Sur un théorème relatif aux surfaces pour lesquelles les coordonnées d'un point quelconque s'expriment par des fonctions abéliennes de deux paramètres.

Par

Emile Picard à Paris.

(1) On sait que Clebsch a étendu aux surfaces algébriques la notion de genre si importante dans la théorie des courbes planes (Comptes rendus, décembre 1868) et cette étude a fait depuis l'objet des travaux de plusieurs géomètres, parmi lesquels je citerai M. Nöther (Mathematische Annalen). Je considérerai seulement ici des surfaces n'ayant d'autre singularité que des courbes doubles et je supposerai de plus qu'en tous les points de la courbe double, les deux plans tangents à la surface sont distincts. Je rappelle que le genre d'une surface d'ordre n est, d'après Clebsch, le nombre des coëfficients restant arbitraires dans une surface d'ordre $n-4$, passant par la courbe double.

Considérons une surface n'ayant d'autre singularité que celles qui ont été indiquées et telle que les coordonnées d'un quelconque de ses points puissent s'exprimer par des fonctions abéliennes de deux paramètres α et β. L'objet de cette étude est de montrer *que le genre d'une telle surface est au plus égal à l'unité**): c'est, on le voit, une proposition toute semblable à un théorème bien connu dans la théorie des courbes planes. Nous suivrons la même marche dans la démonstration, aussi m'arrêterai-je tout d'abord sur la proposition relative aux courbes planes et qui peut s'énoncer ainsi: si les coordonnées d'un point quelconque d'une courbe plane irréductible de degré m

$$F(x, y) = 0 \tag{I}$$

peuvent s'exprimer par des fonctions doublement périodiques d'un paramètre z, le genre de la courbe ne peut être supérieur à l'unité.

---

*) Cf. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 1881, I, p. 1495 ff.

Nous supposerons, comme on le fait souvent dans la théorie des fonctions abéliennes, que l'équation (1) contienne un terme de degré m par rapport à y, et que le rapport $\frac{y}{x}$ ait m valeurs finies et distinctes pour x infini.

Soit $\int \frac{f(x, y)\,dx}{F_y'(x, y)}$ une intégrale abélienne de première espèce relative à l'équation (1).

J'envisage l'expression

$$\frac{f(x, y)\,\frac{dx}{dz}}{F_y'(x, y)} \tag{2}$$

qui est manifestement, comme x et y, une fonction doublement périodique de z, mais nous allons voir qu'elle n'a pas de pôles et qu'elle se réduit par suite à une constante.

Examinons d'abord ce qu'elle devient pour un pôle $z = \alpha$ de x. Dans le voisinage de $x = \infty$, on aura, puisque l'intégrale est de première espèce

$$\frac{f(x, y)}{F_y'(x, y)} = \frac{P\left(\frac{1}{x}\right)}{x^m},$$

$P\left(\frac{1}{x}\right)$ représentant une série ordonnée suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{x}$ et prenant une valeur différente de zéro pour $x = \infty$; m est un entier égal ou supérieur à deux. Si maintenant n désigne le degré de multiplicité du pôle de α; on aura

$$\frac{f(x, y)}{F_y'(x,y)} = (z - \alpha)^{mn}\, P(z - \alpha),$$

$P(z - \alpha)$ représentant d'une manière générale une série ordonnée suivant les puissances croissantes de $z - \alpha$, et par suite

$$\frac{f(x, y)\,\frac{dx}{dz}}{F_y'(x, y)} = (z - \alpha)^{(m-1)n-1}\, P(z - \alpha).$$

Or on a certainement

$$(m - 1)\, n > 1,$$

puisque n n'est pas nul et que $m \geq 2$. Par suite l'expression (2) a une valeur finie pour $z = \alpha$.

Soit maintenant z_0 une valeur de z, telle que la valeur correspondante x_0 de x soit un point critique de la fonction algébrique de x, définie par l'équation (1) et désignons par y_0 la valeur de y pour $z = z_0$. A une valeur de z voisine de z_0 correspondent une valeur de x et une valeur de y. Supposons que cette dernière fasse partie d'un certain système circulaire de racines de l'équation (1), relatif au point critique x_0 et soit p le degré de ce système circulaire. Je suppose que ce degré soit réduit autant que possible, c'est à dire que ce ne puisse être qu'après un nombre de tours égal à p ou à un multiple de p de la variable x autour de x_0 que la fonction algébrique y reprenne la même valeur. Il est facile de voir que, dans ces conditions, $z = z_0$ devra être une racine de l'équation $x = x_0$ avec un degré de multiplicité égal à un multiple λp de p $(\lambda \geq 1)$. En effet soit q ce degré de multiplicité; z ayant tourné une fois autour de z_0, x a tourné q fois autour de x_0 et y a nécessairement repris la même valeur; donc $q = \lambda p$.

