

Über den Durchgang bewegter Moleküle durch inhomogene Kraftfelder.

Von H. Kallmann und F. Reiche in Berlin.

Mit fünf Abbildungen. (Eingegangen am 28. Juli 1921.)

Einleitung.

Im Hinblick auf Versuche, die im Kaiser Wilhelm-Institut für physikalische Chemie und Elektrochemie unternommen werden, erlauben wir uns, folgende Überlegungen zu publizieren.

In jüngster Zeit ist vielfach das Wesen und die Größe der Kräfte diskutiert worden, mit denen Gasmoleküle aufeinander wirken¹⁾. Hierbei werden vor allem zwei Fälle unterschieden: 1. Die einzelnen Moleküle stellen einen elektrischen Dipol mit bestimmtem konstanten Moment dar; 2. die Moleküle besitzen ursprünglich kein elektrisches Moment, und erst in der Nähe anderer Moleküle wird durch das Feld dieser Nachbarmoleküle in ihnen ein Moment erzeugt. Der Nachweis, daß ein Molekül ein konstantes Moment hat, läßt sich aus der Dispersions- und Absorptionskurve im langwelligen Gebiete erbringen, seine Größe aus dem Temperaturverlauf der Dielektrizitätskonstante bestimmen²⁾.

Im hiesigen Institut wird nun folgende neue Methode zum Nachweis der Dipole versucht: Es wird ein Molekülstrahl durch ein inhomogenes elektrisches Feld geschickt; dann muß, wenn die Moleküle Dipole tragen, eine merkliche Anzahl der Moleküle aus ihrer Bahn abgelenkt werden.

Die Größe der Ablenkung und die Anzahl der abgelenkten Moleküle hängt nun außer von der Größe des Moments im wesentlichen von der Drehbewegung des Moleküls ab. Um also aus gemessenen Ablenkungen quantitative Schlüsse auf molekulare Größen ziehen zu können, muß man diese Eigendrehung der Moleküle berücksichtigen. Wir haben es daher im folgenden unternommen, eine Theorie der Bewegung eines Dipols in einem inhomogenen elektrischen Felde zu geben in Abhängigkeit von seiner Eigendrehung.

Wir haben uns dabei auf den Fall beschränkt, daß das Dipolmolekül angenähert als starre Hantel betrachtet werden darf, und daß die Achse des Moments mit der Hantelachse zusammenfällt.

¹⁾ P. Debye, Phys. ZS. **21**, 178, 1920; **22**, 302, 1921. W. H. Keesom, ebenda **22**, 129, 1921.

²⁾ P. Debye, Phys. ZS. **13**, 97, 1912; Verh. d. D. Phys. Ges. **15**, 777, 1913.

In Strenge wird dies nur bei zweiatomigen Molekülen und gewissen langgestreckten organischen Molekülen zutreffen. Im allgemeinen müßte man aber das Molekül als starren Körper mit drei voneinander verschiedenen Hauptträgheitsmomenten betrachten und ferner annehmen, daß das elektrische Moment eine beliebige Richtung gegen die drei Hauptträgheitsachsen einnimmt. Dieser allgemeinste Fall scheint aber vorerst zu quantitativen Betrachtungen ungeeignet zu sein, denn es gehen sechs im allgemeinen unbekannte molekulare Größen ein, nämlich die drei Trägheitsmomente, die beiden Winkel, die die Richtung des Moments gegen die drei Hauptträgheitsachsen festlegen, und die Größe des Moments. In dem von uns betrachteten Falle geht nur das elektrische Moment und das Trägheitsmoment ein. Letzteres wird in vielen Fällen bekannt sein¹⁾.

Man könnte noch versuchen, sich von anderer Seite dem allgemeinen Falle zu nähern. Es wird manchmal möglich sein, das Molekül in erster Näherung als eine Kugel, d. h. als einen starren Körper mit drei gleichen Trägheitsmomenten aufzufassen; dabei ist dann die Richtung des elektrischen Moments beliebig. Die Behandlung dieses Falles muß aber für eine weitere Mitteilung zurückgestellt werden.

Im folgenden wird nun unter den genannten Voraussetzungen die Bewegung des Dipols bestimmt; dabei erhält man für den Fall kleiner und für den großer Ablenkungen geschlossene Formeln. Für den Fall mittlerer Ablenkungen wird ein graphisches Verfahren angegeben, das die Ablenkungen zu ermitteln gestattet. Bevor wir aber auf die Berechnung selbst eingehen, wollen wir noch die Frage diskutieren, mit welchen Kräften man überhaupt auf bewegte Dipole einwirken kann.

a) Läßt man einen Strahl von Dipolmolekülen durch ein inhomogenes elektrisches Feld treten, so wird die auf das Molekül ausgeübte Kraft durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$\mu_e \frac{d\mathcal{E}}{ds},$$

wo s die Richtung des (stärksten) Gefälles von \mathcal{E} , μ_e die Komponente des elektrischen Moments in dieser Richtung ist.

b) Zu dieser elektrischen Ablenkung existiert nun auch das magnetische Analogon. Bewegt sich ein Molekül, das ein magnetisches Moment trägt, durch ein inhomogenes Magnetfeld \mathcal{H} , so wird die wirksame Kraft durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$\mu_p \frac{d\mathcal{H}}{ds}.$$

¹⁾ A. Eucken, Jahrb. d. Radioakt. u. Elektr. 1920, S. 361.

μ_p ist dabei die Komponente des magnetischen Moments in der s -Richtung.

Das Verhältnis der beiden Kräfte im Falle b) und a) ist also gleich

$$\frac{\mu_p}{\mu_e} \cdot \frac{\frac{d\mathfrak{H}}{ds}}{\frac{d\mathfrak{E}}{ds}}$$

Da nun die größten vorkommenden magnetischen Momente etwa zehnmal kleiner sind ¹⁾ als elektrische Momente, die durch die Ablenkungsmethode noch gut nachweisbar sind, so muß $\frac{d\mathfrak{H}}{ds}$ etwa 10mal größer sein als $\frac{d\mathfrak{E}}{ds}$, damit durch die hier skizzierte Methode auch die magnetischen Momente der Moleküle ebenso gut nachweisbar werden. Es scheint also durchaus möglich zu sein, mit dieser Methode auch magnetische Momente zu bestimmen ²⁾.

c) Außer den eben genannten Wirkungen kann man aber noch zwei weitere erwarten. Man denke sich einen Strahl von Molekülen, die elektrische Dipole tragen, durch ein homogenes elektrisches Feld hindurchtreten. Dann werden die Moleküle im Mittel ein elektrisches Moment in Richtung des Feldes besitzen. Wirkt senkrecht zu dem elektrischen Feld ein inhomogenes Magnetfeld, und zwar derart, daß die magnetische Feldstärke nur parallel dem elektrischen Felde veränderlich ist, dann wird auf den Dipol eine Kraft ausgeübt, die senkrecht zu dem magnetischen Vektor und senkrecht zur Geschwindigkeit v des Dipols steht. Sie ist durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$\frac{\mu_e}{c} [v \mathfrak{H}] \frac{\left| \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x} \right|}{|\mathfrak{H}|}$$

x ist dabei die Richtung des elektrischen Feldes.

Zu dieser Kraft besteht nun wieder das magnetische Analogon. Man denke sich den elektrischen Dipol durch einen magnetischen ersetzt, das homogene elektrische Feld durch ein homogenes Magnetfeld, das inhomogene Magnetfeld durch ein inhomogenes elektrisches Feld, so wirkt auf ein Molekül eine Kraft senkrecht zu seiner Geschwindigkeit v und zu der elektrischen Feldstärke von der Größe

$$\frac{\mu_p}{c} [v \mathfrak{E}] \frac{\left| \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial x} \right|}{|\mathfrak{E}|}$$

¹⁾ W. Pauli, Phys. ZS. 21, 615, 1920.

