

SUL MOTO DI UN LIQUIDO IN UN CANALE.

Memoria di **Gustavo Colonnetti** (Torino).

Adunanza del 22 gennaio 1911.

In una Memoria intitolata: « *Scie e leggi di resistenza* » ¹⁾ il Prof. LEVI-CIVITA ha mostrato come si possano superare le gravi difficoltà analitiche che presenta lo studio dei moti fluidi discontinui ricorrendo, ogni qual volta si possa limitare la questione a due sole dimensioni, ad opportune rappresentazioni conformi ed applicando i metodi della teoria delle funzioni di variabile complessa.

Il procedimento, applicato nella citata memoria allo studio del moto traslatorio uniforme di un solido che si trovi immerso in un liquido indefinito, nell'ipotesi che il moto sia discontinuo per la formazione di una scia pure indefinita, venne poco appresso dal Dr. CISOTTI utilizzato nello studio di altri problemi analoghi quale quello delle vene fluenti ²⁾ e del moto di un solido in un canale ³⁾.

Nella presente Memoria espongo alcune ricerche sul moto di un liquido perfetto e non sollecitato da forze, scorrente a pelo libero in un canale di cui sia dato il profilo del fondo. Il problema ha, dal punto di vista della sua trattazione matematica, molti punti di contatto con quelli testè ricordati, e si presta assai bene ad essere trattato coi metodi della teoria delle funzioni di variabile complessa, in quanto la limitazione del moto a due sole dimensioni sembra, nel caso in cui le pareti laterali del canale siano piane e parallele, affatto legittima e rispondente alla realtà delle cose.

Ed il risultato è, *almeno sotto il punto di vista matematico*, assai soddisfacente, perchè si riesce ad assegnare l'integrale generale della classe di moti considerata sia nel caso di profilo rigido curvilineo, sia in quello di profilo poligonale, rendendo possibile l'espressione, mediante questo integrale, di tutti gli elementi del moto. Resta però qui, come già nel caso dei moti con scia, insoluto il problema della ricerca della funzione corrispondente ad un profilo preventivamente assegnato ⁴⁾, nonchè quello della

¹⁾ LEVI-CIVITA, *Scie e leggi di resistenza* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XXIII (1° semestre 1907), pp. 1-37].

²⁾ CISOTTI, *Vene fluenti* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XXV (1° semestre 1908), pp. 145-179].

³⁾ CISOTTI, *Sul moto di un solido in un canale* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XXVIII (2° semestre 1909), pp. 307-352].

⁴⁾ Intorno alla possibilità di risolvere questo problema si confronti la recentissima Nota di H. VIL-LAT, *Sur les mouvements d'un fluide autour d'un obstacle de forme donnée* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris), tome CLI (2° semestre 1910), pp. 1034-1037].

determinazione delle condizioni non soltanto necessarie ma *sufficienti* perchè l'integrale in questione rappresenti un moto effettivamente possibile ⁵⁾.

Sotto il punto di vista della rappresentazione del fenomeno fisico i risultati a cui la teoria matematica conduce vanno accettati soltanto con quelle riserve che derivano dall'essersi supposto il liquido perfetto e non soggetto a forze di massa: con tutto ciò essi non sembrano del tutto privi di interesse soprattutto quando si pensi che nella letteratura tecnica si contendono il campo, su questo argomento, le opinioni più contraddittorie. È infatti a tutti noto che non mancano gli idraulici i quali accettano senza discussione nè dimostrazione, come un assioma, la teoria di HERRMANN ⁶⁾ secondo la quale ogni massa liquida, scorrente lungo una parete rigida, deve, ad ogni cambiamento di direzione di quella parete, seguire le leggi dell'urto tra corpi perfettamente anelastici, come non son rari quelli che ammettono come accertata l'ipotesi di BACH ⁷⁾ sulla formazione di una specie di sezione contratta nelle immediate vicinanze di ogni punto angoloso della parete rigida.