On a nécessairement d'ailleurs dans le voisinage de $x = x_0$

$$\frac{f(x, y)}{F_y'(x, y)} = \frac{M(x)}{(x - x_0)^{\frac{q}{p}}},$$

$M(x)$ prenant une valeur finie et différente de zéro pour $x = x_0$ et l'entier positif ou négatif q satisfaisant à l'inégalité $q < p$.

$(x - x_0)$ contenant d'autre part en facteur $(z - z_0)^{\lambda p}$, on aura:

$$\frac{f(x, y)\dfrac{dx}{dz}}{F_y'(x, y)} = (z - z_0)^{\lambda(p-q)-1} P,$$

P prenant une valeur finie et différente de zéro pour $z = z_0$. Mais on a

$$\lambda(p - q) \geq 1,$$

puisque $p - q > 0$ et que l'entier λ est au moins égal à l'unité. Par suite l'expression (2) garde une valeur finie pour $z = z_0$.

Il est donc établi que pour toute valeur finie de z, l'expression (2) a une valeur finie parfaitement déterminée. Cette expression, étant d'ailleurs une fonction doublement périodique, se réduit à une constante.

Ceci posé, supposons que le genre de l'équation (I) soit supérieur à un, il existera au moins une seconde intégrale de première espèce, soit:

$$\int \frac{f_1(x, y)\, dx}{F_y'(x, y)}$$

et l'expression $\dfrac{f_1(x, y)\dfrac{dx}{dz}}{F_y'(x, y)}$ se réduira aussi à une constante.

Le quotient $\dfrac{f_1(x, y)}{f(x, y)}$ serait donc aussi constant: conclusion inadmissible, car il ne peut exister deux relations distinctes entre x et y.

(II) Nous allons suivre une marche toute semblable pour démontrer le théorème précédemment énoncé. Au lieu d'employer les coordonnées ordinaires x, y, z pour un point de la surface, prenons les coordonnées homogènes x, y, z, t, et soit alors

$$f(x, y, z, t) = 0$$

l'équation de la surface. Nous pouvons supposer que x, y, z, t sont des fonctions uniformes et continues des paramètres α et β

$$x = P_1(\alpha, \beta), \quad y = P_2(\alpha, \beta), \quad z = P_3(\alpha, \beta), \quad t = P_1(\alpha, \beta)$$

et se reproduisant comme les fonctions Θ à un facteur exponentiel près (le même pour toutes) par l'addition à α et β de périodes correspondantes. Il pourra arriver que pour des systemes de valeurs (a, b), un ou plusieurs des rapports $\frac{P_i}{P_j}$ soient indéterminés, mais ces couples de valeurs (a, b) seront en nombre limité, abstraction faite, bien entendu, de multiples des périodes. Ceci revient à dire que pour une fonction abélienne de deux variables α et β, il y a seulement un nombre limité de couples de valeurs de α et β (en faisant abstraction de multiples des périodes), pour lesquelles la fonction est indéterminée. Nous pouvons de plus supposer que les quatre fonctions P ne s'annulent simultanément que pour un nombre limité de couples de valeurs des variables. Cette dernière supposition, dont la justification présente quelques longueurs, n'est d'ailleurs pas indispensable pour notre objet; arrêtons nous simplement sur ce point que pour toute valeur $(\alpha_1 \beta_1)$ de α et β, ne coincidant pas avec un système de valeurs (a, b), et annulant les quatre quantités P, on peut choisir trois des quantités P de telle manière que leur quotient par la quatrième aient pour $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$ des valeurs finies, parfaitement déterminées. Tout d'abord il est clair que ces quotients auront des valeurs parfaitement déterminées, puisque le couple (α_1, β_1) ne coincide pas avec un couple (a, b) d'indétermination. Il s'agit seulement de voir qu'en prenant convenablement une des quantités P et divisant par elle les trois autres, les quotients ont une valeur finie. Or toute quantité P peut se mettre sous la forme:

