wir werden nun folgende Sätze zu benutzen haben:

1) *Ein irreduzibles System $\mathfrak{V}$, welches von einem endlichen System $\mathfrak{U}$ algebraisch abhängt, kann nicht mehr Elemente enthalten als dieses*[8]).

2) *Es seien $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ endliche irreduzible Systeme von m bzw. n Größen, und es sei $\mathfrak{V}$ algebraisch abhängig von $\mathfrak{U}$. Dann sind im Falle $m = n$ die Systeme $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ äquivalent, im Falle $n < m$ ist aber $\mathfrak{U}$ einem irreduziblen System äquivalent, welches aus $\mathfrak{V}$ und $m - n$ Größen von $\mathfrak{U}$ besteht*[9]).

---

[7]) Crelles Journal für Mathematik, **137** (1910), S. 167–309.

[8]) l. c. S. 292.

[9]) l. c. S. 291–292.

Bevor wir weiter gehen, wollen wir aus 1) eine Folgerung ziehen, die wir bereits angewandt haben und die auch in den folgenden Paragraphen wiederholt zu verwenden sein wird. Dies ist das folgende

Lemma. *Zwischen beliebigen* $n+1$ *algebraischen Funktionen der* n *Variablen* $x_1, \ldots, x_n$

$$f_1(x_1, \ldots, x_n), \ \ldots, \ f_{n+1}(x_1, \ldots, x_n)$$

mit Koeffizienten aus einem Körper K besteht stets eine algebraische Relation mit Koeffizienten aus K, d. h. es gibt ein solches Polynom $\Phi(y_1, \ldots, y_{n+1})$ *mit Koeffizienten aus* K, *die nicht alle* 0 *sind, daß die Größe*

$$\Phi(f_1(x_1, \ldots, x_n), f_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_{n+1}(x_1, \ldots, x_n))$$

für unbestimmte x verschwindet[10]).

In der Tat, das System $\mathfrak{B}$ der $n+1$ Größen $f_1(x_i), \ldots, f_{n+1}(x_i)$ hängt algebraisch vom System $\mathfrak{U}$ der n Größen $x_1, \ldots, x_n$ in bezug auf K ab, kann daher nach 1. nicht irreduzibel sein, da es mehr als n Größen enthält. Es ist daher einem echten Teil von sich äquivalent, etwa

$$(28) \qquad f_1(x_i), \ f_2(x_i), \ \ldots, \ f_n(x_i).$$

Folglich hängt $f_{n+1}(x_i)$ vom System (28) algebraisch ab, genügt also einer Gleichung

$$\Phi(z, f_1, \ldots, f_n) \equiv a_0(f_k)z^l + a_1(f_k)z^{l-1} + \ldots + a_l(f_k) = 0,$$

in der $a_0(f_k), a_1(f_k), \ldots, a_l(f_k)$ Größen des Körpers $K(f_1, \ldots, f_n)$ sind. Wir können sie nun als Polynome in $f_1, \ldots, f_n$ annehmen, indem wir nötigenfalls Φ mit einem Polynom in $f_1, \ldots, f_n$ multiplizieren. Sind aber $a_0, \ldots, a_l$ Polynome in den f_k, so hat das Polynom $\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1})$ die im Lemma behauptete Eigenschaft.

Wir kehren nun zum Beweise des Hilfssatzes 4 zurück und nehmen an, daß das System (k_i) eine endliche Basis aus den Zahlen $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\alpha$ besitzt. Den Körper der rationalen Zahlen bezeichnen wir durch R und legen ihn den folgenden Betrachtungen zugrunde, als den Körper $\mathfrak{K}$ der Steinitzschen Sätze. Sind alle Zahlen $\varkappa$ algebraisch, so ist der Körper $R(k_i)$ im endlichen Körper $R(\varkappa_i)$ enthalten, ist daher mit einem seiner Teiler, den wir etwa mit R_1 bezeichnen wollen, identisch. Ist etwa α eine primitive Zahl von R_1, so muß sich α durch endlich viele k_i rational mit rationalen Koeffizienten ausdrücken, etwa durch $k_1, k_2, \ldots, k_r$. Da aber auch jedes k_i sich durch α rational mit rationalen Koeffizienten

[10]) Hieraus folgt natürlich sofort, daß $f_1, \ldots, f_{n+1}$ auch im gewöhnlichen Sinne, als analytische Funktionen von $x_1, \ldots, x_n$ aufgefaßt, abhängig sind.

ausdrückt, bilden die Zahlen $k_1, k_2, \ldots, k_r$ eine endliche Basis des Systems (k_i). — Sind aber nicht alle $\varkappa_i$ algebraisch, so ist $\mathfrak{S} = (\varkappa_i)$ entweder irreduzibel oder einem irreduziblen Teilsystem Σ äquivalent, welches aus b Zahlen $\varkappa_i$ bestehen mag, etwa aus $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_b$. Dann sind alle übrigen Zahlen $\varkappa_i$, sofern nicht $a = b$ ist, algebraisch in bezug auf $R(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_b)$.

Andererseits muß auch das System (k_i) einem aus endlich vielen Zahlen k_i bestehenden irreduziblen System äquivalent sein, sofern nicht alle k_i algebraische Zahlen sind. Denn ist etwa $T = (k_1, k_2, \ldots, k_c)$ ein irreduzibles Teilsystem der k_i, so ist T von Σ algebraisch abhängig, und daher ist nach 1) $c \leqq b$. Ist aber T so gewählt, daß $c > 0$ und den größtmöglichen Wert hat, so ist jedes k_i algebraisch abhängig von T. Denn das System (T, k_i) besteht aus $c + 1$ Größen und muß daher einem irreduziblen Teilsystem T' äquivalent sein, von dem dann k_i algebraisch abhängig ist. Andererseits ist T von (T, k_i) algebraisch abhängig, daher auch von T'. Dann muß nach 1) die Anzahl der Größen von T' gleich c sein, nach 2) müssen T und T' äquivalent sein, daher ist k_i auch von T algebraisch abhängig, und T mit (k_i) äquivalent.

Das System T ist, falls nicht alle k_i algebraische Zahlen sind, von Σ algebraisch abhängig. Daher ist dann 2) anwendbar, und das System Σ ist einem System $(k_1, k_2, \ldots, k_c, y_1, y_2, \ldots, y_{b-c})$ äquivalent. Wir wollen $k_1, k_2, \ldots, k_c$ lieber durch $x_1, x_2, \ldots, x_c$ bezeichnen, wobei diese Größen gar nicht aufzutreten brauchen, falls alle k_i algebraische Zahlen sind, und c also $= 0$ ist. Adjungieren wir zum Körper $R(x_1, \ldots, x_c, y_1, \ldots, y_{b-c})$ alle $\varkappa_i$, so entsteht eine endliche algebraische Erweiterung K, in der alle Größen k_i enthalten sind. Dabei sind aber k_i bereits in bezug auf $R(x_1, \ldots, x_c)$ algebraisch. Ist nun $b = c$, so treten keine Größen y auf, und alle k_i sind in einem endlichen Körper über $R(x_1, \ldots, x_c)$ enthalten, bestimmen daher selbst einen endlichen Körper über $R(x_1, \ldots, x_c)$, dessen irgendeine primitive Größe durch β bezeichnet werden mag. Dann drückt sich β rational mit rationalen Koeffizienten durch endlich viele k_i und $x_1, \ldots, x_c$ aus. Andererseits drücken sich alle k_i rational mit rationalen Koeffizienten durch β und $x_1, \ldots, x_c$ aus. Und da $x_1, \ldots, x_c$ selbst gewisse unter den k_i sind, so ist in diesem Falle der Hilfssatz 4 bewiesen.

Es sei jetzt $b > c$. Adjungieren wir alle k_i zum Körper $R(x_1, \ldots, x_c)$, bzw., falls $c = 0$ ist, zum Körper R, so entsteht ein algebraischer Körper K über $R(x_1, \ldots, x_c)$, und es genügt zu beweisen, daß K endlich in bezug auf $R(x_1, \ldots, x_c)$ ist. Denn dann drücken sich alle k_i durch eine primitive Größe γ von K und $x_1, \ldots, x_c$ rational mit rationalen Koeffizienten aus, und da $x_1, \ldots, x_c$ gewisse unter den k_i sind, ist dann der Hilfssatz 4 bewiesen. Ist nun aber m der Grad von K in bezug auf $R(x_1, \ldots, x_c,$

$y_1, \ldots, y_{b-c}$), so behaupten wir, daß der Grad von K in bezug auf $R(x_1, \ldots, x_c)$ höchstens m ist, d. h. daß zwischen $m+1$ beliebigen Größen

$$(29) \qquad k', k'', \ldots, k^{(m+1)}$$

von K eine Relation mit nicht sämtlich verschwindenden $u_t(x_i)$ besteht:

$$(30) \qquad u_1(x_i)k' + u_2(x_i)k'' + \ldots + u_{m+1}(x_i)k^{(m+1)} = 0,$$

in der die Größen $u_t(x_i)$ aus $R(x_1, \ldots, x_c)$ rationale Funktionen der x mit rationalen Koeffizienten sind, bzw. rationale Zahlen, falls $c=0$ ist. Da der Grad von K gleich m ist und die Zahlen (29) dem Körper K angehören, besteht eine Relation

$$(31) \qquad v_1(x_i, y_i)k' + v_2(x_i, y_i)k'' + \ldots + v_{m+1}(x_i, y_i)k^{(m+1)} = 0,$$

in der $v_t(x_i, y_i)$ rationale Funktionen in den x_i, y_i mit rationalen Koeffizienten sind und nicht sämtlich verschwinden. Wir können offenbar alle v_t als *Polynome* in den x_i, y_i annehmen. Kommen in ihnen y_i gar nicht vor, so ist unsere Behauptung bewiesen. Enthalten aber die v auch gewisse y, so ordnen wir (31) rein formal nach Potenzprodukten der y um. So erhalten wir eine Gleichung von der Form

$$(32) \qquad \sum_j Y_j\left(w_1^{(j)}(x_i)k' + w_2^{(j)}(x_i)k'' + \ldots + w_{m+1}^{(j)}(x_i)k^{(m+1)}\right) = 0,$$

in der nicht alle $w_t^{(j)}(x_i)$ verschwinden. Besteht nun keine Relation von der Form (30), so sind in (32) nicht alle Koeffizienten verschiedener Potenzprodukte der y gleich 0. Dividieren wir (32) durch den größten gemeinsamen Teiler aller Potenzprodukte Y_j, so muß nach Division wenigstens ein y in (32) wirklich vorkommen, da in (32) sonst nur ein Y vor der Division auftreten würde, was eine Gleichung von der Form (30) nach sich zieht. Es würde also ein gewisses Polynom in $y_1, \ldots, y_{b-c}$, dessen Koeffizienten algebraisch von $x_1, \ldots, x_c$ abhängen und nicht sämtlich 0 sind, verschwinden. Dies widerspricht aber der Annahme, daß das System $x_1, \ldots, x_c, y_1, \ldots, y_{b-c}$ irreduzibel ist. Damit ist der Hilfssatz 4 vollständig bewiesen [11]).

Aus diesem Hilfssatz ergibt sich folgende Verschärfung des Satzes 8:

Satz 8'. *Gibt es ein solches Teilsystem $\mathfrak{S}$ der Koeffizienten a_i einer Dirichletschen Reihe*

$$(33) \qquad \sum a_i e^{-\lambda_i s},$$

[11]) Die im letzten Teil des Beweises bewiesene Tatsache ist im wesentlichen mit einem von Herrn I. Schur, Berliner Sitzungsber. (1911), S. 619 ff. bewiesenen Hilfssatz identisch.

dessen Zahlen sich nicht durch endlich viele, demselben Teilsystem angehörende Zahlen rational mit rationalen Koeffizienten ausdrücken lassen, so genügt diese Reihe keiner algebraischen Differentialgleichung.

Insbesondere genügt also (33) keiner algebraischen Differentialgleichung, wenn unter den Zahlen a_i unendlich viele algebraische Zahlen vorkommen, die in keinem endlichen algebraischen Zahlkörper alle zugleich enthalten sind, z. B. unendlich viele verschiedene Einheitswurzeln.

§ 5.

Über den Begriff der algebraisch-transzendenten Funktion.

Um die in den vorhergehenden Paragraphen gefundenen Resultate weiter ausbauen und auch auf Potenzreihen anwenden zu können, müssen wir zuerst auf allgemeine Eigenschaften von Funktionen einer Variablen eingehen, die algebraischen Differentialgleichungen genügen. Mit E. H. Moore werden wir solche Funktionen, die einer algebraischen Differentialgleichung genügen, als *algebraisch-transzendente Funktionen* bezeichnen[12]).

Als einen *Rationalitätsbereich* R wollen wir in diesem Paragraphen einen Körper von analytischen Funktionen verstehen, die alle einen gemeinsamen Existenzbereich $G(R)$ besitzen, in welchem jede von ihnen bis auf isolierte Punkte regulär analytisch ist. Außerdem wollen wir annehmen, daß mit jeder in R vorkommenden Funktion auch ihre sämtlichen Ableitungen in R vorkommen. Eine in $G(R)$ existierende Funktion $f(x)$, die einer Differentialgleichung

$$\Phi(f^{(i)}) = 0$$

genügt, wo Φ ein Polynom in f und den Ableitungen von f mit Koeffizienten aus R ist, nennen wir *algebraisch-transzendent in bezug auf* R.

Es sei nun $g(x)$ eine algebraisch-transzendente Funktion in bezug auf R, $f(x)$ eine algebraisch-transzendente Funktion in bezug auf den Rationalitätsbereich $R(g)$, der aus R durch Adjunktion von $g(x)$ und sämtlichen Ableitungen von $g(x)$ hervorgeht. Wir behaupten, daß *dann* $f(x)$ *algebraisch-transzendent in bezug auf* R *ist.* Es genüge $g(x)$ einer Differentialgleichung m-ter Ordnung

$$\Phi(g^{(i)}) = 0, \tag{34}$$

deren linke Seite ein Polynom in $g, g', \ldots, g^{(m)}$ mit Koeffizienten aus R ist, aber keiner solchen Differentialgleichung niedrigerer Ordnung oder derselben Ordnung und vom niedrigeren Grad in $g^{(m)}$. Dann läßt sich durch sukzessive Differentiation der Gleichung (34) jede der weiteren Ableitungen

[12]) Math. Ann., 48 (1897), S. 49.