Ma per contro altri vi sono i quali ritengono che, dopo una deviazione, la vena liquida assuma nella nuova direzione una velocità sensibilmente eguale a quella che essa possedeva nella direzione primitiva: a questa teoria, la quale segna il punto di partenza dei più moderni studi sul funzionamento delle turbine idrauliche ad azione ⁸⁾, hanno portato un notevole contributo le recenti esperienze di BÄNKI ⁹⁾; il far seguire alla

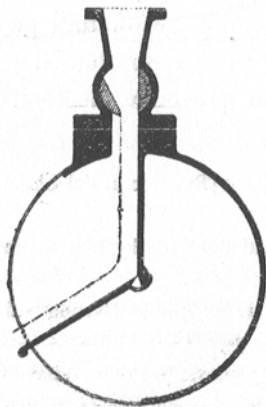
⁵⁾ M. BRILLOUIN, *Mouvement discontinu de HELMHOLTZ. Obstacles courbes*. [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris), tome CLI (2^e semestre 1910), pp. 931-933].

⁶⁾ G. HERRMANN, *Die graphische Theorie der Turbinen und Kreiselpumpen* [Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbflusses in Preussen, 1884]. Pubblicato in volume separato nel 1887 e ripubblicato invariato nel 1906 (Berlin, Simion), 3^a edizione, pag. 7.

⁷⁾ C. BACH, *Die Wasserräder* (Stuttgart, Wittwer, 1886).

⁸⁾ A. PFARR, *Die Turbinen für Wasserkraftbetrieb* (Berlin, Springer, 1907).

⁹⁾ D. BÄNKI, *Ueber unrichtige Anwendung hydraulischer Sätze* [Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Band LIII (1909), pp. 1490-1496]. Nell'apparecchio usato dal BÄNKI (fig. 1) un getto liquido veniva guidato da una parete rigida bilatera, fra due lastre circolari disposte *orizzontalmente* a piccola



(Fig. 1).

prova sperimentale la conferma della teoria matematica fu uno dei principali scopi delle ricerche che sto per esporre.

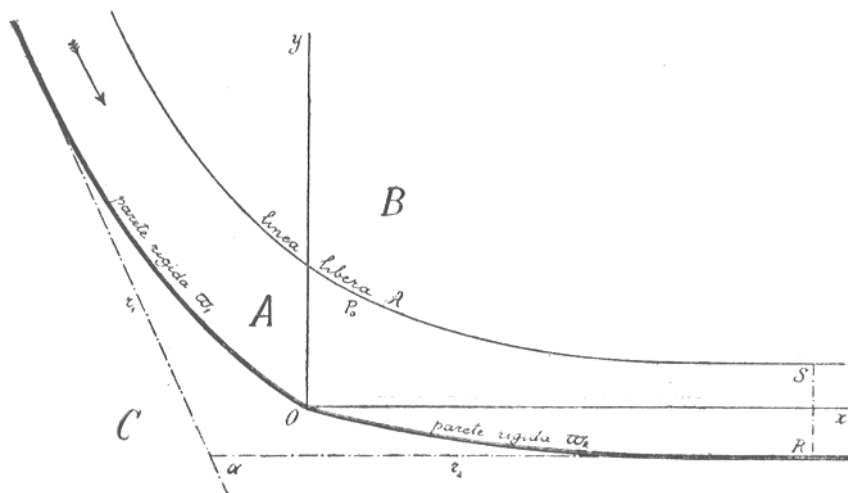
E la conferma riesce, come si vedrà, tanto completa quanto rigorosa, non soltanto in ciò che concerne l'andamento qualitativo del fenomeno ma altresì a proposito dell'elemento che più direttamente è accessibile all'esperienza: la pressione che il liquido in moto esercita sulla parete rigida che lo guida.

§ 1.

Posizione del Problema.

Un liquido, fluido incompressibile, non sollecitato da forze ed omogeneo, la cui densità costante prenderemo eguale all'unità, scorra lungo una *parete rigida* ω con moto continuo permanente ed irrotazionale mantenendosi sempre a contatto con essa ed occupando per intero un campo A limitato, oltrechè da quella parete, da una *linea di pelo libero* λ al di là della quale stia un fluido in quiete a pressione costante.