²⁾ Es sei bemerkt, daß nach Pauli (vgl. die vorige Anmerkung) die Richtung der magnetischen Momente senkrecht zur Hantelachse zu stehen scheint.

Wie die nähere Ausrechnung zeigt, bewegen sich in beiden Fällen die Moleküle angenähert in Spiralbahnen. Setzt man jedoch für die Größen μ_e , μ_p , v , \mathfrak{S} und \mathfrak{E} Werte ein, wie sie praktisch vorkommen, so zeigt sich, daß die zu erwartenden Ablenkungen so klein sind, daß ihr Nachweis heute nur schwer möglich erscheint.

Es bleiben also nur die unter a) und b) erwähnten Fälle zu behandeln. Die Theorie des Falles a) lassen wir nunmehr folgen.

Im letzten Paragraphen behandeln wir außerdem noch den Fall, daß das Molekül kein festes Moment besitzt, sondern daß sein Moment erst durch die äußere Feldstärke induziert wird.

§ 1. Formulierung des Problems und Aufstellung der Bewegungsgleichungen des Dipols.

Für die theoretische Behandlung des in der Einleitung besprochenen Effektes legen wir die folgende schematisierte Versuchsanordnung zugrunde (Fig. 1). Das zylindersymmetrische Feld wird durch den schraffierten Draht AA vom Radius ϱ und den Zylindermantel BB vom Radius R erzeugt. Der Draht besitze das Potential φ_0 , der Zylindermantel das Potential $\varphi_1 < \varphi_0$. In der Entfernung r von der Achse herrscht dann die Feldstärke

wobei

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E}_r &= \frac{C}{r} \\ C &= \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{\lg(R/\varrho)} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Dabei ist vorausgesetzt, daß die Zylinderlänge groß gegen R ist.

In dieses Feld wird, in der Entfernung r_0 von der Achse, in der Richtung des gefiederten Pfeiles, ein Dipolmolekül von der Masse M und dem elektrischen Moment μ hineingeschossen. Zur Vereinfachung der Rechnung machen wir, wie in der Einleitung erwähnt, die Annahme, daß man den Dipol durch ein Hantelmodell approximieren kann, dessen Achse mit der Achse des elektrischen Moments übereinstimmt. Sein Trägheitsmoment sei J . Das Impulsmoment in Richtung der Hantelachse sei $= 0^1$.

Befindet sich der Dipol zur Zeit t im Punkte D , so sei seine Lage durch r , ϑ und φ bestimmt. Dabei ist (Fig. 2) ϑ der Winkel, den die Dipolachse (vom negativen zum positiven Pol gerechnet) mit der Richtung wachsender r bildet; das Azimut φ ist folgendermaßen

¹⁾ W. Lenz, Verh. d. D. Phys. Ges. 21, 632, 1919. F. Reiche, ZS. f. Phys. 1, 283, 1920.

Bei Einführung der Konstanten β , die den Drehimpuls in der Feldrichtung darstellt, nehmen die beiden ersten Gleichungen (5) folgende Gestalt an:

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{r} &= -\frac{\mu C}{r^2} \cos \vartheta \\ J\ddot{\vartheta} &= -\frac{\mu C}{r} \sin \vartheta + \frac{\beta^2 \cos \vartheta}{J \sin^3 \vartheta} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

§ 2. Die Methode der Lösung.

Um eine Lösung der Gleichungen (6) zu ermöglichen, benutzen wir das folgende Näherungsverfahren: Wir integrieren die zweite Gleichung bei konstantem r und erhalten dadurch, für jeden Wert von r , $\cos \vartheta$ als elliptische Funktion von t . Wir bilden dann den zeitlichen Mittelwert von $\cos \vartheta$ über eine Periode und setzen diesen Mittelwert, der eine Funktion von r ist, in die erste Gleichung (6) ein, die dadurch die einfache Form $\ddot{r} = f(r)$ annimmt. Die Berechtigung zur Anwendung dieser Methode sehen wir darin, daß in allen praktisch in Frage kommenden Fällen der Dipol eine große Zahl von Drehungen ausführt in der Zeit, während der sich r relativ nur sehr wenig ändert.

Um dies zu zeigen, genügt es, zu beweisen, daß auch im günstigsten Falle, d. h. wenn \dot{r} am größten ist,

$$\dot{r} \tau \ll r. \quad (7)$$

Dabei ist τ , die Dauer einer vollständigen Umdrehung des Dipols, von der Größenordnung

$$\tau \sim \sqrt{\frac{2\pi^2 J}{L_r}},$$

wo L_r die Rotationsenergie bedeutet. Ferner ist $\dot{r} = \sqrt{\frac{2L_t}{M}}$, wo L_t die radiale Translationsenergie ist. Also schreibt sich (7) in der Form:

$$\sqrt{L_t} \ll \frac{r}{2\pi} \sqrt{\frac{L_r M}{J}}.$$

Nun ist aber J von der Größenordnung Md^2 , wo d eine Länge von der Größenordnung des Moleküldurchmessers ist. Also folgt:

$$\sqrt{L_t} \ll \frac{r}{2\pi d} \sqrt{L_r}. \quad (8)$$

Den größtmöglichen Wert für L_t erhalten wir, wenn der Dipol dauernd parallel dem Felde liegt, also $\cos \vartheta = 1$ ist. Dann ist nach (6)

$$r = -\frac{\mu C}{M \dot{r}^2},$$

woraus

$$L_t = \frac{M}{2} \dot{r}^2 = \mu C \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$$

folgt. Hierbei ist angenommen, daß für $t = 0$: $r = r_0$ und $\dot{r} = 0$ ist. Für r setzen wir den kleinsten Wert ϱ ein und vernachlässigen $1/r_0$ gegen $1/\varrho$; dann ergibt sich

$$L_t = \frac{\mu C}{\varrho}. \quad (9)$$

Für L_r setzen wir den Quantenwert

$$L_r = \frac{n^2 h^2}{8 \pi^2 J}, \quad (10)$$

wobei n eine ganze Zahl und h die Plancksche Konstante bedeutet. Dann ist die Ungleichung (8) sicher erfüllt, wenn:

$$\frac{4 \pi^2}{h} \sqrt{\frac{2 \mu C J}{\varrho}} \leq \frac{r}{d}. \quad (11)$$

r ist von der Größenordnung 0,1 cm; d von der Größenordnung 10^{-8} bis 10^{-6} cm. Setzen wir für μ den größten in der Literatur vorkommenden Wert¹⁾ $\mu = 2,6 \cdot 10^{-18}$ (H_2O), ferner $\varphi_0 - \varphi_1 = 2 \cdot 10^5$ Volt $= 6,7 \cdot 10^2$ (absolute Einheiten), $\varrho = \frac{1}{2}$ mm $= 5 \cdot 10^{-2}$ cm, $R/\varrho = 40$, $h = 6,5 \cdot 10^{-27}$, so folgt aus der Ungleichung (11), daß das Molekulargewicht P der Dipolsubstanz der Bedingung

$$P \leq 10^4 \quad (12)$$

genügen muß, die wohl immer erfüllt ist.

§ 3. Allgemeine Berechnung des Mittelwertes von $\cos \vartheta$.

Aus (4) oder der zweiten Gleichung (6) folgt für konstantes r unter den in § 2 gemachten Voraussetzungen:

$$\frac{J}{2} \dot{\vartheta}^2 + \frac{\beta^2}{2 J \sin^2 \vartheta} - \frac{\mu C}{r} \cos \vartheta = E', \quad (13)$$

wo E' die Energie des Dipols bei konstantem r ist.

¹⁾ M. Jona, Phys. ZS. 20, 14, 1919.