$g^{(m+1)}, g^{(m+2)}, \ldots$ von g rational mit Koeffizienten aus R durch $g, g', \ldots, g^{(m)}$ darstellen, wobei als Nenner eine Potenz von $S = \frac{\partial \Phi}{\partial g^{(m)}}$ auftritt, dieser letzte Ausdruck aber sicher nicht identisch verschwindet. Es genüge nun $f(x)$ einer Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$\psi(f^{(i)}) = 0, \tag{35}$$

wo $\psi(f^{(i)})$ ein Polynom in $f, f', \ldots, f^{(n)}$ mit Koeffizienten aus $R(g)$ ist, und keiner Differentialgleichung niedrigerer Ordnung, oder n-ter Ordnung und vom niedrigeren Grad in bezug auf $f^{(n)}$. Daher ist $T = \frac{\partial \psi}{\partial f^{(n)}}$ sicher von 0 verschieden. Durch sukzessive Differentiation der Gleichung (35) kann man alle weiteren Ableitungen $f^{(n+1)}, f^{(n+2)}, \ldots$ rational durch $f, f', \ldots, f^{(n)}$ und $g, g', \ldots$ ausdrücken, wobei als Nenner nur eine Potenz von T auftritt. Setzt man für $g^{(m+1)}, g^{(m+2)}, \ldots$ ihre Ausdrücke ein, so kann man alle Ableitungen $f^{(n+1)}, f^{(n+2)}, \ldots$ rational durch $f, f', \ldots, f^{(n)}$, $g, g', \ldots, g^{(m)}$ mit Koeffizienten aus R ausdrücken, wobei als Nenner nur Potenzenprodukte von T und S auftreten. Die Anwendung des Lemmas aus § 3 beweist die Existenz einer rationalen Relation mit Koeffizienten aus R zwischen einer hinreichend großen Anzahl der Ableitungen von f. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Es seien nun $g_1, g_2, \ldots, g_k$ in bezug auf R algebraisch-transzendente Funktionen, und f sei algebraisch-transzendent in bezug auf $R(g_1, g_2, \ldots, g_k)$. Dann ist nach dem soeben Bewiesenen f algebraisch-transzendent in bezug auf $R(g_2, g_3, \ldots, g_k)$, daher auch in bezug auf $R(g_3, \ldots, g_k)$ usw., daher auch in bezug auf R selbst. Hieraus folgt:

Satz 9. *Genügt eine analytische Funktion $f(x)$ einer Differentialgleichung*

$$\Phi(f^{(i)}) = 0,$$

deren linke Seite ein Polynom in $f, f', f'', \ldots$ ist mit Koeffizienten, die algebraisch-transzendent in bezug auf einen Rationalitätsbereich R, so ist $f(x)$ selbst algebraisch-transzendent in bezug auf R, falls $f(x)$ im Definitionsbereich von R existiert.

Dieser letzte Zusatz ist nötig, da $f(x)$ von $G(R)$ durch eine natürliche Grenze getrennt sein könnte, während der gemeinsame Existenzbereich der Koeffizienten von Φ sowohl $G(R)$ als auch den Existenzbereich von $f(x)$ enthalten könnte.

Außerdem aber folgt aus der obigen Betrachtung, daß *jede rationale Funktion von algebraisch-transzendenten Funktionen in bezug auf R selbst algebraisch-transzendent in bezug auf R ist.*[13]) Und allgemeiner

[13]) Diesen Satz gibt Stadigh (l. c. S. 5).

gilt dasselbe auch für jede *algebraische* Funktion von algebraisch-transzendenten Funktionen in bezug auf R. —

Wir spezialisieren nun R zum Körper aller Konstanten, betrachten also von jetzt an nur algebraisch-transzendente Funktionen schlechthin. Es seien $g(x)$ und $f(x)$ algebraisch-transzendente Funktionen, und es habe der Wertbereich von $g(x)$ ein gemeinsames Gebiet mit dem Existenzbereich von $f(x)$. Betrachten wir die Funktion $f(g(x)) = \varphi(x)$. Man kann, falls $g(x)$ keine Konstante ist, die Funktionen $f^{(i)}(g(x))$, die aus den Ableitungen von $f(x)$ durch das Einsetzen von $g(x)$ entstehen, rational durch die Ableitungen von $\varphi(x)$ und von $g(x)$ ausdrücken, wobei als Nenner eine Potenz von $g'(x)$ auftritt. Nun genügt $f(x)$ nach dem Hilfssatz 1 einer algebraischen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, in der also x nicht explizit vorkommt. Setzen wir in sie für $f(x), f'(x), f''(x), \ldots$ die Ausdrücke von $f(g(x)), f'(g(x)), f''(g(x)), \ldots$ in den Ableitungen von $\varphi(x)$ und von $g(x)$ ein, so entsteht eine rationale Relation zwischen den Ableitungen von $\varphi(x)$ und $g(x)$, die nicht identisch besteht, da sie für $g(x) = x, \varphi(x) = f(x)$ wieder zur Ausgangsdifferentialgleichung für $f(x)$ wird. Aus dem Satz 9 folgt nun, daß $\varphi(x) = f(g(x))$ *selbst eine algebraische-transzendente Funktion ist.*

Diese Tatsache gibt uns die Möglichkeit, analytische Funktionen mehrerer Variablen zu konstruieren, die die Eigenschaft besitzen, daß, wenn man in sie für die Variablen algebraisch-transzendente Funktionen von x einsetzt, sich wieder eine algebraisch-transzendente Funktion ergibt. Man bilde beliebige algebraische Funktionen von algebraisch-transzendenten Funktionen irgendwelcher Variablen $x, y, z, \ldots$ So erhaltene Funktionen setze man wieder in beliebige algebraisch-transzendente Funktionen als Variablen ein, von den so entstehenden Funktionen nehme man wieder beliebige algebraische Funktionen usw. Man wiederhole also den Prozeß, der im § 3 zur Bildung von uneigentlichen Funktionen von zwei Variablen geführt hat, nur mit dem Unterschied, daß jetzt nicht mehr ***beliebige analytische*** Funktionen einer Variablen und algebraische Funktionen von zwei Variablen kombiniert werden, sondern ***algebraisch-transzendente*** Funktionen einer Variablen und algebraische Funktionen ***beliebig vieler*** Variablen. Und ebenso wie dort ist darauf zu achten, daß die Existenz- und die entsprechenden Wertgebiete der vorkommenden Funktionen zueinander passen. Jede so entstehende Funktion $f(x, y, z, \ldots)$ hat nach unseren Sätzen in der Tat die Eigenschaft, daß $f(\varphi(x), \psi(x), \chi(x), \ldots)$ algebraisch-transzendent ist, sobald $\varphi(x), \psi(x), \chi(x), \ldots$ es sind. Im nächsten Paragraphen werden wir die allgemeinsten Funktionen aufstellen, die diese Eigenschaft besitzen. — Wir bemerken noch, daß wenn eine solche Funktion

$f(x, y, z, \ldots)$ nach ganzen positiven Potenzen von $x, y, z, \ldots$ entwickelbar ist, insbesondere die Dirichletsche Reihe

$$f(e^{-\lambda_1 s},\ e^{-\lambda_2 s}, \ldots)$$

für positive $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ auch eine algebraisch-transzendente Funktion ist.

Aus jeder Potenzreihe

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots,$$

die in einer Umgebung des Nullpunktes konvergiert und eine algebraisch-transzendente Funktion darstellt, geht durch die Substitution $x = e^{-s}$ nach dem oben Bewiesenen eine Dirichletsche Reihe hervor, die (einen Bereich absoluter Konvergenz besitzt und dort) eine algebraisch-transzendente Funktion darstellt. Wir können daher die Sätze 7 und 8′ auf gewöhnliche Potenzreihen übertragen. Aus dem Satz 8′ erhalten wir den

Satz 10. *Gibt es ein Teilsystem der Koeffizienten einer in einer Umgebung des Nullpunktes konvergenten Potenzreihe*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots,$$

dessen Elemente sich nicht durch endlich viele unter ihnen rational mit rationalen Koeffizienten darstellen lassen, so ist die durch diese Potenzreihe dargestellte Funktion $f(x)$ nicht algebraisch-transzendent.

Hieraus folgt z. B., daß die Reihe

$$\zeta(x, \nu) = \frac{x}{1^\nu} + \frac{x^2}{2^\nu} + \frac{x^3}{3^\nu} + \cdots \tag{36}$$

für jedes rationale nicht ganze ν keiner algebraischen Differentialgleichung als Funktion von x genügt. Denn die algebraischen Zahlen $2^\nu, 3^\nu, \ldots$ können in keinem endlichen Zahlkörper liegen, z. B. weil sonst die Diskriminante dieses Zahlkörpers durch die Diskriminante jedes Unterkörpers teilbar sein müßte, also, wie etwa aus den Sätzen von Landsberg[14]) folgt, durch jede Primzahl. Für ganze ν genügt diese Reihe stets einer algebraischen Differentialgleichung. Für irrationale ν ist es vermutlich nie der Fall, doch ich habe es nicht zu beweisen vermocht. Aus den Sätzen des nächsten Paragraphen folgt aber, daß *die Menge der ν, für welche die Funktion* (36) *algebraisch-transzendent ist, abzählbar ist.* — Es läßt sich andererseits, worauf mich Herr G. Pólya aufmerksam machte, und wie ich mit seiner freundlichen Erlaubnis hier noch anführen möchte, leicht zeigen, daß $\zeta(x, \nu)$ für irrationale ν *nicht algebraisch* ist, wenn man das Verhalten von $\zeta(x, \nu)$ für $x = 1$ betrachtet. Es genügt, wegen der Funktionalgleichung, $0 < \nu < 1$ anzunehmen. Nun ist aber dann (man vgl. etwa E. Picard, Traité d'Analyse, **1.** (2. éd.), p. 230) $\lim\limits_{x=1} (1 - x)^{1-\nu} \zeta(x, \nu)$ gleich $\Gamma(1 - \nu) \neq 0$,

[14]) Crelles Journal für Mathematik, **117** (1897), S. 140 ff.

wenn x aus dem Inneren des Einheitskreises radial an den Punkt $x=1$ herankommt, $\zeta(x,\nu)$ wird also für $x=1$ von einer irrationalen Ordnung unendlich.

Aus dem Satze 7 ergibt sich, daß eine Potenzreihe

$$a_1 x^{n_1} + a_2 x^{n_2} + \dots,$$

in der die wirklich vorkommenden ganzen nicht negativen Exponenten $n_1, n_2, \dots$ so stark wachsen, daß $\overline{\operatorname{Lim}}_{i=\infty} \frac{n_i}{n_{i-1}} = \infty$ ist, keiner algebraischen Differentialgleichung genügt. Dieser Satz ist bekannt und stammt von Grönwall[15]). Aus ihm läßt sich der folgende Satz folgern, der einem bekannten Satz von G. Pólya über nicht fortsetzbare Potenzreihen[16]) analog ist:

Satz 11. *Aus jeder unendlichen in einer Umgebung des Nullpunktes konvergenten Potenzreihe kann man auf unendlich viele Weisen durch Multiplikation gewisser Koeffizienten mit* -1 *solche Potenzreihen ableiten, die keine algebraisch-transzendente Funktionen darstellen.*

In der Tat, es sei

$$Q(x) = a_{n_1} x^{n_1} + a_{n_2} x^{n_2} + \dots$$

eine aus gewissen Gliedern von

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

derart aufgebaute Potenzreihe, daß sie schon infolge des Anwachsens der Exponenten keine algebraisch-transzendente Funktion ist. Genügt $P(x)$ einer algebraischen Differentialgleichung, so kann die aus ihr durch Änderung des Vorzeichens bei allen auch in $Q(x)$ vorkommenden Gliedern entstehende Potenzreihe $P_1(x)$ keiner algebraischen Differentialgleichung genügen, da sonst dasselbe auch für $Q(x) = \frac{1}{2}(P(x) - P_1(x))$ der Fall sein müßte. Ist aber $P(x)$ nicht algebraisch transzendent, und gibt es unter den Potenzreihen

$$\pm a_0 \pm a_1 x \pm a_2 x^2 \pm a_3 x^3 \pm \dots$$

wenigstens eine algebraisch-transzendente, so können wir unseren Schluß an sie anknüpfen und $Q(x)$ auf unendlich viele verschiedene Weisen wählen. — Aus einer Dirichletschen Reihe

$$\sum_i a_i e^{-\lambda_i s}$$

[15]) Öfversigt af Vetensk. Akademiens Förhandlingar, **55** (Stockholm, 1898). S. 387 ff.

[16]) Acta Mathematica, **40** (1916), S. 179—183.

entsteht durch die Substitution $e^{-s} = x$ eine nach ins Unendliche wachsenden Potenzen von x fortschreitende Reihe

$$\sum a_i x^{\lambda_i},$$

bei der die Exponenten λ_i nicht mehr ganz, ja nicht einmal rational zu sein brauchen. Da solche Reihenentwicklungen sehr oft bei der Untersuchung des Verhaltens von Integralen gewöhnlicher Differentialgleichungen auftreten, so ist es von Interesse, die für solche Reihen aus dem Satz 6 sich ergebende Folgerung zu formulieren:

Satz 12. *Sind in der in einer gewissen Umgebung des Nullpunktes konvergenten Reihe*

$$\sum a_i x^{\lambda_i}$$

die Exponenten λ_i reelle ins Unendliche wachsende Zahlen, und besitzen diese Exponenten keine endliche lineare Basis, so kann die durch diese Reihe dargestellte analytische Funktion keiner algebraischen Differentialgleichung genügen.

Der Satz läßt sich unter gewissen Einschränkungen auch auf den Fall verallgemeinern, daß λ_i komplexe Werte durchlaufen. Für diesen Fall wird sich jedoch aus den Untersuchungen des letzten Paragraphen ein direkter Beweis ergeben.

Dabei verstehen wir (hier und im folgenden) unter x^λ stets $e^{\lambda \log x}$ wo der Koeffizient von $\sqrt{-1}$ in $\log x$ nicht negativ und kleiner als 2π zu nehmen ist.

§ 6.

Über den Begriff der algebraisch-transzendenten Funktion bei mehreren Variablen.