Assumiamo un punto qualunque O della parete rigida ω per origine delle coordinate, ed indichiamo con ω_1 ed ω_2 rispettivamente le due porzioni di ω situate a monte



[(Fig. 2) (piano $z = x + iy$)].

ed a valle dell'origine. Dette due porzioni si intendono del resto indefinitamente estese

distanza l'una dall'altra; il disco superiore, munito di finestra a vetro consentiva l'esame ed il rilevamento della forma del getto. Le prove eseguite per valori diversi così dell'angolo di deviazione come dello spessore della vena, mostrarono che il getto liquido non subiva sensibili perdite di energia neppure per deviazioni prossime a 90° , quando cioè, secondo la teoria dell'urto, l'acqua avrebbe dovuto perdere completamente o quasi la sua velocità. Che anzi non venne constatata perdita notevole di energia neppure per angoli di deviazione superiori a 90° . Ed il BANKI asserisce che, in ogni caso, il getto possedeva, all'uscita dall'apparecchio, velocità e dimensioni sensibilmente eguali a quelle dategli all'entrata.

e comunque profilate nelle vicinanze di O purchè rispettivamente assintotiche a due rette date r_1 ed r_2 .

Assumiamo la parallela per O alla retta direttrice r_2 , assintoto della parete ϖ_2 situata a valle di O , per asse delle x , positivo nel verso del moto, e la normale ad esso in O stesso per asse delle y , scegliendovi come verso positivo quello diretto dalla parte occupata dal fluido.

Introduciamo le seguenti ipotesi:

a) lo strato liquido in moto si estende indefinitamente sia a monte che a valle di O ; il campo A che esso occupa, limitato dalle due linee pure indefinite ϖ e λ , è *semplicemente connesso*.

b) la linea di pelo libero λ è a sua volta assintotica a due rette parallele rispettivamente alle due direttrici r_1 ed r_2 . Essa ammette *ovunque* tangente variabile con continuità cioè non possiede punti angolosi.

c) la parete rigida ϖ invece, pur ammettendo *generalmente* tangente variabile con continuità, può eventualmente presentare punti (vertici) in cui la tangente cambi bruscamente di direzione. Tali punti saranno però in numero finito. In particolare il punto O può essere un punto angoloso. In ogni caso però la concavità di ϖ sia *ovunque* rivolta dalla parte del campo A ¹⁰).

d) Assumiamo per velocità unitaria quella a cui il liquido tende per x positivo e crescente indefinitamente. In altri termini, delle u_p e v_p le componenti parallele ai due assi coordinati della velocità in un punto $P(x, y)$ generico del campo A , riteniamo

$$(1) \quad \begin{cases} \lim_{x=+\infty} u_p = 1, \\ \lim_{x=+\infty} v_p = 0. \end{cases}$$

e) Il valore assoluto $V = |\sqrt{u^2 + v^2}|$ della velocità delle particelle fluide è in tutto il campo A , contorni compresi, diverso da zero; eccezione fatta soltanto per i punti angolosi della parete rigida ϖ , nei quali punti la velocità deve, *per la continuità*, necessariamente annullarsi.

Ciò premesso veniamo alla parte deduttiva.

§ 2.

Potenziale di velocità e funzione di corrente.

Il movimento del fluido essendo per ipotesi irrotazionale esisterà un potenziale di velocità $\varphi(x, y)$ tale che

$$d\varphi = u dx + v dy$$

¹⁰) Quest'ultima condizione non sarebbe invero indispensabile per la trattazione matematica del problema. Contuttociò essa sembra opportuna per assicurarci la supposta ininterrotta aderenza dello strato liquido alla parete rigida. Vedremo in fine che essa viene d'altronde, dalla stessa trattazione matematica, indirettamente giustificata.

ovvero

$$(2) \quad \begin{cases} u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \end{cases}$$

La φ risulta così definita a meno di una costante additiva come funzione dei punti P , *uniforme*, perchè il campo è semplicemente connesso, *finita e continua* in ogni punto situato a distanza finita perchè tali sono le u e v .

Quando P si allontana indefinitamente nel verso delle x crescenti, in virtù delle (1), u tende all'unità, epperò φ deve crescere con x indefinitamente.

Per fissare la costante additiva converremo che sia $\varphi = 0$ in O .