Setzen wir abkürzend:

$$\left. \begin{aligned} z &= -\cos \vartheta \\ \frac{\mu C}{r E'} &= \alpha \\ \frac{\beta^2}{2 J E'} &= p^2 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

so wird

$$\dot{z}^2 = \frac{2 E'}{J} \Phi(z) \quad (15)$$

wobei

$$\Phi(z) = (1 - z^2)(1 - \alpha z) - p^2$$

Sind $z_1 \geq z_2 \geq z_3$ die Wurzeln von $\Phi(z) = 0$, so läßt sich leicht zeigen, daß z_1 stets $\geq +1$ ist, während z_2 und z_3 stets zwischen (-1) und $(+1)$ liegen¹⁾. z schwankt daher während des Verlaufes der Bewegung zwischen z_3 und z_2 periodisch hin und her.

Die Lösung von (15) ist²⁾:

$$\frac{E'}{2 J} (\alpha z - 1/3) = \wp(t + \omega_3). \quad (16)$$

Dabei ist \wp (vgl. die unten zitierte Arbeit von Hettner) die bekannte Weierstrasssche elliptische Funktion mit den beiden Perioden $2\omega_1$ (reell) und $2\omega_3$ (imaginär).

Aus (16) folgt für den zeitlichen Mittelwert von $\cos \vartheta$

$$\overline{\cos \vartheta} = -\bar{z} = -\frac{1}{2\omega_1} \int_0^{2\omega_1} z dt = -\frac{1}{2\omega_1} \left[\frac{2J}{\alpha E'} \int_0^{2\omega_1} \wp(t + \omega_3) dt + \frac{2\omega_1}{3\alpha} \right]$$

oder

$$\overline{\cos \vartheta} = -\frac{1}{3\alpha} + \frac{\pi^2 J}{6\alpha E' \omega_1^3} \left[1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n e^{2n\pi i \omega_3/\omega_1}}{1 - e^{2n\pi i \omega_3/\omega_1}} \right] \quad (17)$$

Die beiden Perioden $2\omega_1$ und $2\omega_3$ werden aus den Wurzeln der Gleichung $\Phi(z) = 0$ bekanntlich in folgender Weise gewonnen:

Führt man die drei Größen e_1, e_2 und e_3 ein durch die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} e_1 = \wp(\omega_1) &= \frac{E'}{2J} (\alpha z_1 - 1/3) \\ e_2 = \wp(\omega_1 + \omega_3) &= \frac{E'}{2J} (\alpha z_2 - 1/3) \\ e_3 = \wp(\omega_3) &= \frac{E'}{2J} (\alpha z_3 - 1/3) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

¹⁾ Ist $E' > 0$ und daher $\alpha > 0$ und $p^2 > 0$, so liegt, falls $p^2 < 1$ ist, z_3 zwischen (-1) und 0 , z_2 zwischen 0 und $(+1)$. Ist aber $p^2 > 1$, so liegen z_2 und z_3 zwischen (-1) und 0 . Ebenso liegen z_2 und z_3 zwischen (-1) und 0 , falls $E', \alpha, p^2 < 0$ sind.

²⁾ G. Hettner, ZS. f. Phys. 2, 349, 1920.

wobei

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0,$$

so sind ω_1 und ω_2 aus den Gleichungen

$$\omega_1 = \frac{K}{\sqrt{e_1 - e_3}}; \quad \frac{\omega_2}{\omega_1} = i \frac{K'}{K} \quad (19)$$

zu bestimmen. Dabei bedeuten K bzw. K' die vollständigen elliptischen Integrale erster Gattung mit den Moduln:

$$k = \sqrt{\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}} \quad \text{bzw.} \quad k' = \sqrt{1 - k^2} = \sqrt{\frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}}. \quad (20)$$

Kennt man also die drei Wurzeln der Gleichung $\Phi(z) = 0$ als Funktionen der beliebigen Konstanten μ , C , J , E' und β , so liefern die Gleichungen (17) bis (20) den zu diesen Werten gehörigen Mittelwert von $\cos \vartheta$ als Funktion von r .

Dabei ist E' überall als Funktion von r anzusehen, und zwar ist E' gleich $E - M/2r^2$, wo E die während der Bewegung konstante Gesamtenergie darstellt.

Benutzt man für $\int_0^{2\omega_1} \wp(t + \omega_3) dt$ nicht die in (17) gegebene Reihenentwicklung, sondern nach H. A. Schwarz¹⁾ die Form:

$$\int_0^{2\omega_1} \wp(t + \omega_3) dt = -2\sqrt{e_1 - e_3} \left\{ \mathcal{E} - \frac{e_1}{e_1 - e_3} K \right\},$$

so folgt nach kurzer Zwischenrechnung:

$$\overline{\cos \vartheta} = (z_1 - z_3) \frac{\mathcal{E}}{K} - z_1. \quad (17a)$$

Dabei ist \mathcal{E} das vollständige elliptische Integral zweiter Gattung.

Der Modul von \mathcal{E} und K läßt sich in der Form

$$k = \sqrt{\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}} \quad (20a)$$

schreiben.

§ 4. Der Spezialfall $|\alpha| \ll 1$.

Im allgemeinen läßt sich $\cos \vartheta$ nicht in geschlossener Form als Funktion von r angeben. Wir behandeln darum zunächst den Fall $|\alpha| \ll 1$. In diesem Falle ist α positiv, da α stets zwischen 0 und ∞ oder zwischen $(-\infty)$ und (-1) liegt (vgl. § 7). Wieweit die Bedingung, daß $|\alpha|$ klein gegen 1 ist, in praktischen Fällen erfüllt ist,

¹⁾ H. A. Schwarz, Formeln und Lehrsätze zum Gebrauch der elliptischen Funktionen, S. 34, Formel (2).

werden wir im nächsten Paragraphen betrachten. Ferner zeigen wir dort auch, daß im Falle $|\alpha| \ll 1$ die Translationsenergie L_t klein ist gegen die Rotationsenergie L_r . Daher sind wir berechtigt, hier E' als unabhängig von r anzusehen und es in erster Näherung mit E zu identifizieren.

Die Wurzeln der Gleichung $\Phi(z) = 0$ sind in diesem Spezialfalle mit genügender Näherung:

$$z_1 = \frac{1}{\alpha} + p^2\alpha; \quad z_2 = q - \frac{p^2}{2}\alpha; \quad z_3 = -q - \frac{p^2\alpha}{2}, \quad (21)$$

wo

$$q = \sqrt{1 - p^2}.$$

Daraus folgt nach (18):

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= \frac{E}{2J} (2/3 + \alpha^2 p^2); \quad e_2 = \frac{E}{2J} \left(\alpha q - \frac{p^2 \alpha^2}{2} - 1/3 \right); \\ e_3 &= \frac{E}{2J} \left(-\alpha q - \frac{p^2 \alpha^2}{2} - 1/3 \right) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

und daraus für k und k' nach (20):

$$k = \sqrt{\frac{2\alpha q}{1 + \alpha q + 3/2 p^2 \alpha^2}} \simeq \sqrt{\frac{2\alpha q}{1 + \alpha q}}; \quad k' \simeq \sqrt{\frac{1 - \alpha q}{1 + \alpha q}}. \quad (23)$$

Ferner:

$$K = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + (1/2)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 k^4 + \dots \right\}.$$

Also nach (19):

$$\frac{1}{\omega_1^2} = \frac{e_1 - e_3}{K^2} \simeq \frac{2E}{\pi^2 J} \left\{ 1 + 3/2 \alpha^2 \left(p^2 - \frac{q^2}{4} \right) \right\}. \quad (24)$$

Weiter ist ¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} e^{\pi i \omega_3 / \omega_1} &= e^{-\pi K / K} = \frac{\xi}{2} + 2 \left(\frac{\xi}{2} \right)^5 + \dots \\ \text{wo} \quad \xi &= \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Aus (25) und (23) folgt:

$$\xi \simeq \frac{\alpha q}{4}$$

und daher

$$e^{\pi i \omega_3 / \omega_1} \simeq 1/8 \alpha q. \quad (26)$$

Also

$$24 \sum_1^\infty \frac{n e^{2n\pi i \omega_3 / \omega_1}}{1 - e^{2n\pi i \omega_3 / \omega_1}} \simeq 3/8 \alpha^3 q^2. \quad (27)$$

¹⁾ H. A. Schwarz, l. c., S. 56, Formel (5) und (6).