Im vorhergehenden Paragraphen haben wir eine gewisse Klasse von analytischen Funktionen mehrerer Variablen $f(x, y, z, \ldots)$ erwähnt, mit der folgenden Eigenschaft: Setzt man in $f(x, y, z, \ldots)$ für $x, y, z, \ldots$ irgendwelche algebraisch-transzendente Funktionen $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \varphi_3(s), \ldots$ einer Variablen s ein, so ist die so entstehende Funktion

$$f(\varphi_1(s), \varphi_2(s), \varphi_3(s), \ldots)$$

wieder eine algebraisch-transzendente Funktion, falls die Wert- und Existenzbereiche der φ zueinander und zum Existenzbereiche von f passen. Wir stellen uns nun die Aufgabe, alle Funktionen mehrerer Variablen mit dieser Eigenschaft aufzustellen. Wir wollen diese Eigenschaft kurz als ***Eigenschaft A*** bezeichnen. Es sei etwa $f(x, y, z)$ eine solche Funktion. Dann ist $f(x, y, z)$ für jeden konstanten Wert von y, z algebraisch-transzendent als Funktion von x. Man betrachte nun die Menge aller Potenzprodukte aus einer unbestimmten Funktion $\Phi(t)$ und ihren Ableitungen beliebiger Ordnung. Diese Menge ist abzählbar, da bei jedem solchen Potenzprodukt

$$\Phi(t)^{\alpha}\,\Phi'(t)^{\beta}\ldots\Phi^{(i)}(t)^{\gamma}\ldots \tag{37}$$

die Summe $\alpha+1\beta+\ldots+i\gamma+\ldots$ endlich ist und zu jedem Wert dieser Summe nur endlich viele Potenzprodukte gehören. Weiter ist aber auch die Menge U aller *endlichen* Untermengen der Menge der Potenzprodukte (37) abzählbar, wie bekannt und sofort zu beweisen ist. Für jeden Wert von y, z gibt es nun ein System von Potenzprodukten:

$$\Pi_1(\Phi^{(i)}),\ \Pi_2(\Phi^{(i)}),\ \ldots,\ \Pi_k(\Phi^{(i)}) \tag{38}$$

von der Form (37) und von der Eigenschaft, daß für jene y, z

$$c_1\,\Pi_1(f^{(i)}(x,y,z))+c_2\,\Pi_2(f^{(i)}(x,y,z))+\ldots+c_k\,\Pi_k(f^{(i)}(x,y,z))=0 \tag{39}$$

ist, wo die Zeichen der Ableitungen bei $f(x, y, z)$ sich nur auf x beziehen, und $c_1, c_2, \ldots, c_k$ nicht sämtlich verschwindende Konstanten sind. Halten wir nun $z=z_0$ fest und lassen y alle Punkte einer beliebig kleinen Strecke $a\leqq y\leqq b$ im entsprechenden Regularitätsbereich ($a\leqq y\leqq b$, $c\leqq x\leqq d$) von f durchlaufen, so nimmt dabei y eine Menge von Werten an von der Mächtigkeit des Kontinuums. Und da die Mächtigkeit der Menge U kleiner ist, so gibt es wenigstens ein System von Potenzprodukten (38), zwischen denen eine Relation von der Form (39) für unendlich viele y besteht. Die Koeffizienten $c_1, \ldots, c_k$ können dabei aber natürlich noch vom jeweiligen Werte von y abhängen. Bilden wir nun die Wronskische Determinante der Funktionen

$$\Pi_1(f^{(i)}(x,y,z_0)),\ \Pi_2(f^{(i)}(x,y,z_0)),\ \ldots,\ \Pi_k(f^{(i)}(x,y,z_0)) \tag{40}$$

in bezug auf x, so entsteht eine analytische Funktion $F(x, y)$, die für unendlich viele y aus dem Intervall $a\leqq y\leqq b$ identisch in x verschwindet. Sie hat daher für jedes feste x, als Funktion von y, unendlich viele Wurzeln im Intervall $a\leqq y\leqq b$, verschwindet daher identisch in y für jeden Wert von x, ist also für jenen festen Wert von z identisch in x, y gleich 0. Daher besteht zwischen den Funktionen (40) eine Relation von der Form

$$c_1(y)\,\Pi_1(f^{(i)}(x,y,z_0))+c_2(y)\,\Pi_2(f^{(i)}(x,y,z_0))+\ldots+c_k(y)\,\Pi_k(f^{(i)}(x,y,z_0))=0,$$

in der, wie aus dem bekannten Beweis des Satzes über die Wronskische Determinante unmittelbar folgt, $c_1(y), c_2(y), \ldots, c_k(y)$ als nicht sämtlich identisch verschwindende *analytische* Funktionen von y für $a\leqq y\leqq b$ angenommen werden können. Man differenziere nun die Relation (41)

$(k-1)$ mal nach x partiell. Wir erhalten dann $k-1$ weitere Gleichungen von der Form

$$(42)\quad c_1(y)\Pi_1^{(\nu)}(f^{(i)}(x,y,z_0)) + c_2(y)\Pi_2^{(\nu)}(f^{(i)}(x,y,z_0)) + \ldots + c_k(y)\Pi_k^{(\nu)}(f^{(i)}(x,y,z_0)) = 0$$

für $\nu = 1, 2, \ldots, k-1$. Hier bedeutet $\Pi_l^{(\nu)}(\Phi^{(i)})$ den Differentialausdruck, der aus $\Pi_l(\Phi^{(i)})$ durch ν-malige Differentiation nach der unabhängigen Variablen entsteht. Betrachten wir die Determinante

$$\begin{vmatrix} \Pi_1(\Phi^{(i)}) & \Pi_2(\Phi^{(i)}) \ldots & \Pi_k(\Phi^{(i)}) \\ \Pi_1^{(1)}(\Phi^{(i)}) & \Pi_2^{(1)}(\Phi^{(i)}) \ldots & \Pi_k^{(1)}(\Phi^{(i)}) \\ \vdots & & \\ \Pi_1^{(k-1)}(\Phi^{(i)}) & \Pi_2^{(k-1)}(\Phi^{(i)}) \ldots & \Pi_k^{(k-1)}(\Phi^{(i)}) \end{vmatrix} = T(\Phi^{(i)}).$$

Diese Determinante stellt einen *nicht identisch verschwindenden* Differentialausdruck in Φ dar. Denn verschwände er identisch, und setzen wir für Φ etwa die Riemannsche ζ-Funktion $\zeta(s)$ ein, so entsteht aus ihm die Wronskische Determinante der k Funktionen $\Pi_1(\zeta^{(i)}(s))$, $\Pi_2(\zeta^{(i)}(s)), \ldots, \Pi_k(\zeta^{(i)}(s))$. Aus ihrem Verschwinden folgt die Existenz einer Relation

$$(43)\quad c_1\Pi_1(\zeta^{(i)}(s)) + c_2\Pi_2(\zeta^{(i)}(s)) + \ldots + c_k\Pi_k(\zeta^{(i)}(s)) = 0$$

mit nicht sämtlich verschwindenden c. Da nun $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_k$ lauter voneinander verschiedene Potenzprodukte der Funktion Φ und ihren Ableitungen sind, so ergibt (43) eine algebraische Differentialgleichung, der $\zeta(s)$ genügt. Dies widerspricht aber dem Hilbertschen Satz, daß $\zeta(s)$ keiner algebraischen Differentialgleichung genügt.

Folglich genügt $f(x,y,z)$ für jeden Wert z_0 von z einer algebraischen Differentialgleichung in bezug auf x mit konstanten Koeffizienten:

$$T(f^{(i)}(x,y,z_0)) = 0.$$

Wir lassen jetzt z variieren und gelangen durch Wiederholung derselben Schlußweise zu einer Relation von der Form

$$(44)\quad c_1(y,z)\overline{\Pi}_1(f^{(i)}(x,y,z)) + c_2(y,z)\overline{\Pi}_2(f^{(i)}(x,y,z)) + \ldots$$
$$+ c_{k'}(y,z)\overline{\Pi}_{k'}(f^{(i)}(x,y,z)) = 0,$$

in der wieder $\overline{\Pi}_1(\Phi^{(i)}), \ldots, \overline{\Pi}_{k'}(\Phi^{(i)})$ Potenzprodukte aus der Funktion Φ und ihren Ableitungen sind. Differentiieren wir nun (44) $(k'-1)$ mal nach x, so erhalten wir durch dieselbe Überlegung wie oben eine algebraische Differentialgleichung in bezug auf x, der $f(x,y,z)$ identisch in x, y, z genügt. Der Beweis ist offenbar von der Anzahl der Variablen unabhängig. Wir formulieren das Resultat im

Hilfssatz 5. *Hat eine analytische Funktion $f(x, y, z, \ldots)$ die Eigenschaft, in der Umgebung eines regulären Punktes für jeden Wert von $y, z, \ldots$ als Funktion von x einer algebraischen Differentialgleichung zu genügen, so genügt sie identisch in $x, y, z, \ldots$ einer gewöhnlichen algebraischen Differentialgleichung in bezug auf x mit konstanten Koeffizienten.*

Haben wir nur zwei Variable x, y, so liefert unser Beweis mehr. Wir haben in ihm nur benutzt, daß die Mächtigkeit der Menge der y-Werte, für die $f(x, y)$ algebraisch-transzendent ist, größer ist als die Mächtigkeit einer abzählbaren Menge. Und daraus können wir schließen, daß $f(x, y)$ für *jeden* Wert von y algebraisch-transzendent ist, für den die Funktion $f(x, y)$ analytisch in x bleibt. Hieraus folgt

Satz 13. *Gibt es auch nur einen einzigen Wert von y, für den eine analytische Funktion $f(x, y)$ analytisch in x bleibt und keiner algebraischen Differentialgleichung in bezug auf x genügt, so gibt es höchstens abzählbar viele Werte von y, für die $f(x, y)$ analytisch in x bleibt und algebraisch-transzendent ist.*

Insbesondere sehen wir, daß die Potenzreihe

$$\frac{x}{1^\nu} + \frac{x^2}{2^\nu} + \frac{x^3}{3^\nu} + \cdots$$

nur für eine abzählbare Menge der ν-Werte einer algebraischen Differentialgleichung in bezug auf x genügt, da sie für rationale nicht ganze ν nicht algebraisch-transzendent ist (für jedes ganze ν dagegen algebraisch-transzendent, wie man leicht einsieht).

Weiter folgt aus dem Bewiesenen der schärfere

Satz 14. *Gibt es zu jedem positiven M ein y derart, daß die analytische Funktion $f(x, y)$ für dieses y analytisch bleibt und keiner algebraischen Differentialgleichung genügt, deren Ordnung kleiner als M ist, so gibt es nur abzählbar viele y, für die $f(x, y)$ analytisch in x bleibt und algebraisch-transzendent ist.*

Kehren wir nun zu unserer Aufgabe zurück. Aus unseren Prämissen können wir jetzt folgern, daß $f(x, y, z, \ldots)$ in bezug auf jede ihrer Variablen einer gewöhnlichen algebraischen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten genügt:

$$(45) \qquad \Phi_x(f^{(i)}(x, y, z, \ldots)) = 0, \quad \Psi_y(f^{(i)}(x, y, z, \ldots)) = 0,$$
$$X_z(f^{(i)}(x, y, z, \ldots)) = 0, \ldots$$

Hieraus folgt, daß jeder partielle Differentialquotient von f von einer gewissen Ordnung $m+1$ an sich algebraisch durch f und die Ableitungen von f bis zur m-ten Ordnung ausdrücken läßt. Denn es sei $\Phi_x = 0$ von der Ordnung α, $\Psi_y = 0$ von der Ordnung β, $X_z = 0$ von der Ordnung γ usw. Dann kann man für m die Zahl $\alpha + \beta + \gamma + \ldots - 1$ nehmen. Denn es genügt dann zu beweisen, daß jede Ableitung

$$\frac{\partial^{a+b+c+\cdots} f}{\partial x^a \, \partial y^b \, \partial z^c \ldots}, \tag{46}$$

wo $a + b + c + \ldots \geqq \alpha + \beta + \gamma$ ist, sich algebraisch durch die partiellen Ableitungen von f bis zur Ordnung $a + b + c + \ldots - 1$ ausdrücken läßt. Wegen $a + b + c + \ldots \geqq \alpha + \beta + \gamma + \ldots$ folgt entweder $a \geqq \alpha$ oder $b \geqq \beta$ oder $c \geqq \gamma, \ldots$ Es sei etwa $a \geqq \alpha$. Wir bilden dann die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^{a-\alpha+b+c+\cdots} \Phi_x (f^{(i)}(x, y, z, \ldots))}{\partial x^{a-\alpha} \, \partial y^b \, \partial z^c \ldots} = 0. \tag{47}$$

In ihr kommt die partielle Ableitung (46) linear vor, multipliziert mit

$$\frac{\partial \Phi_x}{\partial f^{(\alpha)}}, \tag{48}$$

wo $f^{(\alpha)}$ die α-te Ableitung von f nach x ist. Und da wir annehmen können, daß (45) Gleichungen niedrigster Ordnung und unter diesen vom niedrigsten Gesamtgrad sind, ist (48) von 0 verschieden. Andererseits sind alle in (47) vorkommenden Ableitungen, abgesehen von (46), von niedrigerer Ordnung als $a + b + c + \ldots$ Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Ein System von partiellen Differentialgleichungen für eine Funktion $f(x, y, z, \ldots)$, welches gestattet, alle Differentialquotienten von einer gewissen Ordnung an durch die Differentialquotienten niedrigerer Ordnung auszudrücken, nennt man ein *Mayersches System.* Sind die linken Seiten der Differentialgleichungen eines Mayerschen Systems Polynome in den Ableitungen, deren Koeffizienten algebraisch in den unabhängigen Veränderlichen sind, so sprechen wir von einem *algebraischen* Mayerschen System. *Genügt nun eine Funktion $f(x, y, z, \ldots)$ einem algebraischen Mayerschen System, so genügt sie stets auch in bezug auf jede ihrer Variablen einer gewöhnlichen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten.* Denn man kann nach Definition jede der partiellen Ableitungen $\frac{\partial^a f(x, y, z, \ldots)}{\partial x^a}$ algebraisch ausdrücken durch endlich viele partielle Ableitungen von f und durch $x, y, z, \ldots$; daraus folgt aber nach dem Lemma des § 3, daß zwischen einer hinreichend großen Anzahl von partiellen Ableitungen $\frac{\partial^a f(x, y, z, \ldots)}{\partial x^a}$ eine rationale Gleichung mit konstanten Koeffizienten besteht. Hieraus und aus dem oben Bewiesenen geht weiter hervor, daß jede Funktion, die einem algebraischen Mayerschen System genügt, auch einem solchen Mayerschen System genügt, dessen Differentialgleichungen auf der linken Seite Polynome in den Ableitungen mit *konstanten* Koeffizienten haben. — Ein Mayersches System läßt sich auch noch anders charakterisieren. Das allgemeine Integral eines solchen Systems hängt nicht von willkürlichen Funktionen, sondern nur von endlich vielen willkürlichen Konstanten ab. Umgekehrt ist nach einem häufig ausgesprochenen Satze ein jedes System von Differentialgleichungen, dessen allgemeines Integral nur von endlich vielen willkürlichen Konstanten abhängt, ein Mayersches System. Ein strenger Beweis dieses letzten Satzes findet sich indessen in der Literatur nicht vor. Er dürfte wohl erst aus den Untersuchungen von Riquier abzuleiten sein, in denen eine Normalform für Systeme partieller Differentialgleichungen aufgestellt wurde, an der die Anzahl und die Art der willkürlichen Elemente im allgemeinen Integral unmittelbar abzulesen ist, und in die jedes System von partiellen Differentialgleichungen durch Differentiationen und Eliminationen übergeführt werden kann[17]).