$$\varphi_n(\alpha - \alpha_1, \ \beta - \beta_1) + \varphi_{n+1}(\alpha - \alpha_1, \ \beta - \beta_1) + \cdots$$

les φ étant des polynomes homogènes en $\alpha - \alpha_1$ et $\beta - \beta_1$, d'ordres marqués par l'indice. Or prenons pour polynome diviseur celui pour lequel le premier indice n est le plus petit possible: il pourra y en avoir plusieurs pour lesquels n aura la même valeur minima, on prendra l'un quelconque d'entre eux; il est clair que de cette manière, chacun des quotients aura une valeur finie.

Ces préliminaires posés, soit maintenant

$$Q(x, y, z, t) = 0,$$

une surface d'ordre $(n - 4)$ passant par la courbe double de la surface, j'envisage l'expression:

$$(\mu) = \frac{Q(x, y, z, t)\begin{vmatrix} x & y & t \\ \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial t}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial x}{\partial \beta} & \frac{\partial y}{\partial \beta} & \frac{\partial t}{\partial \beta} \end{vmatrix}}{f_z'(x, y, z, t)}.$$

Il est aisé de voir que c'est une fonction quadruplement périodique des variables α et β. En effet chacune des fonctions x, y, z, t se reproduit, par l'addition à α et β de multiples des périodes, multiplié par une expression de la forme $e^{A\alpha+B\beta+C}$, où A, B et C sont des constantes.

Donc $Q(x, y, z, t)$ se reproduit multiplié par $e^{(n-4)(A\alpha+B\beta+C)}$, le dénominateur qui est de degré $(n-1)$ se reproduit multiplié par $e^{(n-1)(A\alpha+B\beta+C)}$, il reste à considérer le déterminant entrant en facteur au numérateur; on reconnaîtra sans peine qu'il se reproduit multiplié par $e^{3(A\alpha+B\beta+C)}$ et par conséquent l'expression (μ) est quadruplement périodique. Nous allons montrer que cette fonction, comme l'expression analogue rencontrée plus haut pour les courbes planes, se réduit a une constante.

(III) Considérons d'abord un système de valeurs (α, β), non équivalent à un système (a, b) précédemment défini, et de plus ne donnant pas un point de la courbe double; je dis que l'expression (μ) a dans ce cas une valeur finie parfaitement déterminée. La proposition est évidente si on n'a pas pour ces valeurs $f_z' = 0$, mais remarquons que l'on a:

$$\begin{aligned} x f_x' + y f_y' + z f_z' + t f_t' &= 0, \\ \frac{\partial x}{\partial \alpha} f_x' + \frac{\partial y}{\partial \alpha} f_y' + \frac{\partial z}{\partial \alpha} f_z' + \frac{\partial t}{\partial \alpha} f_t' &= 0, \\ \frac{\partial x}{\partial \beta} f_x' + \frac{\partial y}{\partial \beta} f_y' + \frac{\partial z}{\partial \beta} f_z' + \frac{\partial t}{\partial \beta} f_t' &= 0, \end{aligned}$$

d'où l'on conclut:

$$\frac{\begin{vmatrix} y & z & t \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial z}{\partial \alpha} & \frac{\partial t}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial y}{\partial \beta} & \frac{\partial z}{\partial \beta} & \frac{\partial t}{\partial \beta} \end{vmatrix}}{f_x'} = \frac{\begin{vmatrix} z & t & x \\ \frac{\partial z}{\partial \alpha} & \frac{\partial t}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial z}{\partial \beta} & \frac{\partial t}{\partial \beta} & \frac{\partial x}{\partial \beta} \end{vmatrix}}{f_y'} = \frac{\begin{vmatrix} t & x & y \\ \frac{\partial t}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial t}{\partial \beta} & \frac{\partial x}{\partial \beta} & \frac{\partial y}{\partial \beta} \end{vmatrix}}{f_z'}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} x & y & z \\ \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial z}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial x}{\partial \beta} & \frac{\partial y}{\partial \beta} & \frac{\partial z}{\partial \beta} \end{vmatrix}}{f_t'};$$