Per l'incompressibilità del fluido dev'essere

$$(3) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

da cui, per le (2),

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \Delta_2 \varphi = 0,$$

la quale dice che deve φ essere *armonica* nel campo A considerato: esisterà pertanto una funzione $\psi(x, y)$ sua associata (funzione di corrente) uniforme, continua e finita al finito, definita dalle

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -v, \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = u, \end{cases}$$

epperò tale che

$$d\psi = -v dx + u dy.$$

Anche la ψ risulta così definita a meno di una costante additiva che noi sceglieremo in modo che risulti anche qui $\psi = 0$ in O .

Dalle (2) si ricava

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x},$$

la quale, confrontata colla (3),

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y},$$

dice che u e $-v$ sono rispettivamente parte reale e coefficiente dell'immaginario di una funzione

(5)
della variabile complessa

$$w = u - iv$$

$$z = x + iy.$$

Dalle (4) poi si deduce che della stessa variabile complessa è funzione

$$(6) \quad f = \varphi + i\psi$$

ed è facile inoltre verificare che si ha

$$(7) \quad \frac{\partial f}{\partial z} = w.$$

Da tutto ciò che si è detto, a proposito di φ e ψ , deriva poi che la f è regolare entro A tranne che per $|z| = \infty$ corrispondentemente a cui si ha

$$(8) \quad \lim_{|z|=\infty} |f| = \infty.$$

La w invece è regolare in tutto il campo, punti all'infinito compresi.

§ 3.

Condizioni ai limiti. — Portata. — Pressione.

In ogni punto delle due linee di contorno ϖ e λ la velocità deve essere puramente tangenziale: detta pertanto n la normale in un punto generico del contorno, rivolta verso l'interno del campo A , sarà

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$$

ovvero, designando con $\frac{\partial x}{\partial s}$ e con $\frac{\partial y}{\partial s}$ i coseni direttori della tangente al contorno nel punto generico stesso,

$$-v \frac{\partial x}{\partial s} + u \frac{\partial y}{\partial s} = 0,$$

ossia, in virtù della (4),

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = 0,$$

dalla quale si deduce che la funzione ψ deve avere valore costante sopra ciascuna delle due linee di contorno, ciò che del resto poteva prevedersi osservando che le linee stesse altro non sono che due particolari linee di corrente epperò devon avere equazioni della forma

$$\psi = \text{costante}.$$

Quanto al valore di questa costante si osservi che, per essere $\psi = 0$ in O , dovrà essere

$$(9) \quad \psi = 0 \text{ in ogni punto di } \varpi.$$

Nei punti di λ invece la funzione ψ deve avere un valore costante *necessariamente* diverso da zero.

Infatti, per le ipotesi fatte nel § 1, la seconda delle (4) ci dice che dev'essere, per x positivo e sufficientemente grande,

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u > 0,$$

epperò ψ dev'essere funzione crescente di y .

Altrimenti si può ragionare così: si indichi con Q la *portata* dello strato fluido, ossia la quantità di liquido, costante come lo richiede il carattere permanente del moto, che, nell'unità di tempo, attraversa una qualunque sezione dello strato stesso. Supposta praticata tale sezione in RS (Fig. 2), sufficientemente lontana, verso valle, dal punto O , normalmente alla direzione del moto, cioè all'asse delle x , il valore di Q risulterà, per le (1), dato da

$$Q = \int_{y_R}^{y_S} u dy,$$

y_R ed y_S essendo le ordinate dei punti R ed S delle due linee di contorno ϖ e λ . Per la seconda delle (4)

$$Q = \int_{y_R}^{y_S} \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = \psi_S - \psi_R.$$

Ma $\psi_R = 0$, quindi
(10)

$$\psi_S = Q.$$

Se non si vuole adunque cadere nell'assurdo di render nulla la portata, si deve assumere in S , epperò su tutta la linea λ ,

$$\psi \neq 0.$$

Quanto al valore che noi dobbiamo attribuire a questa costante, è facile verificare che esso dipende soltanto dalla scelta dell'unità di lunghezza. Infatti, rappresentate con m le masse, con l le lunghezze, con t i tempi, con ρ le densità e con v le velocità, si possono esprimere le dimensioni delle portate Q sotto la forma

$$[Q] = [m][t]^{-1} = [\rho][l]^3[t]^{-1} = [\rho][l]^2[v].$$

Ora noi abbiamo già scelte ad arbitrio le unità di densità e di velocità (§ 1): possiamo perciò ancora fissare ad arbitrio l'unità di lunghezza: ne risulterà fissata, in conseguenza, l'unità di misura delle portate.