Aus (17), (24) und (27) folgt:

$$\overline{\cos \vartheta} = \frac{\alpha}{4} (3p^2 - 1). \quad (28)$$

Dasselbe Ergebnis folgt natürlich auch aus (17 a).

§ 5. Fortsetzung; Gültigkeitsbereich des Falles $|\alpha| \ll 1$.

Indem wir den in (28) gefundenen Mittelwert von $\cos \vartheta$ in die erste der Gleichungen (6) einführen, folgt unter Beachtung von (14):

$$M\ddot{r} = -\frac{\mu^2 C^2 (3p^2 - 1)}{E} \cdot \frac{1}{r^3}. \quad (29)$$

Hieraus ergibt sich, daß nur für:

$$\text{d. h. } \left. \begin{array}{l} p^2 > 1/3 \\ \beta^2 > 2/3 J E \end{array} \right\} \quad (30)$$

der Dipol in das Feld hineingezogen wird, also sich dem Draht nähert. In allen anderen Fällen — natürlich gilt dies nur für $|\alpha| \ll 1$ —, insbesondere in dem Falle $\beta = 0$ findet eine Abstoßung des Dipols von dem Drahte statt. $\beta = 0$ stellt eine Bewegung dar, bei der der Dipol in einer vertikalen oder horizontalen Schnittebene des Zylinders rotiert.

Wir beschränken uns hier auf den wichtigeren Fall der „Anziehung“, da bei diesem sich offenbar größere Ablenkungen des Dipols erzielen lassen, als im Falle der Abstoßung. Der Dipol wird nämlich im Falle der Anziehung in Gebiete immer wachsender Feldstärke hineingezogen.

Aus (29) folgt nach einmaliger Integration:

$$\dot{r} = -\frac{\mu C \sqrt{3p^2 - 1}}{\sqrt{EM}} \cdot \sqrt{\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2}} \quad (31)$$

und nach nochmaliger Integration:

$$t = \frac{r_0}{\mu C} \sqrt{\frac{EM}{3p^2 - 1}} \cdot \sqrt{r_0^2 - r^2}. \quad (32)$$

Dies ist das Zeitintervall, während dessen sich der Dipol, von der Entfernung r_0 an, bis auf die Entfernung r dem Drahte nähert.

Ist s die Strecke, die der Dipol parallel der Drahtachse in der Zeit t durchflogen hat, und v seine Geschwindigkeit in dieser Richtung, so folgt aus (32) für die Ablenkung, die er auf dem Wege s erleidet:

$$|\Delta r| = r_0 - r = r_0 - \sqrt{r_0^2 - \frac{s^2 \mu^2 C^2 (3p^2 - 1)}{v^2 r_0^2 EM}}. \quad (33)$$

Die beiden Integrationskonstanten der Bewegungsgleichungen, β und E , sind nach der Quantentheorie durch folgende Ausdrücke gegeben:

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \frac{n_2 h}{2 \pi} \\ E &= \frac{(n_1 + n_2)^2 h^2}{8 \pi^2 J} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

also

$$p^2 = \left(\frac{n_2}{n_1 + n_2} \right)^2,$$

wo h die Plancksche Konstante bedeutet und die Quantenzahlen n_1 und n_2 durch die Quantenbedingungen

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} p_\varphi d\varphi &= 2 \pi \beta = n_2 h \\ \oint p_\vartheta d\vartheta &= \oint J \dot{\vartheta} d\vartheta = n_1 h \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

gegeben sind. In dem Ausdrücke für die Energie sind die Glieder, die vom Felde herrühren, da sie von der Größenordnung α^2 sind¹⁾, fortgelassen.

Die Geschwindigkeit v des Dipols längs der Achse kann bei einer bestimmten Temperatur T der den Molekularstrahl erzeugenden Substanz von vornherein jeden Wert zwischen 0 und ∞ annehmen. Wir wollen im folgenden den wahrscheinlichsten Wert benutzen. Nimmt man mit O. Stern²⁾ an, daß die Verteilung der Geschwindigkeiten im Molekularstrahl durch den Ausdruck: $\text{const } e^{-\frac{Mv^2}{2kT}} v^3 dv$ gegeben ist, so ergibt sich für den wahrscheinlichsten Wert von v :

$$v_w = \sqrt{\frac{3kT}{M}}. \quad (36)$$

Aus (32), (33), (34), (36) folgt:

$$s = \frac{r_0 h}{2 \pi \mu C} \sqrt{\frac{3kT}{2J}} \frac{n_1 + n_2}{\sqrt{3 \left(\frac{n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 - 1}} \sqrt{r_0^2 - r^2} \quad (37)$$

oder

$$|Ar| = r_0 - \sqrt{r_0^2 - \frac{8 \pi^2 J s^2 \mu^2 C^2}{3 k T r_0^2 h^2} \cdot \frac{3 \left(\frac{n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 - 1}{(n_1 + n_2)^2}}. \quad (38)$$

¹⁾ G. Hettner, l. c.

²⁾ O. Stern, ZS. f. Phys. 3, 417, 1920.

Aus (30) und (34) folgt für die Bedingung der „Anziehung“:

$$\text{oder } \left. \begin{array}{l} n_2 (\sqrt{3} - 1) > n_1 \\ 0,732 n_2 > n_1 \end{array} \right\} \quad (39)$$

Die Voraussetzung der Rechnungen dieses und des vorhergehenden Paragraphen war die, daß $|\alpha| \ll 1$ ist, d. h. daß

$$\text{wo } \left. \begin{array}{l} \alpha \ll \varepsilon \\ \varepsilon \ll 1 \end{array} \right\} \quad (40)$$

Nun ist nach (14) und (34):

$$\alpha = \frac{8 \pi^2 \mu C J}{r (n_1 + n_2)^2 h^2}. \quad (41)$$

Also ist (40) sicher erfüllt, wenn

$$n (= n_1 + n_2) \geq \sqrt{\frac{8 \pi^2 \mu C J}{\varepsilon \varrho h^2}}. \quad (42)$$

Setzt man

$$\sqrt{\frac{8 \pi^2 \mu C J}{\varepsilon \varrho h^2}} = Z - \xi, \quad (43)$$

wobei Z eine ganze Zahl, ξ ein echter Bruch ist, so muß also

$$n \geq Z \quad (44)$$

sein. Schreiben wir die Bedingung $|\alpha| \ll 1$ in der Form

$$\frac{8 \pi^2 \mu C J}{\varrho n^2 h^2} \ll 1,$$

so zeigt der Vergleich mit (9) und (10), daß hier in der Tat

$$\frac{L_t}{L_r} \ll 1,$$

woraus die Berechtigung folgt, E' in erster Näherung $= E$ zu setzen.

§ 6. Die Verteilung der Quantenzustände des Dipols.

Um aus den entwickelten Formeln praktische Schlüsse ziehen zu können, muß man feststellen, mit welcher Häufigkeit die verschiedenen durch n_1 und n_2 charakterisierten Quantenzustände vorkommen.