Unser oben erhaltenes Resultat lautet jetzt; daß jede Funktion mit der Eigenschaft A einem algebraischen Mayerschen System genügt. Dieses Resultat läßt sich nun auch umkehren, so daß sich ergibt:

Satz 15. *Besitzt eine analytische Funktion $f(x, y, z, \ldots)$ die Eigenschaft, jedesmal eine algebraisch-transzendente Funktion von s zu ergeben, sobald man für $x, y, z, \ldots$ algebraisch-transzendente Funktionen von s einsetzt, deren Wert- und Existenzbereiche zueinander und zum Existenzbereich von $f(x, y, z, \ldots)$ passen, — oder auch nur dann, wenn für alle Variablen $x, y, z, \ldots$, bis auf eine, beliebige Zahlen aus gewissen nicht abzählbaren Mengen eingesetzt werden, und diese eine gleich s gesetzt wird, so genügt sie einem algebraischen Mayerschen System und umgekehrt.*

Der Beweis der Umkehrung bietet keine Schwierigkeiten. Wir verbinden ihn mit einigen allgemeineren und weitergehenden Betrachtungen.

Die analytischen Funktionen, die einem algebraischen Mayerschen System genügen, bilden nämlich die richtige Verallgemeinerung der algebraisch-transzendenten Funktionen einer Variablen. Für sie gelten ganz analoge Sätze, wie für jene, so daß sie ebenfalls ein in gewissem Sinne abgeschlossenes System bilden. Wir bezeichnen sie als ***algebraisch-transzendente Funktionen mehrerer Variablen.*** Um diesen Begriff noch zu verallgemeinern, definieren wir als einen ***Rationalitätsbereich*** R einen

[17]) Riquier, Les systèmes d'équations aux dérivées partielles. Paris, Gauthier-Villars, 1910.

Körper von analytischen Funktionen gewisser Variablen $x, y, z, \ldots$, die alle einen gemeinsamen Existenzbereich $G(R)$ besitzen, in dem jede von ihnen bis auf $(n-1)$-dimensionale singuläre Mannigfaltigkeiten regulär analytisch ist. Außerdem verlangen wir, daß R mit jeder Funktion von $x, y, z, \ldots$ auch ihre sämtlichen partiellen Ableitungen aller Ordnungen enthält. Wir nennen nun eine analytische Funktion $f(x, y, z, \ldots)$ *algebraisch-transzendent in bezug auf R*, wenn sie einem Mayerschen System genügt, dessen Differentialgleichungen durch das Nullsetzen von Polynomen in f und ihren Ableitungen mit Koeffizienten aus R entstehen.

Ist R der Körper aller Konstanten, so wird $f(x, y, z, \ldots)$ algebraisch-transzendent schlechthin. Ebenso wie oben können wir zeigen: 1. Jede algebraisch-transzendente Funktion $f(x, y, z, \ldots)$ in bezug auf R genügt in bezug auf jede ihrer Variablen einer gewöhnlichen Differentialgleichung, deren linke Seite ein Polynom in f und ihren Ableitungen nach jener Variablen mit Koeffizienten aus R ist. 2. Genügt eine analytische Funktion $f(x, y, z, \ldots)$ in bezug auf jede Variable einer gewöhnlichen Differentialgleichung, deren linke Seite ein Polynom in f und ihren Ableitungen nach jener Variablen mit Koeffizienten aus R ist, so ist f algebraisch-transzendent in bezug auf R. — Und nun gelten die Sätze:

Satz 16. *Ist $f(x, y, z, \ldots)$ algebraisch-transzendent in bezug auf den Rationalitätsbereich $R(g, h, \ldots)$, der aus einem Rationalitätsbereich R durch Adjunktion gewisser in bezug auf R algebraisch-transzendenter Funktionen $g, h, \ldots$ und ihrer sämtlichen Ableitungen entsteht, so ist $f(x, y, z, \ldots)$ auch algebraisch-transzendent in bezug auf R.*

Es genügt, beim Beweise nur den Fall zu betrachten, wo zu R nur *eine* Funktion $g(x, y, z, \ldots)$ mit ihren Ableitungen adjungiert wird. Denn hieraus folgt durch sukzessive Anwendung dieses Falles die Richtigkeit des Satzes für den Fall, daß zu R nur *endlich viele* Funktionen $g, h, \ldots$ mit ihren sämtlichen Ableitungen adjungiert werden. Andererseits lassen sich alle Differentialgleichungen des Mayerschen System, dem f in bezug auf $R(g, h, \ldots)$ genügt, aus endlich vielen Differentialgleichungen ableiten, z. B. aus den gewöhnlichen Differentialgleichungen, denen f in bezug auf jede einzelne Variable genügt. Daher kommt es nur auf endlich viele Größen von $R(g, h, \ldots)$ und ihre Ableitungen an.

Lassen sich nun alle partiellen Ableitungen von f durch μ unter ihnen und die Größen von $R(g)$ algebraisch ausdrücken, lassen sich weiter sämtliche Ableitungen von g durch ν unter ihnen und die Größen von R algebraisch ausdrücken, so muß zwischen $\mu+\nu+1$ beliebigen partiellen Ableitungen von f eine ganze rationale Relation mit Koeffizienten aus R bestehen, wie aus dem Lemma des § 3 folgt. Es sei nun λ die kleinste

Zahl von der Eigenschaft, daß zwischen λ beliebigen partiellen Ableitungen von f eine ganze rationale Relation mit Koeffizienten aus R besteht, und es seien etwa $p_1, p_2, \ldots, p_{\lambda-1}$ solche $\lambda - 1$ partielle Ableitungen von f, zwischen welchen eine solche Relation nicht besteht. Dann ist jede partielle Ableitung von f eine algebraische Funktion von $p_1, \ldots, p_{\lambda-1}$ und von Größen von R, w. z. b. w.[18]).

Satz 17. *Setzt man in eine algebraisch-transzendente Funktion* $f(x, y, z, \ldots)$ *für* $x, y, z, \ldots$ *irgendwelche algebraisch-transzendente Funktionen* $\varphi(\xi, \eta, \zeta, \ldots)$, $\psi(\xi, \eta, \zeta, \ldots)$, $\chi(\xi, \eta, \zeta, \ldots)$, ... *von irgendwelchen Variablen* $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ *ein, so entsteht wieder eine algebraisch-transzendente Funktion von* $\xi, \eta, \zeta, \ldots$

In diesem Satz ist insbesondere die Umkehrung des Satzes 15 als spezieller Fall enthalten. Er ist nur für *algebraisch-transzendente Funktionen schlechthin* ausgesprochen. — Will man ihn auf algebraisch-transzendente Funktionen in bezug auf einen beliebigen Rationalitätsbereich verallgemeinern, so ist es hierzu nötig, den Begriff des Rationalitätsbereiches R enger zu fassen. Wir müssen nämlich verlangen, daß aus jeder Funktion von R durch Einsetzen von beliebigen Funktionen von R wieder eine Funktion von R oder wenigstens eine in bezug auf R algebraisch-transzendente Funktion entsteht.

Zum Beweise des Satzes bezeichnen wir mit μ die kleinste Zahl von der Eigenschaft, daß sich jede Ableitung von $f(x, y, z, \ldots)$ algebraisch (mit konstanten Koeffizienten) durch μ unter ihnen ausdrücken läßt. Durch $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots$ bezeichnen wir die entsprechenden Zahlen für $\varphi(\xi, \eta, \zeta, \ldots)$, $\psi(\xi, \eta, \zeta, \ldots)$, $\chi(\xi, \eta, \zeta, \ldots)$, ... Setzen wir in alle Ableitungen von $f(x, y, z, \ldots)$ für $x, y, z, \ldots$ die Funktionen $\varphi, \psi, \chi, \ldots$, so mögen die entstehenden Funktionen von $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ durch p_i bezeichnet werden. Auch die p_i haben die Eigenschaft, daß zwischen $\mu + 1$ beliebigen Funktionen p_i eine ganze rationale Relation mit Zahlenkoeffizienten besteht. Es sei nun λ die kleinste Zahl von der Eigenschaft, daß zwischen $\lambda + 1$ Funktionen p_i stets eine ganze rationale Relation mit Zahlenkoeffizienten besteht. Dann lassen sich alle p_i algebraisch durch gewisse λ unter ihnen ausdrücken. Jede partielle Ableitung von $f(\varphi, \psi, \chi, \ldots)$ ist aber eine ganze rationale Funktion der p_i und der Ableitungen von $\varphi, \psi, \chi, \ldots$, läßt sich also als algebraische Funktion von $\lambda + \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \ldots$ Größen darstellen. Daher besteht

[18]) Für analytische Funktionen $F(x, y, z, \ldots)$, für die eine einzige partielle Differentialgleichung vorgegeben ist, kann man ein Analogon dieses Satzes auf demselben Wege ohne Schwierigkeit beweisen: Genügt $F(x, y, z, \ldots)$ einer partiellen Differentialgleichung, deren linke Seite ein Polynom an den Ableitungen von F ist, mit Koeffizienten, die algebraisch-transzendente Funktionen mehrerer Variablen sind, so genügt F einer algebraischen partiellen Differentialgleichung.

nach dem Lemma des § 3 zwischen $\lambda + \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \ldots + 1$ Ableitungen von $f(\varphi, \psi, \chi, \ldots)$ eine ganze rationale Relation mit Zahlenkoeffizienten. Daher lassen sich alle diese Ableitungen durch endlich viele (höchstens $\lambda + \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \ldots$) unter ihnen algebraisch ausdrücken, w. z. b. w.

§ 7.

Über algebraisch-transzendente Dirichletsche Reihen und Potenzreihen, die nach beliebigen Potenzen der unabhängigen Veränderlichen fortschreiten.

Ist die durch eine Dirichletsche Reihe dargestellte Funktion

$$f(s) = \sum_{i=0}^{i=\infty} a_i e^{-\lambda_i s} \tag{49}$$

algebraisch-transzendent, so kann die Reihe (49) nach den Sätzen 1 und 6 in der Form geschrieben werden

$$F\left(e^{-\lambda^{(1)} s}, e^{-\lambda^{(2)} s}, \ldots, e^{-\lambda^{(\mu)} s}\right), \tag{50}$$

wo $F(x, y, z, \ldots)$ eine zunächst formal hingeschriebene Potenzreihe ist, die nach ganzen positiven und negativen Potenzen von $x, y, z, \ldots$ fortschreitet. Die reellen Zahlen $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots, \lambda^{(\mu)}$ können dabei positiv und linear unabhängig angenommen werden. Ist nun F eine nach *positiven* Potenzen von $x, y, z, \ldots$ fortschreitende Reihe, oder hat sie nur endlich viele negative Glieder, so ist sie in einem gewissen Bereich absolut konvergent, sobald (49) einen Konvergenzbereich besitzt; wir sehen, daß in diesem Falle (50) (und (49)) auch stets einen Bereich absoluter Konvergenz besitzt. Dies ist insbesondere stets der Fall, wenn (49) eine Reihe vom „zahlentheoretischen Typus" ist:

$$\sum \frac{a_n}{n^s}.$$

Es genüge nun (49) einer algebraischen Differentialgleichung mit Zahlenkoeffizienten

$$\Phi(f^{(i)}(s)) = 0. \tag{51}$$

Wir setzen nun in die Entwicklung (49) für die Zahlen a_i Unbestimmte u_i und tragen die so entstehende Reihe $\varphi(s)$, die natürlich nur eine formale Bedeutung hat, in Φ ein. Es entsteht nach rein formaler Umordnung eine Entwicklung von der Form

$$\sum A_{n_1, n_2, \ldots, n_\mu} e^{-(n_1 \lambda^{(1)} + n_2 \lambda^{(2)} + \ldots + n_\mu \lambda^{(\mu)}) s},$$

wo die Exponentiellen nach wachsenden Exponenten geordnet sind, die ganzen Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_\mu$ aber gewisse ganze positive und negative Werte durchlaufen. $A_{n_1, n_2, \ldots, n_\mu}$ ist ein Polynom in den u_i, den λ_i und den Koeffizienten von Φ. In $A_{n_1, n_2, \ldots, n_\mu}$ können aber nicht alle Potenzprodukte der u_i vorkommen, sondern nur diejenigen, die eine gewisse Gewichtsbedingung erfüllen. Um diese abzuleiten, stellen wir den allgemeinen Exponenten λ_i von (49) linear mit ganzen Koeffizienten durch $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots, \lambda^{(\mu)}$ dar:

$$\lambda_i = \alpha_i^{(1)} \lambda^{(1)} + \alpha_i^{(2)} \lambda^{(2)} + \ldots + \alpha_i^{(\mu)} \lambda^{(\mu)}.$$

Da bei der Differentiation eines Gliedes von (49) der Exponent unverändert bleibt, so muß bei jedem Potenzprodukt der u_i in $A_{n_1, n_2, \ldots, n_\mu}$:

$$u_{j_1} u_{j_2} u_{j_3} \ldots,$$

wo $j_1, j_2, j_3, \ldots$ gleiche oder verschiedene Indizes sind, wegen der linearen Unabhängigkeit der $\lambda^{(\varkappa)}$ das System der Bedingungen erfüllt sein:

$$\alpha_{j_1}^{(\nu)} + \alpha_{j_2}^{(\nu)} + \alpha_{j_3}^{(\nu)} + \ldots = n_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \mu).$$

Sind nun $c_1, c_2, \ldots, c_\mu$ beliebige Zahlen, so multipliziere man jedes u_i mit

$$c_1^{\alpha_i^{(1)}} c_2^{\alpha_i^{(2)}} \ldots c_\mu^{\alpha_i^{(\mu)}}.$$

Dann multipliziert sich jedes $A_{n_1, n_2, \ldots, n_\mu}$ mit $c_1^{n_1} c_2^{n_2} \ldots c_\mu^{n_\mu}$. Verschwinden nun alle A, falls man die Unbestimmten u_i durch die Zahlen a_i ersetzt, so verschwinden sie auch, falls man alle u_i durch $a_i c_1^{\alpha_i^{(1)}} c_2^{\alpha_i^{(2)}} \ldots c_\mu^{\alpha_i^{(\mu)}}$ ersetzt. Auch jede so entstehende Dirichletsche Reihe genügt also formal der Differentialgleichung (51). Die so entstehenden Reihen sind aber

$$F(c_1 e^{-\lambda^{(1)} s}, c_2 e^{-\lambda^{(2)} s}, \ldots, c_\mu e^{-\lambda^{(\mu)} s}),$$

und konvergieren für hinreichend kleine $c_1, c_2, \ldots, c_\mu$, falls F nach positiven Potenzen von $x, y, z, \ldots$ fortschreitet und konvergent ist. Wir formulieren dies im

Satz 18. *Ist $F(x, y, z, \ldots)$ eine nach ganzen positiven Potenzen von $x, y, z, \ldots$ (mit höchstens endlich vielen negativen Potenzen) fortschreitende, in einer Umgebung des Nullpunktes konvergente Potenzreihe und genügt für irgendein System positiver linear unabhängiger $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)}, \ldots$ die Dirichletsche Reihe*

$$F(e^{-\lambda^{(1)} s}, e^{-\lambda^{(2)} s}, e^{-\lambda^{(3)} s}, \ldots) \tag{52}$$

einer algebraischen Differentialgleichung mit Zahlenkoeffizienten, so genügt für jeden Wert der Konstanten $c_1, c_2, c_3, \ldots$ die Funktion

$$F(c_1 e^{-\lambda^{(1)} s}, c_2 e^{-\lambda^{(2)} s}, c_3 e^{-\lambda^{(3)} s}, \ldots), \tag{53}$$

sofern sie für diese Werte der Konstanten existiert, derselben Differentialgleichung. Ist $F(x, y, z, \ldots)$ eine formale Laurentsche Entwicklung, *und genügt* (52) *formal einer algebraischen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, so genügt auch jede Reihe* (53) *formal derselben Differentialgleichung.*