or (α, β) ne donnant pas par hypothèse un point de la courbe double, les quatre dénominateurs précédents ne seront pas nuls, et la proposition est dès lors établie. Ceci suppose que le couple (α, β) n'annule pas les quatre quantités P; mais c'est là une difficulté qui se lève aisément. Nous pouvons supposer, comme nous l'avons montré, que $\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}$ aient en (α, β) des valeurs finies, parfaitement déterminées. Si nous revenons, pour un instant, aux coordonnées ordinaires x, y, z, admettons que la dérivée partielle f'_z ne soit pas nulle, l'expression (μ) s'écrira maintenant

$$\frac{Q(x, y, z)\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial \beta} - \frac{\partial x}{\partial \beta}\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)}{f'_z(x, y, z)}$$

et on voit qu'elle a en (α, β) une valeur bien déterminée.

(IV) Soit maintenant (α_1, β_1) un couple de valeurs des paramètres donnant un point de la courbe double; je suppose d'ailleurs que $(\alpha_1 \beta_1)$ n'est pas équivalent à un couple (a, b) et j'admets d'abord que $(\alpha_1 \beta_1)$ n'annule pas les quatre fonctions P. Soit t différent de zéro, c'est à dire que $\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}$ ont pour $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$ des valeurs finies. Revenons, comme plus haut, aux coordonnées ordinaires; l'expression (μ) aura les différentes formes

$$\frac{Q(x, y, z)\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \beta} - \frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial \beta}\right)}{f'_x(x, y, z)}, \qquad \frac{Q(x, y, z)\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \beta} - \frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)}{f'_y(x, y, z)},$$

$$\frac{Q(x, y, z)\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial \beta} - \frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)}{f'_z(x, y, z)}$$

et

$$\frac{Q(x, y, z)\begin{vmatrix} x & y & z \\ \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial z}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial x}{\partial \beta} & \frac{\partial y}{\partial \beta} & \frac{\partial z}{\partial \beta} \end{vmatrix}}{f'_t(x, y, z)}.$$

Les quatre dénominateurs sont nuls ici pour $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$, mais nous avons maintenant à faire intervenir l'hypothèse que $Q(x, y, z)$ passe par la courbe double de la surface. Soit pour $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$, x_1, y_1 et z_1 les valeurs de x, y et z. Par le point (x_1, y_1, z_1) passent deux nappes de la surface, ayant par hypothèse deux plans tangents différents. Considérons un axe de coordonnées, qui ne soit parallèle à aucun de ces plans tangents; soit l'axe des z. Pour l'une des nappes, on aura dans le voisinage de x_1, y_1

$$(1) \qquad z - z_1 = a(x - x_1) + b(y - y_1) + \varphi(x - x_1, y - y_1),$$

φ ne renfermant que des termes de degré supérieur au premier.

Pour l'autre nappe, on aura pareillement:

$$(2) \qquad z - z_1 = a(x - x_1) + b(y - y_1) + \psi(x - x_1, y - y_1)$$

et on n'a pas à la fois $a = a'$ et $b = b'$.

L'équation de la surface donnée pourra évidemment se mettre sous la forme:

$$0 = f(x, y, z)$$
$$= [z - z_1 - a(x - x_1) - b(y - y_1)]\,[z - z_1 - a'(x - x_1) - b'(y - y_1)] + P(x - x_1, y - y_1, z - z_1),$$

P ne renfermant que des termes en $(x - x_1)$, $(y - y_1)$, $(z - z_1)$ de degré supérieur au second.

On aura:

$$f'_z(x, y, z) = z - z_1 - a(x - x_1) - b(y - y_1) + z - z_1 - a'(x - x_1) - b'(y - y_1) + P'_z(x - x_1, y - y_1, z - z_1).$$

Pour $\alpha = \alpha_1$ et $\beta = \beta_1$ on a $x = x_1$, $y = y_1$ et $z = z_1$. Si nous donnons à α et β des valeurs voisines de α_1 et β_1, x, y et z prendront des valeurs voisines de x_1, y_1, z_1 correspondant à des points situés sur l'une ou l'autre des nappes (1) et (2): soit, pour fixer les idées, la nappe (1). Alors, en remplaçant dans $f'_z(x, y, z)$ z par sa valeur tirée du développement (1), on a:

$$f'_z = (a - a')(x - x_1) + (b - b')(y - y_1) + S(x - x_1, y - y_1),$$

S ne renfermant que des termes de degré supérieur au premier.