Da im Molekularstrahl keine Zusammenstöße der Dipole untereinander stattfinden, und da die Quantenzahlen adiabatische Invarianten sind, so wird die Verteilung der Quantenzustände im Felde dieselbe sein, wie die Verteilung der Quantenrotationen außerhalb des Feldes. Macht man die Annahme, daß sich bei der Verdampfung die

normale kanonische Verteilung einstellt, so ist die Zahl der Dipole, deren Quantensumme $n_1 + n_2 = n$ beträgt¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} N_n &= N \frac{n e^{-\sigma n^2}}{\sum_0^\infty n e^{-\sigma n^2}} \\ \sigma &= \frac{h^2}{8\pi^2 J k T} \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

wo

und N die Gesamtzahl aller auftreffenden Dipole bedeutet. Die Zahl der Dipole, die der Bedingung (44) genügt, ist also

$$N_{n \geq z} = N \frac{\sum_0^\infty n e^{-n^2 \sigma}}{\sum_0^\infty n e^{-n^2 \sigma}}$$

oder, da in allen hier in Frage kommenden Fällen $\sigma \ll 1$ ist,

$$N_{n \geq z} = N \frac{\int_0^\infty n e^{-n^2 \sigma} dn}{\int_0^\infty n e^{-n^2 \sigma} dn} = N e^{-z^2 \sigma}. \quad (46)$$

Wählt man der Vereinfachung halber in (43) die Größe ε so, daß $\zeta = 0$ wird, so folgt

$$N_{n \geq z} = N e^{-\frac{\mu C}{\varepsilon \varrho k T}}. \quad (47)$$

Nun ist, wie ein Vergleich mit den Rechnungen am Schluß des § 2 zeigt, die Größe $\frac{\mu C}{\varrho k T}$ für Temperaturen $T \geq 300^\circ$ abs. klein gegen 1, also etwa

$$\left. \begin{aligned} \frac{\mu C}{\varrho k T} &\ll \delta \\ \text{wo } \delta &\ll 1 \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Daher ist der Exponent der e -Funktion in (47) höchstens $= \delta/\varepsilon$. Macht man die naheliegende Annahme $\delta \sim \varepsilon$, so ist $N_{n \geq z}$ mindestens gleich $N/3$ (rund).

Wir sehen daraus, daß wir mit der Bedingung (44) einen beträchtlichen Teil aller Moleküle umfassen. Es bleibt dagegen noch näher zu erörtern, inwieweit die so umfaßten Moleküle noch merkliche Ablenkungen aufweisen. Aus (38) erkennt man, daß bei gegebenen

¹⁾ F. Reiche, Ann. d. Phys. 58, 681, 1919. H. Kallmann, Diss. Berlin 1920. N. Bohr, Abhandlungen über Atombau, S. 147. Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn, 1921.

Werten von r_0, J, s, μ, C, T die Ablenkung $|\Delta r|$ um so größere Beträge annimmt, je größer der Ausdruck

$$\frac{3 \left(\frac{n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 - 1}{(n_1 + n_2)^2} = \frac{3p^2 - 1}{n^2}$$

ist. Im folgenden geben wir eine Tabelle an, in der die verschiedenen möglichen Werte dieses Ausdrucks eingetragen sind, und zwar nur die, die der Nebenbedingung (39) genügen („Anziehung“).

n_2	n_1	$n = n_1 + n_2$	$\frac{3p^2 - 1}{n^2}$
1	0	1	2
2	0, 1	2, 3	$\frac{1}{2}, \frac{1}{27}$
3	0, 1, 2	3, 4, 5	$\frac{2}{9}, \frac{11}{256}, \frac{2}{625}$
4	0, 1, 2	4, 5, 6	$\frac{1}{8}, \frac{23}{625}, \frac{1}{108}$
5	0, 1, 2, 3	5, 6, 7, 8	$\frac{2}{25}, \frac{13}{432}, \frac{26}{2401}, \frac{11}{4096}$
6	0, 1, 2, 3, 4	6, 7, 8, 9, 10	$\frac{1}{18} \dots$
7	0, 1, 2, 3, 4, 5	7, 8, 9, 10, 11, 12	$\frac{2}{49} \dots$
8	0, 1, 2, 3, 4, 5	8, 9, 10, 11, 12, 13	$\frac{1}{32} \dots$

Die Tabelle zeigt, daß $\frac{3p^2 - 1}{n^2}$ die größten Werte für den Fall $n_1 = 0$ annimmt. Erst für $n_1 = 0; n_2 = 8$ unterschreitet dieser Wert den höchsten Wert ($\frac{1}{27}$) der Fälle $n_1 \neq 0$.

$n_1 = 0$ bedeutet nach (35) $\vartheta = \text{const} = \vartheta_0$, d. h. es ist dies der Fall, bei dem der Dipol eine reine Präzession um die Feldrichtung mit dem Öffnungswinkel ϑ_0 beschreibt. Die Tabelle lehrt also, daß diese Fälle der reinen Präzession eine die übrigen Fälle überragende Anziehung aufweisen. Wir wollen daher im folgenden den Fall der reinen Präzession gesondert behandeln, um so mehr, als wir dabei imstande sind, uns von der einschränkenden Bedingung $|\alpha| \ll 1$ freizumachen.

§ 7. Die reine Präzessionsbewegung des Dipols.

Der Fall der reinen Präzession ist dadurch charakterisiert, daß die beiden Wurzeln z_2 und z_3 der Gleichung $\Phi(z) = 0$ [siehe (15)]

zusammenfallen. Bezeichnen wir diese Doppelwurzel mit z_0 , so muß z_0 den beiden Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \Phi(z_0) &= 0 \\ \Phi'(z_0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

genügen. Aus der zweiten Gleichung folgt:

$$z_0 = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 3\alpha^2}}{3\alpha} \quad (50)$$

Setzen wir den aus $\Phi'(z_0) = 0$ folgenden Wert von α :

$$\alpha = \frac{2z_0}{3z_0^2 - 1}$$

in die erste Gleichung (49) ein, so folgt nach kurzer Rechnung

$$\left. \begin{aligned} (1 - z_0^2)^2 + 2\lambda z_0 &= 0 \\ \text{wo } \lambda &= \frac{p^2}{\alpha} = \frac{\beta^2 r}{2J\mu C} = \frac{n_2^2 h^2 r}{8\pi^2 J\mu C} \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Schreibt man die Energiegleichung (13) hier in der Form:

$$E' = \frac{\beta^2}{2J(1 - z_0^2)(1 - \alpha z_0)},$$

so ergibt eine einfache Diskussion, unter Benutzung von (50), das folgende Resultat: Ist E' und daher $\alpha > 0$, so ist $z_0 = \frac{1 - \sqrt{1 + 3\alpha^2}}{3\alpha}$,

und zwar nimmt z_0 alle Werte zwischen 0 und $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ an, wenn α von 0 bis $(+\infty)$ läuft. An der Stelle $E' = 0$ springt α von $(+\infty)$ nach $(-\infty)$. Ist E' und $\alpha < 0$, so gilt für z_0 der Ausdruck:

$$z_0 = \frac{1 + \sqrt{1 + 3\alpha^2}}{3\alpha}, \text{ und zwar nimmt alle } z_0 \text{ Werte von } \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

bis (-1) an, wenn α von $(-\infty)$ bis (-1) läuft.

In jedem Fall ist $z_0 = -\cos \vartheta_0$ durch (51) als Funktion von λ , d. h. von r , gegeben. Physikalisch von Bedeutung ist natürlich nur diejenige Lösung von (51), die zwischen 0 und (-1) liegt. Diese wird dann in die erste Gleichung (6) eingesetzt.

1) Setzt man den Wert (50) für z_0 in die erste Gleichung (49) ein, so folgt nach einiger Rechnung die Gleichung

$$\left(\frac{27}{4}\lambda^2 - 1\right)y^4 - 9\lambda y^3 + 2y^2 + \lambda y - 1 = 0$$

wo $y = \frac{\mu C}{r E'}$ ist. Diese Gleichung bestimmt für den Fall $n_1 = 0$ die Energie E' als Funktion der Quantenzahl n_2 für jeden Wert von r .

Es läßt sich zeigen, daß, man die Lösung der Gleichung (51) in erster Näherung durch

$$\left. \begin{aligned} z_0 &= -\left(1 - \sqrt{\frac{\lambda}{2}}\right) && \text{für } 0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2} \\ z_0 &= -\frac{1}{2}(\sqrt{\lambda^2 + 2} - \lambda) && \text{für } \lambda \geq \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

darstellen kann.