Aus diesem Satz können wir nun sofort den weiteren Satz folgern:

Satz 19. *Ist* $F(x, y, z, \ldots)$ *eine nach ganzen positiven Potenzen von* $x, y, z, \ldots$ (*höchstens mit endlich vielen negativen Potenzen*) *fortschreitende, in einer Umgebung des Nullpunktes konvergente Potenzreihe und genügt für irgendein System positiver linear unabhängiger* $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots$ *die Dirichletsche Reihe*

$$f(s) = F(e^{-\lambda^{(1)} s}, e^{-\lambda^{(2)} s}, \ldots) \tag{54}$$

einer algebraischen Differentialgleichung

$$\Phi(f^{(i)}(s)) = 0, \tag{55}$$

so genügt $F(x, y, z, \ldots)$ *einer algebraischen partiellen Differentialgleichung. Ist* $F(x, y, z, \ldots)$ *eine beliebige Laurentsche Entwicklung und genügt* (54) *formal einer algebraischen Differentialgleichung, so genügt* $F(x, y, z, \ldots)$ *formal einer algebraischen partiellen Differentialgleichung.*

Wir können $\Phi(f^{(i)})$ als ein Polynom in den $f^{(i)}(s)$ mit konstanten Koeffizienten annehmen. Dann genügt auch $F(c_1 e^{-\lambda^{(1)} s}, c_2 e^{-\lambda^{(2)} s}, \ldots)$ der Differentialgleichung (55). Nun setzt sich jede Ableitung von $F(c_1 e^{-\lambda^{(1)} s}, c_2 e^{-\lambda^{(2)} s}, \ldots)$ nach s aus partiellen Ableitungen von $F(x, y, z, \ldots)$ nach seinen Argumenten, für die nachträglich die Werte $c_1 e^{-\lambda^{(1)} s}, c_2 e^{-\lambda^{(2)} s}, \ldots$ eingesetzt werden, zusammen, außerdem aus den Exponentiellen $c_1 e^{-\lambda^{(1)} s}, \ldots$ und den Zahlen $\lambda^{(i)}$. Ist (55) etwa von der Ordnung m, so beachten wir, daß die m-te Ableitung von $F(c_1 e^{-\lambda^{(1)} s}, \ldots)$ gleich ist:

$$\sum \left[\frac{\partial^m F(x, y, z, \ldots)}{\partial x^a \, \partial y^b \ldots}\right]_{\substack{x = c_1 e^{-\lambda^{(1)} s} \\ y = c_2 e^{-\lambda^{(2)} s} \\ \vdots}} c_1^a (-\lambda^{(1)})^a e^{-a \lambda^{(1)} s} c_2^b (-\lambda^{(2)})^b e^{-b \lambda^{(2)} s} \ldots + \ldots$$

Bei den Ableitungen niedrigerer Ordnung von $F(c_1 e^{-\lambda^{(1)} s}, \ldots)$ nach s treten die m-ten partiellen Ableitungen von $F(x, y, z, \ldots)$ noch nicht auf. Setzen wir nun $s = 0$, so entsteht aus (55) eine algebraische partielle Differentialgleichung m-ter Ordnung für $F(c_1, c_2, c_3, \ldots)$ als Funktion der Konstanten $c_1, c_2, \ldots$, die nun wieder durch die Variablen $x, y, z, \ldots$ ersetzt werden können. W. z. b. w.

Wir kehren nun wieder zu den Potenzreihen zurück, die nach beliebigen wachsenden Potenzen von x fortschreiten und algebraisch-transzendente Funktionen darstellen. Ein auf solche Reihen bezügliches Resultat, welches der ersten Hälfte des Satzes 19 entspricht, ließe sich aus diesem Satze durch direkte Übertragung ableiten. Wir schlagen jedoch einen direkten

Weg ein, bei dem sich die den Sätzen 18 und 19 entsprechenden Sätze in größerer Allgemeinheit ergeben. Es seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu$ beliebige *linear unabhängige* Zahlen, die auch komplex sein können. $F(x, y, \ldots)$ sei eine beliebige Laurentsche Entwicklung in μ Variablen $x, y, \ldots$, und es genüge $F(x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}, \ldots)$ einer algebraischen Differentialgleichung in x. Wir nehmen dabei an, daß $F(x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}, \ldots)$, nach Potenzen von x entwickelt, eine Folge von Exponenten mit einer einzigen Häufungsstelle im Unendlichen hat. Es sei etwa

$$F(x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}, \ldots) = f(x) = \sum a_i x^{n_i} \qquad \lim_{i=\infty} n_i = \infty .$$

Es seien nun zunächst λ_i reell und es besitze $f(x)$ (daher auch jede Ableitung von $f(x)$) einen Bereich absoluter Konvergenz. Ein m-maliger Umlauf um den Nullpunkt führt $F(x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}, \ldots)$ in ein anderes Integral $F(e^{2m\pi\lambda_1 i} x^{\lambda_1}, e^{2m\pi\lambda_2 i} x^{\lambda_2}, \ldots)$ derselben Differentialgleichung $\Phi(f^{(i)}(x)) = 0$ über. Die Koeffizienten von Φ mögen dabei rational in x sein. Ist keine lineare ganzzahlige Kombination der λ_i rational, so können wir die Exponentiellen $e^{2m\pi\lambda_1 i}, e^{2m\pi\lambda_2 i}, \ldots$ nach einem bekannten Satz über diophantische Approximationen beliebig vorgegebenen Zahlen $c_1, c_2, \ldots$ vom absoluten Betrage 1 beliebig nahe bringen. Lassen wir daher m in geeigneter Weise unendlich werden, so ergibt sich, daß auch $F(c_1 x^{\lambda_1}, c_2 x^{\lambda_2}, \ldots)$ der Differentialgleichung $\Phi(f^{(i)}(x)) = 0$ genügt. Und hieraus folgt durch dieselbe Schlußweise wie oben, daß $F(x, y, \ldots)$ einer algebraischen partiellen Differentialgleichung genügt. Besteht zwischen den λ_i eine Relation von der Form $p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2 + \ldots + p_\mu\lambda_\mu = p$, wo $p_1, \ldots p_\mu, p$ ganze Zahlen sind und $p \neq 0$ ist, so können wir ganz analog wie oben in das Integral $F(x^{\lambda_1}, \ldots, x^{\lambda_\mu})$ willkürliche Konstanten $c_1, c_2, \ldots, c_{\mu-1}$ vom absoluten Betrage 1 einführen: $F(c_1^{p_\mu} x^{\lambda_1}, c_2^{p_\mu} x^{\lambda_2}, \ldots, c_1^{-p_1} c_2^{-p_2} \ldots c_{\mu-1}^{-p_{\mu-1}} x^{\lambda_\mu})$. Hieraus folgt weiter durch Substitution $x = cx'$, daß auch $F(\gamma_1 x^{\lambda_1}, \ldots, \gamma_\mu x^{\lambda_\mu})$ einer algebraischen Differentialgleichung in x genügt, wenn $\gamma_1, \ldots, \gamma_\mu$ beliebige Konstanten vom absoluten Betrage 1 sind, — wenn auch nicht notwendig derselben Gleichung $\Phi(f^{(i)}) = 0$. Hieraus schließen wir wieder, daß $F(x, y, z, \ldots)$ einer algebraischen partiellen Differentialgleichung genügt. In beiden Fällen braucht $F(x, y, z, \ldots)$ keinen Konvergenzbereich im gewöhnlichen Sinne zu besitzen, und dann genügt $F(x, y, z, \ldots)$ *formal* einer algebraischen partiellen Differentialgleichung.

Wir lassen jetzt die Annahme der absoluten Konvergenz von $f(s)$ fallen, und nehmen an, daß $f(s)$ einer algebraischen Differentialgleichung *formal* genügt. Wir nehmen aber außerdem an, daß alle Exponenten n_i bis auf endlich viele in einem und demselben Winkel von der Öffnung $\gamma < \pi$ liegen. Wir betrachten zugleich mit $f(s)$ die Reihe

$$\varphi(x) = \sum u_i x^{n_i},$$

wo u_i Unbestimmte sind. Setzt man $\varphi(x)$ in $\Phi(\varphi^{(i)})$ ein, so entsteht

$$\sum A_k(u_i) x^{m_k},$$

wo auch $\lim\limits_{i=\infty} m_i = \infty$ ist und $A_k(u_i)$ nur von endlich vielen u_i abhängt, nach unserer Annahme über die n_i. Dabei ist $A_k(a_i) = 0$ für jedes k. Wieder unterscheiden wir zwei Fälle: 1. Es sei keine lineare ganzzahlige Kombination der λ_i rational, oder es gebe eine rationale lineare Verbindung der λ_i, die rational ist, Φ hänge aber dann von x nicht explizit ab. Ersetzt man dann $F(x^{\lambda_1}, \ldots, x^{\lambda_\mu})$ durch $F(c_1 x^{\lambda_1}, \ldots, c_\mu x^{\lambda_\mu})$, wo $c_1, \ldots, c_\mu$ willkürliche Konstanten sind, so multipliziert sich jedes a_i mit einem Potenzprodukt der c_i; ebenso multiplizieren sich aber auch alle $A_k(a_i)$ einfach mit einem Potenzprodukt der c_i, bleiben also sämtlich gleich 0. Wir sehen, daß auch $F(c_1 x^{\lambda_1}, \ldots, c_\mu x^{\lambda_\mu})$ der Differentialgleichung $\Phi(f^{(i)})$ genügt. Und daraus können wir wiederum schließen, daß $F(x, y, z, \ldots)$ einer algebraischen partiellen Differentialgleichung genügt. Besteht aber 2. eine lineare Relation $p_1\lambda_1 + \ldots + p_\mu\lambda_\mu = p$, wo $p_1, \ldots, p_\mu, p$ ganz sind und p von 0 verschieden ist, und enthält Φ die unabhängige Variable x explizit, so bilden wir wieder, unter $c_1, c_2, \ldots, c_{\mu-1}$ willkürliche von 0 verschiedene Konstanten verstanden, die Reihe

$$F\left(c_1^{p_\mu} x^{\lambda_1}, c_2^{p_\mu} x^{\lambda_2}, \ldots, c_1^{-p_1} c_2^{-p_2} \ldots c_{\mu-1}^{-p_{\mu-1}} x^{\lambda_\mu}\right). \tag{56}$$

Tragen wir sie in Φ ein, so multiplizieren sich wieder die Ausdrücke $A_k(a_i)$ nur mit einem Potenzprodukt der c_i, bleiben also gleich 0. Daher genügt auch (56) formal der Differentialgleichung $\Phi(f^{(i)}) = 0$, und von hier aus schließen wir wieder ganz analog wie oben, für den Fall der absoluten Konvergenz von $f(s)$, daß $F(x, y, z, \ldots)$ formal einer algebraischen partiellen Differentialgleichung genügt. Besitzt dann $F(x, y, z, \ldots)$ einen Konvergenzbereich im gewöhnlichen Sinne, so genügt auch die durch sie dargestellte *Funktion* jener Differentialgleichung.

Die zuletzt angegebenen Resultate über Potenzreihen, die nach beliebigen Potenzen der unabhängigen Variablen fortschreiten, sind insofern von Interesse, als solche Reihenentwicklungen sehr oft beim Studium des Verhaltens der Integrale von gewöhnlichen Differentialgleichungen in der Nähe eines singulären Punktes auftreten. Hier wurde besonders von Poincaré, Picard und anderen[19]) eine Methode ausgebildet, die Aufsuchung der Reihenentwicklungen solcher Integrale auf die Aufstellung gewisser Funktionen mehrerer Variablen $F(x, y, z, \ldots)$ zu reduzieren,

[19]) Vgl. E. Picard, Traité d'Analyse 3, (2. éd.), S. 1—40.

die gewissen, aus der vorgegebenen gewöhnlichen leicht ableitbaren partiellen Differentialgleichungen genügen, und aus denen solche Reihenentwicklungen nach der Formel

$$f(x) = F(c_1 x^{\lambda_1}, c_2 x^{\lambda_2}, \ldots)$$

erhalten werden. Allerdings sind diese Entwicklungen bei Poincaré und Picard an sehr viele verschiedene Annahmen geknüpft, und das Auftreten von partiellen Differentialgleichungen erscheint wie ein sehr merkwürdiger Kunstgriff. Die obigen Resultate geben für algebraische Differentialgleichungen gewissermaßen eine *Umkehrung* dieser Methoden. — Im nächsten Paragraphen werden wir auf den Fall der analytischen Differentialgleichungen eingehen, und insbesondere den Satz 12 auf den Fall komplexer Exponenten verallgemeinern. —

Wir knüpfen jetzt wieder an den Beweis des Satzes 19 an, machen aber jetzt die Voraussetzung, daß die dortige Funktion (54)

$$(54) \qquad F(e^{-\lambda^{(1)}s}, e^{-\lambda^{(2)}s}, \ldots)$$

für *beliebige hinreichend große positive* $\lambda^{(i)}$ *der von den* $\lambda^{(i)}$ *unabhängigen Differentialgleichung* (55) *genügt.* Ähnlich wie dort können wir wieder in das Integral (54) willkürliche Konstanten einführen, die aber jetzt mit $x, y, z, \ldots,$ bezeichnet werden mögen. Wir erhalten dann die Funktion

$$f(s) = F(x e^{-\lambda^{(1)}s}, y e^{-\lambda^{(2)}s}, \ldots)$$

die einer von den $x, y, z, \ldots, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots$ unabhängigen algebraischen Differentialgleichung $\Phi(f^{(i)}) = 0$ in s genügt. Wir setzen nun die Differentialgleichung in eine partielle Differentialgleichung in bezug auf $x, y, z, \ldots$ um, wobei s vorerst unbestimmt bleiben mag. Wir erhalten so eine partielle Differentialgleichung, in der die höchsten — m-ten — partiellen Ableitungen von F in der Verbindung vorkommen:

$$\sum \left[\frac{\partial^m F(x', y', \ldots)}{\partial x'^a \partial y'^b}\right]_{\substack{x' = x e^{-\lambda^{(1)}s} \\ y' = y e^{-\lambda^{(2)}s} \\ \vdots}} x^a y^b \ldots (-\lambda^{(1)})^a (-\lambda^{(2)})^b \ldots e^{-a\lambda^{(1)}s - b\lambda^{(2)}s - \ldots}$$