Passons maintenant à l'expression de $Q(x, y, z)$.

Soit

$$Q(x, y, z) = A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) + P(x - x_1, y - y_1, z - z_1)$$

cette surface est tangente au point (x_1, y_1, z) à l'intersection des nappes (1) et (2), puis qu'elle doit passer par cette intersection. On a donc:

$$\begin{vmatrix} A & B & -C \\ a & b & +1 \\ a' & b' & +1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$A(b - b') + B(a' - a) - C(ab' - ba') = 0$$

relation qui peut s'écrire

$$(3) \qquad (A + Ca)(b - b') - (B + Cb)(a - a') = 0;$$

en remplaçant dans $Q(x, y, z)$, z par sa valeur tirée de l'équation) on a:

$$Q(x, y, z) = (A + Ca)(x - x_1) + (B + Cb)(y - y_1) + \cdots$$

s termes qui suivent étant de degré supérieur au premier, on donc

$$\frac{Q(x,y,z)}{f_z'(x,y,z)} = \frac{(A+Ca)(x-x_1)+(B+Cb)(y-y_1)+\cdots}{(a-a')(x-x_1)+(b-b')(y-y_1)+\cdots}$$

, on voit d'après la relation (3) que les coefficients de $x - x_1$ et $- y_1$ sont proportionnels dans le numérateur et dans le dénomiateur. Par suite si le point x, y, z se rapproche sur la nappe (1) ı point x_1, y_1, z_1, de telle manière que $\frac{y - y_1}{x - x_1}$ n'ait pas pour mite $\frac{a' - a}{b - b'}$, l'expression précédente tendra vers une limite parfaiteıent déterminée. Or cette circonstance est évidemment réalisable t d'une infinité de manières: par suite l'expression (μ), quand α t β tendent respectivement vers α_1 et β_1, tend vers une limite déterıinée; nous n'avons, il est vrai, examiné la question que quand α t β tendent vers α_1 et β_1 de telle manière que $\frac{y - y_1}{x - x_1}$ n'ait pas pour imite $\frac{a' - a}{b - b'}$, mais le cas particulier laissé de côté n'a aucune imıortance pour la suite de notre démonstration.

J'ai supposé que le couple de valeurs (α_1, β_1) n'annulait pas à a fois les quatre quantités P; il est entièrement évident, d'après les emarques précédemment faites, que cette hypothèse n'amène aucune nodification dans la démonstration, si on suppose, bien entendu, que $\alpha_1, \beta_1)$ n'est pas équivalent à un couple (a, b).

(V) Nous avons étudié l'expression (μ) pour tout système de valeurs (α_1, β_1) non équivalent à un système (a, b). Cette étude nous ı montré que pour un tel système de valeurs, la fonction avait une valeur finie bien déterminée, du moins quand α et β se rapprochaient le α_1 et β_1 d'une manière quelconque, c'est à dire en laissant de côté certains cas tout particuliers. Mais si l'on considère une fonction abélienne de deux variables α et β, on reconnait aisément qu'elle doit nécessairement devenir infinie pour une infinité de couples non équivalents de valeurs de ces variables, c'est à dire qu'il y a une infinité de systèmes (A, B) non équivalents tels que α et β se rapprochant de A et B d'une manière quelconque, la fonction devienne infinie. Or pour l'expression (μ) qui vient d'être étudiée, les couples (a, b), en nombre fini si l'on fait abstraction des multiples des périodes, seraient les seuls qui pourraient la rendre infinie. Cette expression doit par suite se réduire nécessairement à une constante.

(VI) La démonstration s'achève maintenant comme dans le cas des courbes planes. Si la surface est d'un genre supérieur au premier, il existera un second polynome $Q_1(x, y, z, t)$ permettant de former une seconde expression analogue à l'expression (μ). Chacune d'elles étant constante, leur quotient $\frac{Q_1(x, y, z, t)}{Q(x, y, z, t)}$ serait lui-même constant pour tous les points de la surface; mais cette conclusion est inadmissible, car on ne peut avoir deux relations distinctes entre les coordonnées d'un point d'une surface. La proposition énoncée est donc complètement établie: le genre de la surface proposée ne peut être supérieur à l'unité.

Paris, le 19. Janvier 1882.