Die Abweichungen dieser Annäherungen von dem wahren Verlauf der Funktion $z_0(\lambda)$ zeigt Fig. 3, in der der wahre Verlauf durch die ausgezogene Kurve, die Annäherungen durch Kreuze dargestellt sind.

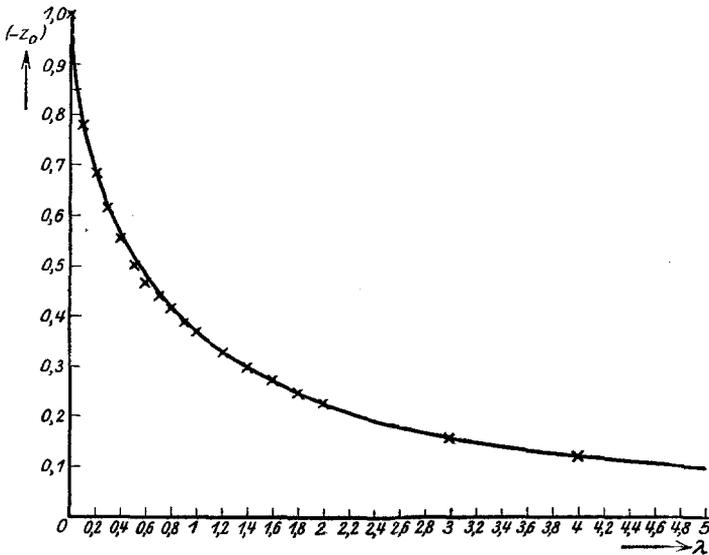


Fig. 3.

§ 8. Fortsetzung; Näherungsverfahren.

Wir betrachten zuerst das Intervall $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$. Setzt man den entsprechenden Wert aus (52) in (6) ein, so folgt:

$$\ddot{r} = -\frac{\mu C}{M} \left(\frac{1}{r^2} - \sqrt{\frac{\lambda_0}{2 r_0}} \cdot r^{-\frac{3}{2}} \right). \quad (53)$$

Dabei ist

$$\lambda_0 = \frac{\lambda}{r} r_0 = \frac{n_2^2 h^2 r_0}{8 \pi^2 J \mu C}. \quad (54)$$

Die einmalige Integration dieser Gleichung liefert:

$$\dot{r} = -\sqrt{\frac{2 \mu C}{M}} \sqrt{\frac{1}{r} - \sqrt{\frac{2 \lambda_0}{r_0}} \cdot r^{-\frac{1}{2}} - \frac{1 - \sqrt{2 \lambda_0}}{r_0}}. \quad (55)$$

Hieraus nach nochmaliger Integration, wenn man wieder

$$t = \frac{s}{v_w} = s \sqrt{\frac{M}{3kT}}$$

setzt:

$$s = -\sqrt{\frac{3kT}{2\mu C}} r_0^3 \frac{1}{2(1-\sqrt{2\lambda_0})} \left\{ \frac{2-2\sqrt{2\lambda_0}+3\lambda_0}{(1-\sqrt{2\lambda_0})^3} \arccos \left(\frac{\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{2(1-\sqrt{2\lambda_0})} + \sqrt{\lambda_0}}{\sqrt{2}-\sqrt{\lambda_0}} \right) \right. \\ \left. - \left[3 \frac{\sqrt{2\lambda_0}}{1-\sqrt{2\lambda_0}} - 2 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{1}{2}} \right] \sqrt{1-\sqrt{2\lambda_0} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{1}{2}} - (1-\sqrt{2\lambda_0}) \frac{r}{r_0}} \right\} \quad (56)$$

Diese Gleichung gibt an, welche Strecke s der Dipol bei gegebenen J, μ, C, r_0, T, n_2 durch das Feld (parallel der Achse) fliegen muß, damit er eine Ablenkung $|\mathcal{A}r| = r_0 - r$ erfährt. Speziell stellen wir die Frage: wie groß muß s werden, damit der Dipol bis zum Draht gelangt. Kann man dabei $\frac{Q}{r_0} \ll 1$ setzen, so erhält man:

$$s_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3kT r_0^3}{2\mu C}} \cdot F(\lambda_0) \quad \left. \vphantom{s_0} \right\} \quad (57)$$

wo

$$F(\lambda_0) = \frac{1}{(1-\sqrt{2\lambda_0})} \left\{ \frac{2-2\sqrt{2\lambda_0}+3\lambda_0}{(1-\sqrt{2\lambda_0})^3} \arccos \left(\frac{\sqrt{\lambda_0}}{\sqrt{2}-\sqrt{\lambda_0}} \right) - 3 \frac{\sqrt{2\lambda_0}}{1-\sqrt{2\lambda_0}} \right\}$$

In Figur 4 ist $F(\lambda_0)$ in dem in Frage kommenden Gebiet zwischen $\lambda_0 = 0$ und $\lambda_0 = \frac{1}{2}$ aufgezeichnet.

In dem Intervall $\lambda \geq \frac{1}{2}$ benutzen wir die zweite Näherungsformel in (52). Dann wird

$$\ddot{r} = -\frac{\mu C}{2M} \left[\frac{\sqrt{\lambda_0^2 \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 + 2}}{r^2} - \frac{\lambda_0}{r_0 r} \right]$$

woraus durch einmalige Integration folgt:

$$\dot{r}^2 = \frac{\mu C \lambda_0}{M r_0} \left\{ \sqrt{1 + \frac{2}{\lambda_0^2} \left(\frac{r_0}{r}\right)^2} - \lg \left[\frac{1 + \sqrt{1 + \frac{2}{\lambda_0^2} \left(\frac{r_0}{r}\right)^2}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2}{\lambda_0^2}}} \right] - \sqrt{1 + \frac{2}{\lambda_0^2}} \right\} \quad (58)$$

Die zweite Integration gelingt nicht in geschlossener Form. Sie müßte graphisch oder durch Näherungsverfahren ausgeführt werden.

Im Falle großer Werte von λ folgt aus (52)

$$z_0 = -\frac{1}{2\lambda}$$

Wie aus (41) erkennbar, deckt sich also der Fall großer λ mit dem schon behandelten Fall $|\alpha| \ll 1$. Es wird nämlich hier, für $n_1 = 0$, $\alpha = \frac{1}{\lambda}$.

§ 9. Allgemeine Behandlung des Präzessionsfalles.

In praktischen Fällen kann λ während der Bewegung des Dipols ganz in dem Gebiet $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$ liegen (wenn nämlich $\lambda_0 \leq \frac{1}{2}$ ist), dann läßt sich Formel (56) oder (57) verwenden. Oder es kann der Fall eintreten, daß auch der kleinste vorkommende Wert von λ , also $\lambda_{\min} = \frac{n_2 \hbar^2 \rho}{8 \pi^2 J \mu C}$, noch groß ist (etwa > 5); dann läßt sich Formel (37) verwenden, in der, für den hier vorliegenden Präzessionsfall, $n_1 = 0$ zu setzen ist. Es kann schließlich λ ganz in dem Mittelgebiet liegen; dann ist die weitere Rechnung an (58) anzuschließen.

Es kann aber andererseits der Fall eintreten, daß λ während der Bewegung von dem einen der drei Gebiete in das benachbarte über-

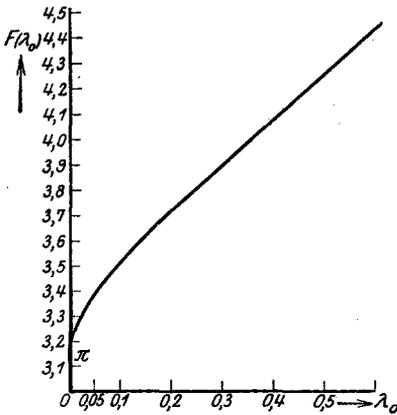


Fig. 4.