Drücken wir $x, y, \ldots,$ durch $x' = x e^{-\lambda^{(1)}s}$, $y' = y e^{-\lambda^{(2)}s}, \ldots$ aus, so erhalten wir eine partielle Differentialgleichung für $F(x', y', z', \ldots)$, in der die höchsten Ableitungen von F in der Verbindung vorkommen:

$$\sum \left(\frac{\partial^m F(x', y', \ldots)}{\partial x'^a \partial y'^b \ldots}\right) x'^a y'^b \ldots (-\lambda^{(1)})^a (-\lambda^{(2)})^b \ldots .$$

Da diese Differentialgleichung für beliebige Werte der $\lambda^{(i)}$ gilt, so gestattet sie, die m-ten partiellen Ableitungen von $F(x', y', \ldots)$ durch die Ableitungen niedrigerer Ordnung und $x', y', \ldots$ algebraisch auszudrücken —

$F(x', y', \ldots)$ genügt also einem algebraischen Mayerschen System. Dieses Resultat ist deshalb von Bedeutung, weil wir jetzt beweisen werden: *Hat eine analytische Funktion $F(x, y, \ldots)$ die Eigenschaft, daß für beliebige reelle Wertsysteme von $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, die linear unabhängig sind und in beliebig vorgegebenen Intervallen liegen, die Funktion $F(e^{-\lambda_1 s}, e^{-\lambda_2 s}, \ldots)$ von s algebraisch-transzendent ist, so genügt $F(e^{-\lambda_1 s}, e^{-\lambda_2 s}, \ldots)$ für alle λ_i einer festen algebraischen Differentialgleichung.* Dies folgt nicht direkt aus dem Hilfssatz 5, da wir $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ linear unabhängig annehmen wollen, läßt sich aber durch dasselbe Verfahren beweisen, wie der Hilfssatz 5 Wir wollen etwa den Fall von drei Variablen ins Auge fassen und λ_1 gleich -1 annehmen, was nach den Sätzen von § 5 erlaubt ist. Geben wir λ_3 irgendeinen festen irrationalen Wert λ_0, so genügt $F(e^s, e^{-\lambda_2 s}, e^{-\lambda_0 s})$ einer algebraischen Differentialgleichung für jeden von 1 und λ_0 linear unabhängigen irrationalen Wert von λ_2 aus dem vorgeschriebenen Intervall. Daher gibt es solche Potenzprodukte aus den Ableitungen von $F(e^s, e^{-\lambda_2 s}, e^{-\lambda_0 s})$, die für unendlich viele λ_2 aus einem bestimmten Intervall linear abhängige Funktionen von s werden:

$$\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_k.$$

Daher verschwindet ihre Wronskische Determinante identisch in s, λ_2, und es besteht eine Relation

$$c_1(\lambda_2)\Pi_1 + c_2(\lambda_2)\Pi_2 + \ldots + c_k(\lambda_2)\Pi_k = 0,$$

aus der wir durch Differentiation und die wie im § 6 zu begründende Elimination der $c_i(\lambda_2)$ endlich eine Differentialgleichung für $F(e^s, e^{-\lambda_2 s}, e^{-\lambda_0 s})$ erhalten, der $F(e^s, e^{-\lambda_2 s}, e^{-\lambda_0 s})$ für jeden Wert von λ_2 genügt. Da es nun für jeden irrationalen Wert λ_0 von λ_3 aus einem bestimmten Intervall eine solche Differentialgleichung gibt, so führt uns ebenso wie im § 6 eine Wiederholung desselben Verfahrens zu einer algebraischen Differentialgleichung, der $F(e^s, e^{-\lambda_2 s}, e^{-\lambda_3 s})$ für jeden Wert von λ_2, λ_3 genügt. Und hieraus folgt nach den Sätzen des § 5, daß auch $F(e^{-\lambda_1 s}, e^{-\lambda_2 s}, e^{-\lambda_3 s})$ einer festen algebraischen Differentialgleichung für jedes Wertsystem von $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ genügt. — Wir bemerken noch, daß wir durch sukzessive Differentiationen und Eliminationen, die mit Hilfe des Lemmas aus dem § 3 ohne weiteres zu begründen sind, erreichen können, daß die Koeffizienten der algebraischen Differentialgleichung, der $F(e^{-\lambda_1 s}, e^{-\lambda_2 s}, e^{-\lambda_3 s})$ genügt, von $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ unabhängig und gewöhnliche rationale Zahlen werden. — Wir können jetzt den Satz formulieren, der sich dem Satz 15 und dem Hilfssatz 5 an dieSeite stellt:

Satz 20: *Hat eine analytische Funktion $F(x, y, z, \ldots)$ die Eigenschaft, daß $F(e^{-\lambda_1 s}, e^{-\lambda_2 s}, e^{-\lambda_3 s}, \ldots)$ für beliebige reelle, oder auch nur für beliebige reelle linear unabhängige in den festen vorgeschriebenen*

Intervallen liegende $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ *algebraisch-transzendent in* s *wird, so ist* $F(x, y, z, \ldots)$ *selbst eine algebraisch-transzendente Funktion von* $x, y, z, \ldots$, *genügt also einem Mayerschen System algebraischer partieller Differentialgleichungen.*

§ 8.

Potenzreihen, die keiner analytischen Differentialgleichung genügen.

Das Hauptziel der Entwickelungen dieses Paragraphen ist der Beweis von später bezüglich der Konvergenzfragen durch den Satz 22 zu ergänzenden

Satz 21. *Es sei* $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ *eine Potenzreihe, die nach positiven Potenzen von* $x, y - c, y' - c_1, \ldots, y^{(n)} - c_n$ *fortschreitet und in einer gewissen Umgebung des Punktes* $x = 0, y = c, y' = c_1, \ldots, y^{(n)} = c_n$ *konvergiert. In den Differenzen* $y^{(i)} - c_i$ *sind* c_i *Konstanten. Einige von ihnen können unendlich werden. Dann ist unter* $y^{(i)} - c_i$ *wie üblich* $\frac{1}{y^{(i)}}$ *zu verstehen. Es genüge die Reihe*

$$y = \sum_{i=0}^{i=\infty} a_i x^{n_i} \tag{57}$$

formal der Differentialgleichung

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{58}$$

Dabei sind die n_i *reelle oder komplexe Konstanten, über die folgende Annahmen zu machen sind: Ihre reellen Teile sind mit* i *von einem* i *an zunehmend geordnet und konvergieren gegen* $+\infty$. *Sind nicht alle* n_i *reell, so sei etwa* n_k *ein nicht reeller Exponent, dessen reeller Teil* r *möglichst klein ist. Sind dann die reellen Exponenten* n_i, *die kleiner als* r *sind, ganze nicht negative Zahlen, oder gibt es keine reellen Exponenten* $< r$, *so müssen wir voraussetzen, daß* r *keinen nicht negativen ganzzahligen Wert hat, und daß es nur einen Exponenten* n_i *gibt, dessen reeller Teil gleich* r *ist.*

Die Zahlen $c, c_1, \ldots$ *seien die „Werte" von* y *und der Ableitungen von* y *für* $x = 0$.

Ist eine der Zahlen c_i *(und dann auch alle folgenden)* ∞, *so muß die formal gebildete* i-*te Ableitung von* y *mit einer Potenz von* x *anfangen, deren Exponent einen negativen reellen Teil hat. Dann läßt sich* $\frac{1}{y^{(i)}}$ *nach unseren Annahmen über die* n_i *in eine nach Potenzen von* x *fortschreitende Reihe formal entwickeln, deren sämtliche Exponenten positiven reellen Teil haben. Diese Entwicklungen sind dann in* F *für* $\frac{1}{y^{(i)}}$ *einzusetzen.*

Unter diesen Annahmen lassen sich alle n_i linear mit ganzen rationalen Koeffizienten durch endlich viele unter ihnen ausdrücken.

Wir bezeichnen die Größen $x, y-c, \ldots, y^{(i)}-c_i, \ldots$ $\left(\text{bzw. } \frac{1}{y^{(i)}}\right)$ durch $z_1, z_2, \ldots, z_{i+2}, \ldots$ und können dann (58) in der Form schreiben:

$$\Phi(z_1, z_2, \ldots) = 0, \tag{59}$$

wo Φ eine gewöhnliche Potenzreihe in $z_1, z_2, \ldots$ ist, die im Nullpunkt verschwindet und in einer Umgebung des Nullpunktes konvergiert. Wir bezeichnen die ersten partiellen Ableitungen von Φ nach $z_1, z_2, \ldots$ durch $\Phi_1(z_i), \Phi_2(z_i), \ldots$ und behaupten, *daß die Gleichung* (59) *sich nötigenfalls durch eine solche ersetzen läßt, daß keine der Gleichungen*

$$\Phi_1(z_i) = 0, \quad \Phi_2(z_i) = 0, \ldots \tag{60}$$

formal besteht. Im Nachweis der Richtigkeit dieser Behauptung liegt die eigentliche Schwierigkeit der folgenden Entwicklungen.

Wir müssen zunächst an einige Tatsachen aus der Theorie der Teilbarkeit von Potenzreihen in mehreren Variablen in der Umgebung eines Punktes erinnern[20]. — Von allen Potenzreihen, die wir dabei betrachten, setzen wir voraus, daß sie in einer Umgebung des Nullpunktes konvergieren. — Eine Potenzreihe $\psi_1(z_i)$ heißt durch eine andere $\psi_2(z_i)$ *teilbar*, wenn eine Gleichung besteht:

$$\psi_1(z_i) = \psi_2(z_i)\, m(z_i),$$

wo $m(z_i)$ eine Potenzreihe ist. Ist jede der Potenzreihen $\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$ durch die andere teilbar, so heißen sie *äquivalent*. Dann verschwindet $m(z_i)$ im Nullpunkt nicht. Eine Potenzreihe $\psi(z_i)$ heißt *irreduzibel*, wenn sie nur durch solche Potenzreihen teilbar ist, die ihr äquivalent sind, wenn sie sich also nicht in der Form schreiben läßt:

$$\psi(z_i) = \psi_1(z_i)\, \psi_2(z_i),$$

wo beide Potenzreihen $\psi_1(z_i)$ und $\psi_2(z_i)$ im Nullpunkt verschwinden. Sieht man äquivalente irreduzible Potenzreihen nicht als verschieden an, so läßt sich jede im Nullpunkt verschwindende Potenzreihe nur auf eine einzige Weise als ein Potenzprodukt von irreduziblen Potenzreihen darstellen. Der Beweis dieses letzten Satzes beruht auf dem *Vorbereitungssatz* von Weierstraß. Der Vorbereitungssatz besagt: Kommt in einer im Nullpunkt verschwindenden Potenzreihe $\psi(z_1, z_2, z_3, \ldots)$ eine Potenz von z_1 allein vor, ist also $\psi(z_1, 0, 0, \ldots)$ nicht identisch in z_1 gleich 0, so ist

---

[20]) Man vergleiche etwa Weierstraß, Einige auf die Theorie der analytischen Funktionen mehrerer Veränderlichen sich beziehende Sätze, Gesammelte Werke, 2, S. 135—188.

$\psi(z_1, z_2, \ldots)$ einer Potenzreihe äquivalent, die in bezug auf z_1 ein *Polynom* ist, d. h. es gilt:

$$\psi(z_1, z_2, z_3, \ldots) = (z_1^m + A_1(z_2, z_3, \ldots) z_1^{m-1} + \ldots + A_m(z_2, z_3, \ldots)) E(z_1, z_2, \ldots),$$

wo $E(z_1, z_2, z_3, \ldots)$ im Nullpunkt nicht verschwindet und $A_1(z_2, z_3, \ldots), \ldots, A_m(z_2, z_3, \ldots)$ Potenzreihen in $z_2, z_3, \ldots$ sind. — Kommt aber in $\psi(z_1, z_2, \ldots)$ keine Potenz von z_1 allein, oder von z_2 allein usw. vor, so kann man durch eine lineare Transformation der Variablen z_i erreichen, daß in ψ von jeder der neuen Variablen eine von den anderen Variablen freie Potenz vorkommt, und dann ist der Vorbereitungssatz anwendbar.

Wäre nun der Vorbereitungssatz stets ohne vorherige lineare Transformation anwendbar, so würde der Beweis unserer obigen Behauptung keine Schwierigkeiten bieten. Denn dann könnten wir mit Hilfe des Vorbereitungssatzes aus der Gleichung $\Phi(z_i) = 0$ und der etwa noch außerdem bestehenden $\Phi_i(z_i) = 0$ die Variable z_{n+2} eliminieren und dadurch eine analytische Differentialgleichung erhalten, der y formal genügt und die von *niedrigerer* Ordnung wäre. Und eine endlichmalige Anwendung dieses Verfahrens würde uns zum Ziele führen. Da aber der Vorbereitungssatz nicht immer anwendbar ist, so scheint es, daß unsere heutigen Kenntnisse über analytische Funktionen mehrerer Variablen eine direkte Elimination einer *bestimmten* Variablen aus zwei analytischen Gleichungen nicht immer ermöglichen[21]. In unserem Falle gelingt es jedoch, auf einem Umwege zum Ziele zu kommen. —

Es kann vorkommen, daß eine Potenzreihe in μ Variablen z_i nach einer linearen homogenen umkehrbaren Transformation der z_i einer solchen Potenzreihe äquivalent ist, die von weniger als μ Variablen abhängt. Die kleinste Zahl ϱ von der Eigenschaft, daß $\psi(z_i)$ nach einer linearen homogenen umkehrbaren Transformation der z_i einer Potenzreihe in ϱ Variablen äquivalent ist, wollen wir als den *Rang* von $\psi(z_i)$ bezeichnen.

Ist $\psi(z_i)$ vom Range ϱ, so ist auch jeder Teiler von $\psi(z_i)$ vom Range ϱ. Denn transformieren wir die Variablen z_i in neue Variablen ζ_i, so geht dabei jeder Teiler von $\psi(z_i)$ in einen Teiler der transformierten Potenzreihe über; ist aber die transformierte Potenzreihe einer solchen äqui-

[21] Es sei etwa das folgende Problem genannt: Zwei gewöhnliche Potenzreihen $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$ konvergieren in einer Umgebung des Nullpunktes und verschwinden im Nullpunkt. Gibt es stets eine Potenzreihe $h(x, y)$, die in einer Umgebung des Nullpunktes konvergiert, und dort für alle und nur diejenigen Wertepaare hinreichend kleiner x, y verschwindet, die mit einem hinreichend kleinen z beide Potenzreihen f, g zu 0 machen? M. a. W.: Man betrachte die Schnittkurve von zwei Flächen, die im Nullpunkte algebraischen Charakter haben. Hat stets ihre Projektion auf eine beliebige durch den Nullpunkt hindurchgehende Ebene im Nullpunkt algebraischen Charakter?

valent, die nur von ϱ Variablen ζ_i abhängt, so gilt auch für jeden ihrer Teiler dasselbe, nach dem Satze über die Eindeutigkeit der Zerlegung einer Potenzreihe in irreduzible Faktoren.

Wir kehren nun zu unserer Frage zurück und wählen für $\Phi(z_i)$ eine Differentialgleichung, der y formal genügt, und bei der $\Phi(z_i)$ vom möglichst niedrigen Range ϱ ist. Ist $\Phi(z_i) = \Phi^{(1)}(z_i)\,\Phi^{(2)}(z_i)$, wo $\Phi^{(1)}$ und $\Phi^{(2)}$ Potenzreihen sind, so genügt y formal einer der Gleichungen

$$\Phi^{(1)}(z_i) = 0, \quad \Phi^{(2)}(z_i) = 0.$$

Daher können wir für $\Phi(z_i)$ eine *irreduzible* Potenzreihe vom Range ϱ nehmen. Es gibt also eine lineare homogene umkehrbare Transformation

$$z_i = \sum \sigma_{ik}\zeta_k, \quad \zeta_i = \sum s_{ik} z_k, \tag{61}$$

durch welche $\Phi(z_i)$ in eine Potenzreihe $\overline{\Phi}(\zeta_i)$ übergeführt wird, für die die Darstellung gilt

$$\Phi(z_i) = \overline{\Phi}(\zeta_i) = \Psi(\zeta_i)\,E(\zeta_i),$$

wo $\Psi(\zeta_i)$ nur von ϱ der Variablen ζ_i abhängt, etwa von $\zeta_1, \ldots, \zeta_\varrho$, und E im Nullpunkt nicht verschwindet. Ist $\frac{1}{E(\zeta_i)} = e(z_i)$, so können wir, indem wir nötigenfalls $\Phi(z_i)$ durch $\Phi(z_i)e(z_i)$ ersetzen, erreichen, daß $\Phi(z_i)$ durch (61) *direkt* in eine Potenzreihe $\Psi(\zeta_i)$ übergeführt wird, die nur von ϱ Variablen $\zeta_1, \ldots, \zeta_\varrho$ abhängig ist. *Die Differentialgleichung* $\Phi(z_i) = 0$ ***hat dann die gewünschte Eigenschaft.*** Denn angenommen, es befriedigte y formal auch noch eine Gleichung $\Phi_1(z_i) = \frac{\partial\,\Phi(z_i)}{\partial z_1} = 0$ etwa. Aus der Identität:

$$\Phi_1(z_i) = \frac{\partial\,\Phi(z_i)}{\partial z_1} = \sum s_{k1}\frac{\partial\,\Psi(\zeta_i)}{\partial \zeta_k} = \Psi^*(\zeta_i)$$

folgt, daß auch $\Phi_1(z_i)$ durch (61) in eine Potenzreihe $\Psi^*(\zeta_i)$ von $\zeta_1, \ldots, \zeta_\varrho$ übergeht. Wir wenden nun auf $\Psi(\zeta_i)$ und $\Psi^*(\zeta_i)$ eine weitere lineare homogene Substitution an

$$\zeta_i = \sum \tau_{ik} u_k, \quad u_i = \sum t_{ik}\zeta_k, \quad (i = 1, \ldots, \varrho;\ k = 1, \ldots, \varrho), \tag{62}$$

durch welche wir erreichen, daß auf beide Potenzreihen der Weierstraßsche Vorbereitungssatz anwendbar wird. Und zwar können wir erreichen, daß in Ψ und Ψ^* nach Transformation freie Potenzen einer und derselben Variablen, etwa u_1, vorkommen. Denn sind die Aggregate der Glieder niedrigster Dimension in $\Psi(\zeta_i)$ und $\Psi^*(\zeta_i)$ etwa $a(\zeta_i)$ und $b(\zeta_i)$, so brauchen wir (62) nur so einzurichten, daß nach der Transformation (62) in den homogenen Formen a und b alle nach Dimension zulässige Potenzprodukte der u_i wirklich vorkommen. Wir können daher schreiben

$$\Psi(\zeta_i) = X(u_i) = E(u_i)\Pi(u_i) = E(u_i)(u_1^\mu + A^{(1)}(u_i)u_1^{\mu-1} + \dots + A^{(\mu)}(u_i))$$

$$\Psi^*(\zeta) = X^*(u_i) = E^*(u_i)\,\Pi^*(u_i) =$$
$$= E^*(u_i)\,(u_1^\nu + A^{*(1)}(u_i)\,u_1^{\nu-1} + \dots + A^{*(\nu)}(u_i)).$$

Hier sind $E(u_i)$, $E^*(u_i)$ im Nullpunkt nicht verschwindende Potenzreihen, $A^{(i)}$ und $A^{*(i)}$ aber Potenzreihen in $u_2, \dots, u_\varrho$. Bilden wir nun die Resultante $P(u_2, \dots, u_\varrho)$ von Π und Π^* in bezug auf u_1, so besteht eine Identität:

$$P(u_2, \dots, u_\varrho) = B(u_i)\,\Pi(u_i) + B^*(u_i)\,\Pi^*(u_i)$$

oder

$$(63) \qquad P(u_2, \dots, u_\varrho) = C(u_i)\,X(u_i) + C^*(u_i)\,X^*(u_i).$$

Gehen wir nun zurück zu den ζ_i und z_i, so entsteht aus $P(u_2, \dots, u_\varrho)$ eine Potenzreihe $R(z_i)$, deren Rang höchstens gleich $\varrho - 1$ ist, und für die sich aus (63) eine identische Beziehung ergibt von der Form

$$R(z_i) = D(z_i)\,\Phi(z_i) + D_1(z_i)\,\Phi_1(z_i).$$

Hieraus würde aber folgen, daß y auch der Gleichung $R(z_i) = 0$ formal genügt, und $R(z_i)$ ist vom Range $\varrho - 1$. Damit ist unsere obige Behauptung bewiesen.

Wir können also annehmen, daß keine der Gleichungen (60) formal befriedigt ist. Setzt man daher in eine von den Potenzreihen $\Phi_i(z)$ in (60) die Reihenentwicklung für y ein, und ordnet das Resultat nach reellen Teilen der Exponenten der einzelnen Glieder, was nach unseren Annahmen möglich ist, so werden nicht alle Glieder identisch verschwinden, und die Entwicklung wird mit einigen Gliedern anfangen, bei denen die reellen Teile der Exponenten einen möglichst kleinen Wert haben, etwa r_i. Diese Glieder seien etwa:

$$(64) \qquad c_{i,\varkappa}\, x^{\lambda_{i,\varkappa}}.$$

Aus unseren Prämissen folgt weiter: Bricht man die Reihe für y irgendwo hinreichend weit ab, so ändern sich die Anfangsglieder der Entwicklungen der $\Phi_i(z)$ nicht. Die Exponenten $\lambda_{i,\varkappa}$ sind also lineare homogene ganzzahlige Kombinationen aus gewissen n_i. Wir trennen nun die Reihe für y in zwei Teile

$$y = A_t(x) + R_t(x) = \sum_{i=0}^{i=t-1} a_i x^{n_i} + \sum_{i=t}^{i=\infty} a_i x^{n_i}$$

und nehmen dabei t von vornherein so groß, daß bereits von diesem t an bei der Einsetzung von $A_t(x)$ für y die Anfangsglieder der Φ_i die Aggregate der Ausdrücke (64) sind. Wir bezeichnen nun $A_t(x)$, $A_t'(x)$, $\dots$, $A_t^{(n)}(x)$ mit $u_2, u_3, \dots, u_{n+2}$, und $R_t(x)$, $R_t'(x)$, $\dots$, $R_t^{(n)}(x)$ mit $v_2, v_3, \dots, v_{n+2}$, wo die Indizes denen der z_i entsprechend gewählt sind. Die u_i und v_i hängen dabei noch von t ab.

Wir wollen nun $\Phi(z_i)$ nach Potenzen der v_i entwickeln. Zu dem Zwecke bedenken wir, daß, solange der reelle Teil des Anfangsgliedes von $y^{(i)}$ nicht negativ ist, $z_{i+2} = y^{(i)} - c_i = (u_{i+2} - c_i) + v_{i+2}$ ist, so daß wir zur Entwicklung nach Potenzen dieser v_{i+2} einfach den Taylorschen Lehrsatz direkt zu benutzen haben. Hat dagegen das Anfangsglied $b_i x^{\mu_i}$ von $y^{(i)}$ einen Exponenten mit negativem reellem Teil, so ist

$$(65)\quad z_{i+2} = \frac{1}{u_{i+2} + v_{i+2}} = \frac{1}{b_i} x^{-\mu_i} \frac{1}{\frac{u_{i+2}}{b_i x^{\mu_i}} + \frac{v_{i+2}}{b_i x^{\mu_i}}} = \frac{1}{b_i} x^{-\mu_i} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{u_{i+2}}{b_i x^{\mu_i}} - 1 + \frac{v_{i+2}}{b_i x^{\mu_i}}\right)^k.$$

Hier haben $\frac{u_{i+2}}{b_i x^{\mu_i}} - 1$ und $\frac{v_{i+2}}{b_i x^{\mu_i}}$ lauter Glieder mit verschiedenen Exponenten, und die reellen Teile der Exponenten aller Glieder von $\frac{v_{i+2}}{b_i x^{\mu_i}}$ sind, sobald t hinreichend groß genommen ist, größer als die Exponenten der Glieder von $\frac{u_{i+2}}{b_i x^{\mu_i}}$. Wir bemerken endlich, daß die Entwicklungen der aus (65) formal gebildeten Ableitungen von z_{i+2} nach v_{i+2} für $v_{i+2} = 0$ lauter Exponenten haben, deren reelle Teile nicht negativ sind. Die Formel (65) zeigt, daß man bei der Entwicklung von $\Phi(z_i)$ nach Potenzen der v_i den Taylorschen Lehrsatz benutzen kann. Bezeichnen wir noch für $i \geqq 0$ allgemein $u_{i+2} - c_i$ bzw. $\frac{1}{u_{i+2}}$ durch w_{i+2} (es ist also $w_{i+2} = (z_{i+2})_{v_{i+2}=0}$), so gilt die Entwicklung

$$(66)\quad \Phi(z) = \Phi(x, w) + \sum v_i \left(\frac{\partial \Phi(x,z)}{\partial v_i}\right)_{z_s = w_s} + \sum v_i v_k \left(\frac{\partial^2 \Phi(x,z)}{\partial v_i \, \partial v_k}\right)_{z_s = w_s} + \cdots$$

Hier sind alle Differentiationen so auszuführen, daß man zuerst nach z_i differentiiert und dann z_i nach v_i (entweder aus $z_i = u_i + v_i$, oder aus $z_i = \frac{1}{u_i + v_i}$) differentiiert. Nun bedenken wir aber, daß die Exponenten der einzelnen Glieder in den Entwicklungen der Ableitungen von z_i nach v_i nicht negativen reellen Teil haben. Ebenso enthalten die partiellen Ableitungen von $\Phi(z_i)$ nach den z_i nur solche Glieder, deren Exponenten nicht negative reelle Teile haben, und dies ist auch dann der Fall, wenn wir die z_i durch die w_i ersetzen. Aus alledem folgt, daß die reellen Teile der Exponenten der einzelnen Glieder in den Summen

$$\sum v_i v_k \left(\frac{\partial^2 \Phi(x,z)}{\partial v_i \, \partial v_k}\right)_{z_s = w_s}, \quad \sum v_i v_k v_l \left(\frac{\partial^3 \Phi(x,z)}{\partial v_i \, \partial v_k \, \partial v_l}\right)_{z_s = w_s}, \ldots$$

nicht kleiner sind als $2\sigma_t$, wo σ_t der reelle Teil des Exponenten von $a_t x^{n_t}$ ist.

Wir haben oben den Taylorschen Lehrsatz benutzt, obgleich die Bedeutung der Entwicklung (66) natürlich eine ganz andere ist als gewöhnlich. Die u_i und v_i sind nicht hinreichend kleine *Zahlen*, sondern Potenzreihen in x. Die Gleichung (66) bedeutet, daß, wenn man rechts und links für die z_i und für die v_i ihre Reihenentwicklungen in x einsetzt und rein formal umordnet, auf der rechten und linken Seite genau dieselben Glieder vorkommen. Dieses Umordnen ist aber stets ohne Ausführung von Grenzprozessen möglich, da nach unseren Voraussetzungen über die u_i stets nur *endlich* viele Glieder entstehen können, die dieselben Exponenten haben.

Wir könnten die Gleichungen (65), (66) auch als *Kongruenzen* deuten nach hinreichend hohen positiven Potenzen x^ϱ von x als Modul, in dem Sinne, daß von allen Potenzen von x, deren Exponenten den reellen Teil größer als ϱ haben, abzusehen ist. Dann kommen auf beiden Seiten der Gleichungen (65) und (66) für jedes ϱ stets nur endlich viele Glieder in Betracht, und die Gleichungen (65), (66) besagen, daß die entsprechenden Kongruenzen für jedes ϱ gelten. — Und da bei unseren Entwicklungen, die zur Gleichung (66) führen, stets als Koeffizienten Potenzreihen in x auftreten, bei denen die Exponenten der einzelnen Glieder nichtnegative reelle Teile haben, so ist klar, warum wir den Taylorschen Lehrsatz (und die Regel über die Differentiation einer Funktion von einer Funktion) benutzen dürfen.