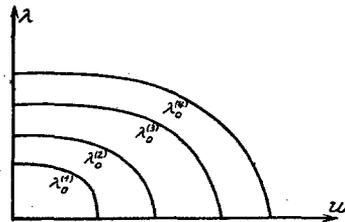


Fig. 5.

tritt. Dann kann man so vorgehen, daß man die behandelten Näherungen aneinanderschließt. Dabei ist zu berücksichtigen, daß der Dipol in das Gebiet der kleineren λ mit einer Anfangsgeschwindigkeit eintritt und daher die obigen Formeln entsprechend zu modifizieren sind. Für diesen letzten Fall läßt sich zur Auswertung experimenteller Befunde vielleicht besser folgendes graphische Verfahren verwenden. Wir knüpfen dazu an die erste Gleichung (6) an, die wir folgendermaßen schreiben:

$$M \ddot{r} = \frac{\mu C}{r^2} s_0(\lambda). \quad (59)$$

Dabei ist z_0 als Funktion von λ (also auch von r) durch die Gleichung (51) bzw. durch Fig. 3 gegeben. Setzt man

$$\frac{z_0(\lambda)}{\lambda^2} = f(\lambda), \quad (60)$$

ersetzt man t in der Differentialgleichung (59) wieder durch $s \sqrt{\frac{M}{3kT}}$, so geht (59) über in

$$\frac{d^2 \lambda}{du^2} = f(\lambda), \quad (61)$$

wo

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{s}{S} \\ S &= \mu C \sqrt{3kT} \left(\frac{8\pi^2 J}{n_2^2 h} \right)^{\frac{2}{3}} \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

Da $z_0(\lambda)$ und daher auch $f(\lambda)$ graphisch (oder tabellarisch) bekannt ist, so läßt sich (61) graphisch integrieren, mit den Anfangsbedingungen:

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \lambda_0 \\ \frac{d\lambda}{du} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ für } u = 0 \quad (63)$$

Man erhält dadurch, für jeden Wert von λ_0 , λ als Funktion von u , d. h.

$$\lambda = \psi(u, \lambda_0), \quad (64)$$

wo also $\psi(u, \lambda_0)$ durch eine Kurvenschar mit λ_0 als Parameter gegeben ist, die in Fig. 5 schematisch dargestellt sei¹⁾.

Nun ist

$$S \cdot \lambda_0 = r_0 \sqrt{\frac{24\pi^2 J k T}{n_2^2 h^2}} = b. \quad (65)$$

Beschränkt man sich auf den Fall der größten Ablenkung ($n_2 = 1$) so ist b eine bekannte Konstante, falls r_0 , J und T gegeben sind. Will man nun aus einer, zu einem bestimmten s gehörigen, maximalen Ablenkung den Wert μ des Dipolmomentes berechnen, so verfährt man wie folgt: man wählt willkürlich einen beliebigen Wert von λ_0 , den wir $\lambda_0^{(1)}$ nennen. Zu diesem gehört nach (65) ein bestimmter Wert $S^{(1)}$. Aus (62) folgt dann für das experimentell gegebene s ein Wert $u^{(1)} = \frac{s}{S^{(1)}}$. Aus der Kurvenschar (Fig. 5) wählt man dann die Kurve mit dem Parameter $\lambda_0^{(1)}$ heraus und bestimmt auf ihr den

¹⁾ Die genaue rechnerische Bestimmung dieser Kurvenschar behalten wir einer späteren Veröffentlichung vor.

zu $u^{(1)}$ gehörigen Wert $\lambda^{(1)}$. Ferner berechnet man mit Hilfe der Beziehung

$$r = \frac{r_0}{\lambda_0} \cdot \lambda, \quad (66)$$

indem man $\lambda_0 = \lambda_0^{(1)}$ und $\lambda = \lambda^{(1)}$ setzt, den zu $\lambda^{(1)}$ gehörigen Wert $r^{(1)}$. Dadurch hat man, für $\lambda_0 = \lambda_0^{(1)}$, den zu s gehörigen Wert $r^{(1)}$ erhalten. Führt man diese Operation für eine Reihe von Werten von λ_0 durch, $[\lambda_0^{(1)}, \lambda_0^{(2)}, \lambda_0^{(3)}, \dots, \lambda_0^{(j)}]$ so erhält man für jeden Wert von λ_0 den zu s gehörigen Wert von r , also eine Reihe von Werten $r^{(1)}, r^{(2)}, r^{(3)}, \dots, r^{(j)}$. Stimmt $r^{(j)}$ mit dem experimentell gegebenen Wert überein, so ist $\lambda_0^{(j)}$ der „richtige“ Wert von λ_0 . Aus diesem berechnet sich dann mit Hilfe von (54) der gesuchte Wert von μ .

§ 10. Anwendung der erhaltenen Resultate.

Wir wollen im folgenden die abgeleiteten Formeln dazu benutzen, um in einzelnen praktisch möglichen Fällen die Größe der Ablenkung der Dipole zu berechnen und den Prozentsatz der in bestimmter Weise abgelenkten Dipole zu schätzen.

1. Beispiel.

$\varrho = 0,1$ cm; $R = 1$ cm; $\varphi_0 - \varphi_1 = 2 \cdot 10^5$ Volt = 667 (elektrost. Einh.)
also

$$C = 289,67; J = 2,6 \cdot 10^{-40}; \mu = 2,6 \cdot 10^{-18}; T = 300^\circ.$$

Dann ist nach (41) α sicher kleiner als $1/5$, wenn $n \geq 5$ ist. Aus den am Schlusse des § 6 angeführten Gründen beschränken wir uns auf die Fälle reiner Präzession ($n_1 = 0$). Wir können hier für alle $n \geq 5$ Formel (37) verwenden. Die stärkste der durch diese Formel dargestellten Ablenkung tritt für $n = 5$ ein. Für die Länge der Wegstrecke s , die die Dipole parallel der Drahtachse zurücklegen müssen, um bis zur Drahtoberfläche ($r = \varrho$) zu gelangen, ergibt sich:

$$s = 75,27 \cdot r_0 \sqrt{r_0^2 - 0,01} \text{ (cm)}.$$

Für $r = 0,5$ cm folgt: $s = 18,8$ cm, d. h. die Dipole mit der Quantenzahl $n_2 = 5$ werden auf der Strecke 18,8 cm um 4 mm abgelenkt.

Setzt man andererseits $r_0 = 0,2$ cm, so folgt: $s = 2,61$ cm, d. h. die Dipole ($n_2 = 5$) werden auf der Strecke 2,61 cm um 1 mm abgelenkt.

Dieses ist aber natürlich nicht die stärkste Ablenkung; diese tritt vielmehr bei $n_2 = 1$ auf. Für den zuletzt betrachteten Wert von r_0 ($= 0,2$ cm) ergibt sich aus (57), daß bereits nach weniger als 1,7 cm Fluglänge der Dipol am Draht eintrifft. Beschränkt man sich nur auf die Präzessionsfälle ($n_1 = 0$), so folgt aus (45) und (46) für die Zahl derjenigen Dipole, die die Quantenzahl $n_2 = 1, 2, 3, 4, 5$ besitzen,

die also eine Ablenkung von einem Millimeter auf eine Strecke von höchstens 2,61 cm besitzen:

$$\frac{N_{0,1}}{N} = 0,097; \quad \frac{N_{0,2}}{N} = 0,083; \quad \frac{N_{0,3}}{N} = 0,064; \quad \frac{N_{0,4}}{N} = 0,045;$$

$$\frac{N_{0,5}}{N} = 0,029.$$

Um die oben erhaltenen Ablenkungen (für den Fall $n_2 = 5$, $r_0 = 0,2$ cm) noch deutlicher sichtbar zu machen, könnte man den Dipol, nachdem er die Ablenkung von 1 mm im Felde erlangt hat, aus dem Felde austreten und noch eine längere Strecke feldfrei fliegen lassen. Bezeichnet γ den Winkel, den die Austrittsrichtung des Dipols aus dem Felde mit der Drahrichtung bildet, so ist