Wir fassen nun die erste Summe auf der rechten Seite von (66) ins Auge

$$\sum v_i \left(\frac{\partial \Phi(x, z)}{\partial v_i}\right)_{z_s = w_s}.$$

Ist für irgend ein $i > 1$ das zugehörige $z_i = u_i + v_i$, so ist der Koeffizient von v_i gleich

$$\Phi_i(x, w_2, \ldots, w_{n+2}).$$

Ist aber $z_i = \frac{1}{u_i + v_i}$, so ist der Koeffizient von v_i gleich

$$\Phi_i(x, w_2, \ldots, w_{n+2}) \cdot \frac{-1}{u_{i+2}^2}.$$

Wir suchen nun die Glieder von (66), deren Exponenten den kleinsten reellen Teil haben. Für i, für welche $z_i = u_i + v_i$ ist, sind die Anfangsglieder von $v_i \left(\frac{\partial \Phi}{\partial v_i}\right)_{z_s = w_s}$ für hinreichend große t gleich

$$(i-2)! \binom{n_t}{i-2} a_t\, x^{n_t - i + 2}\, c_{i,\varkappa}\, x^{\lambda_{i,\varkappa}} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots). \tag{67}$$

Ist der reelle Teil von n_t gleich σ_t, so ist der reelle Teil der Exponenten der Glieder (67) gleich $\sigma_t + \nu_i - i + 2$. Ist aber $z_i = \frac{1}{u_i + v_i}$, so kommt

$$(68)\qquad -(i-2)!\binom{n_t}{i-2}a_t\, x^{n_t-i+2}c_{i,\varkappa}x^{\lambda_{i,\varkappa}}\frac{1}{b_i^2}x^{-2\mu_i}\qquad(\varkappa=1,2,\ldots),$$

wo $b_i x^{\nu_i}$ das Anfangsglied von u_i ist. Ist der reelle Teil von μ_i gleich ϱ_i, so ist der reelle Teil der Exponenten von (68) gleich

$$\sigma_t+\nu_i-2\varrho_i-i+2.$$

Hier sind die Zahlen ν_i, ϱ_i von t unabhängig. Wir bringen im Aggregat der Glieder (67) und (68) $a_t x^{n_t}$ vor die Klammer und ordnen dann die Glieder innerhalb der Klammer nach ihren Exponenten. Wir erhalten dann

$$a_t x^{n_t}\sum\varphi_s(n_t)\,x^{k_s},$$

wo k_s lauter verschiedene komplexe Zahlen sind, $\varphi_s(n_t)$ aber Polynome in n_t mit festen von t unabhängigen Zahlenkoeffizienten. Alle $\varphi_s(n_t)$ können offenbar nicht identisch in n_t verschwinden, da in (67) und (68) i lauter verschiedene Werte annimmt, und daher n_t in n-ter Potenz nur einmal — in $\binom{n_t}{n}$ — vorkommt. Ist nun k etwa ein k_s, bei dem der reelle Teil möglichst klein ist, und der Koeffizient $\varphi(n_t)$ von x^k von 0 verschieden, so kann $\varphi(n_t)$ jedenfalls nur für endlich viele n_t verschwinden. Von einem gewissen t an muß sich also das Glied

$$a_t\varphi(n_t)\,x^{n_t+k}$$

entweder mit einem Glied aus der zweiten, dritten Summe auf der rechten Seite von (66) wegheben, oder mit einem Glied von $\Phi(x, w)$. Die reellen Teile der Exponenten der Glieder der zweiten, dritten, ... Summe der rechten Seite von (66) sind aber nicht kleiner als $2\sigma_t$, also von einem gewissen t an sicher größer als der reelle Teil von σ_t+k. Daher muß bei der Entwickelung von $F(x, w_2, \ldots, w_{n+2})$ sich wenigstens ein Glied ergeben, dessen Exponent gleich n_t+k ist. Die Exponenten der Glieder von $\Phi(x, w)$ setzen sich aber linear ganzzahlig aus $1, n_0, n_1, \ldots, n_{t-1}$ zusammen. Ebenso setzt sich k aus 1 und endlich vielen n_i linear ganzzahlig zusammen. Daraus folgt aber, daß alle n_i sich linear ganzzahlig durch endlich viele aus ihnen ausdrücken lassen, w. z. b. w.

Im Satz 21 haben wir für sehr ausgedehnte Klassen von nach beliebigen Potenzen des Argumentes fortschreitenden Reihen die Eigenschaft formuliert, keiner analytischen partiellen Differentialgleichung *formal* zu genügen. Wir wollen nun diese Eigenschaft auf durch solche Reihen darstellbare *Funktionen* ausdehnen.

Um dies zu erreichen, verlangen wir von den Exponenten $n_i=\sigma_i+\sqrt{-1}\,\tau_i$ erstens, daß $\lim\limits_{i=\infty}\sigma_i=+\infty$ ist, zweitens, daß $\left|\frac{\tau_i}{\sigma_i}\right|$ von einem gewissen i an beschränkt bleibt. Dies bedeutet, geometrisch gesprochen, daß alle n_i von einem gewissen i an innerhalb eines Winkels von der Öffnung $\gamma < \pi$ liegen, der den positiven Teil der reellen Aches einschließt, die imaginäre Achse dagegen (bis auf den Nullpunkt) vollständig außerhalb läßt.

Um die auf die Konvergenz der Reihe (57) bezügliche Annahme zu formulieren, führen wir den Begriff der *absoluten Konvergenz im schärferen Sinne* ein. Wir nennen eine Reihe $\sum a_i x^{n_i}$ mit komplexen Exponenten $n_i = \sigma_i + \sqrt{-1}\,\tau_i$, die den obigen Bedingungen genügen, absolut konvergent im schärferen Sinne für $|x| = \nu$, falls die Reihe $\sum |a_i| \nu^{\sigma_i} e^{2\pi|\tau_i|}$ konvergiert. Eine solche Reihe konvergiert absolut auf dem ganzen Kreise $|x| = \nu$, sowie in jedem vom Nullpunkt verschiedenen Punkt innerhalb dieses Kreises, und absolut im schärferen Sinn auf jedem konzentrischen Kreise mit kleinerem Radius. Konvergiert $\sum a_i x^{n_i}$ für $|x| = \nu$ absolut im schärferen Sinn, so konvergiert die formal gebildete Ableitung $\sum n_i a_i x^{n_i - 1}$ dieser Reihe absolut im schärferen Sinn für $|x| = \nu - \varepsilon$, wo ε eine beliebig kleine feste positive Größe ist. Denn um dies zu beweisen, haben wir aus der Konvergenz von $\sum \alpha_i \nu^{\sigma_i} e^{2\pi|\tau_i|}$, wo $|a_i| = \alpha_i$ gesetzt ist, die Konvergenz der Reihe $\sum \alpha_i |\sigma_i + \sqrt{-1}\,\tau_i| (\nu - \varepsilon)^{\sigma_i - 1} e^{2\pi|\tau_i|}$ zu folgern. Dies folgt aber aus

$$\lim_{i=\infty} |\sigma_i + \sqrt{-1}\,\tau_i| \frac{(\nu-\varepsilon)^{\sigma_i - 1}}{\nu^{\sigma_i}} = \left|\frac{\sigma_i + \sqrt{-1}\,\tau_i}{\sigma_i}\right| \sigma_i \frac{(\nu-\varepsilon)^{\sigma_i - 1}}{\nu^{\sigma_i}} = 0 .$$

Denn $\frac{\sigma_i + \sqrt{-1}\,\tau_i}{\sigma_i}$ ist von einem gewissen i an absolut beschränkt und $\lim_{i=\infty} \sigma_i \left(\frac{\nu-\varepsilon}{\nu}\right)^{\sigma_i} = 0$. Hieraus folgt, daß jede formal gebildete Ableitung von $\sum a_i x^{n_i}$ absolut im schärferen Sinn für $|x| = \nu - \varepsilon$ konvergiert. Und aus der Gleichmäßigkeit der Konvergenz, die sich aus dem weiter unten folgenden Beweis des Eindeutigkeitssatzes ergibt, folgt, daß die formal gebildeten Ableitungen die Ableitungen der durch die ursprüngliche Reihe dargestellten Funktion darstellen.

Konvergiert $\sum a_i x^{n_i}$ absolut im schärferen Sinn, und sind alle σ_i positiv, so wird auch, wie wir sofort ausführlich beweisen werden, die Majorante $\sum \alpha_i \nu^{\sigma_i} e^{2\pi|\tau_i|}$ mit kleiner werdendem ν beliebig klein. Daraus folgt, daß auch das Resultat der Einsetzung von (57) in die linke Seite von (58) auf einem gewissen Kreise um den Nullpunkt absolut im schärferen Sinne konvergiert und dort das Resultat der Einsetzung der durch (57) dargestellten Funktion in (58) darstellt. Es bleibt daher nur die Eindeutigkeit zu beweisen: Konvergiert eine Reihe $\sum a_i x^{n_i}$ auf einem Kreise um den Nullpunkt absolut im schärferen Sinn, und ist dort die durch sie dargestellte Funktion gleich 0, so verschwinden alle Koeffizienten a_i.

Wir können offenbar annehmen, daß alle $n_i = \sigma_i + \sqrt{-1}\,\tau_i$ untereinander verschieden sind und daß σ_i mit i nichtabnehmend geordnet sind. Wir können weiter annehmen, daß die ersten $k\,(k > 0)\,\sigma_i$ verschwinden, da dies sonst durch Multiplikation mit $x^{-\sigma_0}$ zu erreichen ist. Es sei also $\sigma_0 = \ldots = \sigma_k = 0$, $\sigma_{k+1} > 0$. Wir behaupten zuerst, daß jedem positiven ε ein solches δ zugeordnet werden kann, daß $\left|\sum\limits_{k+1}^{\infty} a_i x^{n_i}\right| < \varepsilon$ ist, sobald $|x| < \delta$ wird. Es sei allgemein $|a_i| = \alpha_i$. Aus der absoluten Konvergenz im schärferen Sinn von $\sum a_i x^{n_i}$ folgt, daß die Dirichletsche Reihe

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} \alpha_i e^{2\pi|\tau_i|} e^{-\sigma_i s} \tag{69}$$

in einer gewissen s-Halbebene absolut und daher gleichmäßig konvergiert. Daraus folgt, daß man ein solches δ_1 angeben kann, daß der absolute Betrag von (69) kleiner als ε wird, sobald der reelle Teil von s größer als δ_1 wird. Daraus folgt aber, daß der absolute Betrag von $\sum\limits_{i=k+1}^{\infty} a_i x^{n_i}$ kleiner als ε wird, sobald $|x| < \delta = e^{-\delta_1}$ wird.

Infolgedessen müßte, wenn alle Koeffizienten $a_0, \ldots, a_k$ von 0 verschieden wären, die Summe $a_0 x^{\sqrt{-1}\tau_0} + \ldots + a_k x^{\sqrt{-1}\tau_k}$ zugleich mit x gegen 0 konvergieren. Es wird also genügen, zu zeigen, daß eine solche Folge der reellen ins Unendliche wachsenden Werte von s existiert, daß

$$f(s) = a_0 e^{\sqrt{-1}s\tau_0} + \ldots + a_k e^{\sqrt{-1}s\tau_k}$$

gegen einen von 0 verschiedenen Wert konvergiert. Die ganze Funktion $f(s)$ kann nicht identisch verschwinden. Denn sonst müßte sie auch für rein imaginäre $s = \sqrt{-1}\,t$ verschwinden, und in $f(s)$ würde für hinreichend großes t ein Glied überwiegen, da $\tau_0, \ldots, \tau_k$ untereinander verschieden sind. Es sei für ein reelles $s = s_0$ etwa $f(s_0) \neq 0$. Es sei m eine beliebig große ganze positive Zahl. Dann gibt es bekanntlich eine solche von 0 verschiedene mit Hilfe der bekannten Dirichletschen Schlußweise zu findende ganze positive Zahl s_m, daß die Zahlen $s_m\tau_0, \ldots, s_m\tau_k$ sich von gewissen ganzzahligen Vielfachen von 2π um weniger als $\frac{1}{m^2}$ unterscheiden. Und folglich wird der Wert von $f(s_0 + ms_m)$ mit wachsendem m gegen $f(s_0) \neq 0$ konvergieren. W. z. b. w.

Wir können das Resultat zusammenfassen im

Satz 22. *Hat eine absolut im schärferen Sinn konvergente Reihe*

$$y(x) = \sum a_i x^{n_i} \qquad (n_i = \sigma_i + \sqrt{-1}\,\tau_i)$$

die Eigenschaft, daß 1. $\operatorname{Lim} \sigma_i = +\infty$ *ist*; 2. $\left|\frac{\tau_i}{\sigma_i}\right|$ *von einem gewissen* i *an beschränkt bleibt*; 3. *ist* σ_i *das kleinste* σ, *zu dem ein von* 0 *verschiedenes* τ *gehört, und sind alle kleineren* σ *ganze nicht negative Zahlen, so ist* σ_i *keine ganze nicht negative Zahl und es gibt keinen zweiten Exponenten* n *mit demselben* σ_i; *genügt ferner die Funktion* $y(x)$ *einer Differentialgleichung, deren linke Seite analytisch in* x, $y - c$, $y' - c_1, \ldots, y^{(n)} - c_n, \frac{1}{y^{(n+1)}}, \ldots, \frac{1}{y^{(n+m)}}$ *ist, wo die reellen Teile der Exponenten der Anfangsglieder von* x, $y - c$, $y' - c_1, \ldots, y^{(n)} - c_n, \frac{1}{y^{(n+1)}}, \ldots, \frac{1}{y^{(n+m)}}$ *nicht negativ und* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *endliche Konstanten sind, so besitzen die Exponenten* n_i *eine endliche ganzzahlige Basis.*

In diesem Satze ist zugleich eine Verallgemeinerung des Satzes 12 auf den Fall enthalten, wo die Exponenten komplex sind[22]). Die Substitution $x = e^{-s}$ führt dann zu einem dem Satz 12 ganz analogen Satz über Dirichletsche Reihen $\sum a_i e^{-\lambda_i s}$, wo λ_i komplex sind, und eine analog zu formulierende Forderung der absoluten Konvergenz im schärferen Sinn zu stellen ist.

Bei der Formulierung des am Anfang dieses Paragraphen aufgestellten Satzes haben wir über die Gestalt der Differentialgleichung (58) Annahmen gemacht, die noch etwas allgemeiner gefaßt werden könnten. Indessen gilt wahrscheinlich der Satz, daß unter den Exponenten n_i nur endlich viele linear unabhängige vorkommen, auch dann, wenn F eine nach beliebigen ganzen positiven und negativen Potenzen ihrer Argumente fortschreitende, in einer gewissen Umgebung des Nullpunktes konvergente Potenzreihe ist. Dieser Fall ist jedoch den Methoden, die in diesem Paragraphen zur Anwendung gebracht worden waren, nicht mehr zugänglich. Der Grund, warum die Gültigkeit des Satzes 21 und 22 auch in diesem Falle plausibel erscheint, ist leicht zu übersehen. Würden unter den Exponenten n_i unendlich viele linear unabhängige vorkommen, so würden wir durch wiederholten Umlauf um den Nullpunkt wenigstens formal unendlich viele willkürliche Konstanten in das Integral hineinbringen können. Diese Schlußweise läßt sich in vielen Fällen vollständig durchführen. So kann man z. B. mit ihrer Hilfe beweisen, daß Funktion $\sum_{i=1}^{\infty} x^{\log p_i}$, wo p_i die i-te Primzahl ist, keiner Differentialgleichung

[22]) In der Tat läßt sich jede algebraische Differentialgleichung, deren linke Seite ein Polynom in x, der unbekannten Funktion und ihren Ableitungen ist, eventuell durch Division mit einem Potenzprodukt aus der unbekannten Funktion und ihren Ableitungen auf die Form (58) bringen.

genügt, deren linke Seite in einer Umgebung des Nullpunktes eine eindeutige im allgemeinen analytische Funktion der Ableitungen wäre. Und analoge Potenzreihen lassen sich bei mehreren Variablen bilden. So läßt sich z. B. die analoge Tatsache für die Reihe

$$\sum x^n y^{\log n}$$

beweisen, die aus der Reihe $\sum x^n n^{-s}$ durch eine einfache Substitution entsteht. Und damit ist dann ein neuer — dritter — Beweis der Eigenschaft der Reihe $\sum x^n n^{-s}$ gegeben, keiner algebraischen partiellen Differentialgleichung zu genügen. Ich werde diese Bemerkungen an einer anderen Stelle ausführen und dabei auf den engen Zusammenhang eingehen, in dem sie mit einer bekannten, zuerst von Herrn H. Bohr in der Theorie der Riemannschen ζ-Funktion verwendeten Schlußweise stehen.

(Eingegangen am 3. Februar 1919.)