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{|v|}{v}. \quad (67)$$

Setzt man für r den Wert aus (31), für v wieder $\sqrt{\frac{3kT}{M}}$, so folgt unter Beachtung von (34):

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{4\pi\mu C}{n_2 h} \sqrt{\frac{J}{3kT}} \cdot \sqrt{\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2}}. \quad (68)$$

Setzt man $r = \varrho = 0,1$ cm, so folgt für den obigen Fall: $\gamma = 6^\circ 34'$. Fängt man daher den Dipol 10 cm hinter dem Ende des Feldes auf, so beobachtet man eine Ablenkung von 12,5 mm. Man erkennt hieraus, daß man unter Benutzung dieser letzten Methode, bei einer Anfangsentfernung von 0,2 cm auf einer Strecke von 12,61 cm bereits eine Ablenkung von 12,5 mm erhält, während bei einer Anfangsentfernung von 0,5 cm die Ablenkung selbst auf einer Strecke von 18,8 cm nur 4 mm beträgt. Es ist also hier vorteilhaft, r_0 klein zu wählen und den Dipol noch eine möglichst lange Strecke feldfrei fliegen zu lassen.

2. Beispiel.

Um einen Fall zu diskutieren, in dem die stärksten Ablenkungen sich mit Hilfe der Formel (56) berechnen lassen, wählen wir $r_0 = 0,2$ cm; $\mu = 10^{-18}$; $J = 7,49 \cdot 10^{-39}$, während wir für die übrigen Größen die alten Werte beibehalten. Dann wird nach (54):

$$\lambda_0 = 0,05; \quad \lambda_0 = 0,2; \quad \lambda_0 = 0,45.$$

$$n_2 = 1 \qquad n_2 = 2 \qquad n_2 = 3$$

Die drei ersten Präzessionsfälle liegen hier also im Gültigkeitsbereich ($\lambda_0 \leq 1/2$) der Formel (56). Aus dieser Formel berechnet sich für $r = \varrho = 0,1$ cm:

$$s_1 = 1,82 \text{ cm}; \quad s_2 = 2,00 \text{ cm}; \quad s_3 = 2,097 \text{ cm}.$$

Die Dipole mit den Quantenzahlen 1, 2, 3 erleiden also eine Ablenkung von einem Millimeter auf den Strecken 1,82 cm; 2,00 cm; 2,097 cm. Die Winkel γ , die die Flugrichtung der Dipole, beim Austritt aus dem Feld, mit der Drahtachse bilden, berechnen sich hier, nach (55) aus der Formel:

$$\operatorname{tg} \gamma = \sqrt{\frac{2 \mu C}{3 k T}} \sqrt{\frac{1}{r} \cdot \sqrt{\frac{2 \lambda_0}{r_0 \cdot r}} \cdot \frac{1 - \sqrt{2 \lambda_0}}{r_0}}. \quad (69)$$

Für die drei soeben betrachteten Fälle folgt daraus:

$$\gamma_1 = 8^\circ 8'; \quad \gamma_2 = 7^\circ 30'; \quad \gamma_3 = 6^\circ 49'.$$

Dabei sind die hier gegebenen Werte diejenigen Austrittswinkel, die die Dipole jeweils bei Berührung der Drahtoberfläche besitzen.

Es ist von praktischem Interesse zu berechnen, in welchen Entfernungen r und unter welchen Winkeln gegen die Drahtachse die Dipole mit aufeinanderfolgenden Quantenzahlen eine bestimmte Ebene $s = \text{const}$ durchstoßen. Im Anschluß an den oben behandelten Fall wählen wir als Durchstoßebene die Ebene $s = s_1 = 1,82$ cm. Dann ist also für $n_2 = 1: r = 0,1$ cm; $\gamma_1 = 8^\circ 8'$. Aus (56) berechnet sich dann für $n_2 = 2: r = 0,1232$ cm und der dazu gehörige Winkel $\gamma'_2 = 5^\circ 52'$. Fängt man beide Dipole auf einer Platte 10 cm hinter dem Feldende auf, so hat der erste Dipol die Ablenkung 1,53 cm, der zweite 1,11 cm erlitten.

Wir haben hier überall angenommen, daß die Moleküle mit der wahrscheinlichsten Geschwindigkeit (36) durch das Feld fliegen. In Wirklichkeit haben die Dipole alle möglichen Geschwindigkeiten, die nach einer modifizierten Maxwell'schen Funktion ($v^3 e^{-Bv^2} dv$) verteilt sind. Will man die Zahl der Teilchen, die auf eine bestimmte Stelle des Auffangeschirmes auftreffen, also die „Intensität des Ablenkungsflecks“ bestimmen, so muß man die zu jeder Geschwindigkeit v gehörige Ablenkung für alle Quantenzahlen bei konstantem s ermitteln. Da jedoch — mit Ausnahme des Falles $|\alpha| \ll 1$ — die Ablenkung in komplizierter Weise von v abhängt, so ist ohne nähere Rechnung nicht zu übersehen, ob die oben berechneten Ablenkungsflecke für benachbarte Quantenzahlen als deutlich getrennte Maxima wahrzunehmen sind. Diese Untersuchung behalten wir einer späteren Veröffentlichung vor.

Der Vollständigkeit halber sei noch bemerkt, daß es auf Grund der Formel (56) möglich ist, aus zwei verschiedenen Messungen (etwa durch Variation des Feldes oder der Anfangsentfernung r_0) sowohl μ wie J zu bestimmen.

§ 11. Dipole mit induziertem Moment.

Zum Schluß behandeln wir noch den in der Einleitung erwähnten Fall, daß die Moleküle keine festen Momente besitzen, sondern das Moment erst durch das äußere Feld in ihnen hervorgerufen wird. In diesem Falle ist das Moment μ dem Felde \mathcal{E} proportional, also:

$$\mu = g \cdot \mathcal{E} = \frac{gC}{r}, \quad (70)$$

wo g , die Polarisierbarkeit, eine für die betreffende Substanz charakteristische Konstante ist. Hierbei darf man angenähert mit der Annahme rechnen, daß die Richtung des Moments dauernd mit der Feldrichtung übereinstimmt, also $\cos \vartheta = 1$ setzen. Aus (6) und (29) ergibt sich dann, daß die Rechnungen des § 5 hier Anwendung finden, wenn man dort den Ausdruck $\frac{\mu^2(3p^2-1)}{E}$ durch g ersetzt. Also folgt für s nach (37):

$$s = \frac{r_0}{C} \sqrt{\frac{3kT}{g}(r_0^2 - r^2)} \quad (71)$$

und entsprechend für den Austrittswinkel γ :

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{r_0^2 - r^2}{rs} \quad (72)$$

Nach Debye läßt sich g aus der Molekularrefraktion berechnen. Der größte aus seinen Angaben folgende Wert ist: $g = 10^{-28}$. Benutzt man ferner die Daten: $r_0 = 0,2$ cm; $r = \varrho = 0,1$ cm; $C = 289,67$; $T = 300^\circ$, so ergibt sich eine Ablenkung von 1 mm auf der Strecke $s = 13,3$ cm. Der entsprechende Wert von γ ist $1^\circ 17'$. Läßt man also den Dipol noch 10 cm hinter dem Felde laufen, so erhält man eine Gesamtablenkung von 3,3 mm.

Würde man für $r = \varrho$ den Wert 0,05 cm wählen, so erhielte man eine Ablenkung von 1,5 mm auf 14,84 cm Feldweg. Da γ hier $2^\circ 53'$ ist, so läßt sich in 10 cm Entfernung hinter dem Feld eine Gesamtablenkung von 6,6 mm erzielen.

Berlin-Dahlem, 26. Juli 1921.

Kaiser Wilhelm-Institut für physikalische Chemie und Elektrochemie.