Noi imporremo π come misura dello spessore assintotico dello strato liquido a valle del moto, cioè scriveremo

$$y_S - y_R = \pi.$$

Allora, tenuto conto delle (1), si ha

$$Q = \int_{y_R}^{y_S} u dy = \int_{y_R}^{y_S} dy = \pi,$$

epperò, per la (10),

$$(11) \quad \psi = \pi \text{ in ogni punto di } \lambda.$$

Si indichi con p la pressione del fluido in un punto generico di A , occupato da una particella dotata della velocità V . Lungo la linea libera λ , malgrado la discontinuità nel moto, deve sussistere continuità nei valori della pressione. Detta perciò p_0 la pressione costante che regna nel campo B , dovrà essere

$$(12) \quad p = p_0 \text{ in ogni punto di } \lambda.$$

D'altra parte, per essere il moto permanente ed irrotazionale in assenza di forze di massa, le equazioni idrodinamiche di EULERO si compendiano in una relazione inte-

grale tra la pressione p e la velocità V ; relazione che, per l'ipotesi fatta che la densità sia eguale all'unità, può scriversi sotto la forma

$$p = -\frac{1}{2}V^2 + \text{costante}.$$

Applicata al punto generico della linea libera λ , essa dà

$$p_0 = -\frac{1}{2}V^2 + \text{costante};$$

dunque la velocità V è essa stessa costante su quella linea; questo risultato messo in relazione colle (1) ci permette di affermare che

$$(13) \quad V = 1 \text{ in ogni punto di } \lambda.$$

Dalla relazione

$$p_0 = -\frac{1}{2}V^2 + \text{costante}$$

si ricava poi che la *costante* ha il valore $p_0 + \frac{1}{2}$, e che quindi, in ogni punto del campo A , è

$$p = p_0 + \frac{1}{2}(1 - V^2).$$

D'altra parte, il valore assoluto della velocità delle molecole fluide in una sezione praticata a distanza infinitamente grande *a monte* di O , là dove il moto è uniforme e rettilineo in tutta la massa, dovrà, in virtù della (13), essere esso pure eguale all'unità.

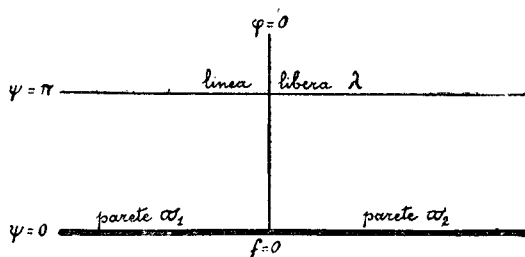
Ma, in una tale sezione, la velocità dev'essere ovunque parallela alla direttrice r_1 ; si potrà pertanto concludere che anche *a monte*, come già *a valle*, lo spessore assintotico dello strato è misurato, in direzione normale agli assintoti, dallo stesso numero π che misura la portata.

§ 4.

Corrispondenza fra i due piani complessi $z = x + iy$ ed $f = \varphi + i\psi$.

Rappresentiamo nel piano complesso $f = \varphi + i\psi$ i valori che assume la funzione $f(z)$ al variare di z nel campo A .

Quando z si trova sulla linea di contorno ϖ , f è reale in causa della (9). Più precisamente al punto O ($z = 0$), per ciò che si disse nel § 2 ($\varphi = 0$ e $\psi = 0$) corrisponde il punto $f = 0$. Procedendo poi su ϖ in uno qualunque dei due sensi, la φ ,



[(Fig. 3) (piano $f = \varphi + i\psi$)].

e con essa la f , cresce in valor assoluto, indefinitamente, assumendo valori positivi nel

verso del flusso, negativi nel verso opposto; in altri termini, quando χ percorre la linea ϖ dall'infinito a monte all'infinito a valle, φ varia da $-\infty$ a $+\infty$.

Infatti sopra ϖ , come sopra ogni linea di flusso, si ha

$$\frac{dx}{ds} = \frac{u}{V} \quad \text{e} \quad \frac{dy}{ds} = \frac{v}{V}$$

intendendosi come direzione alla quale si riferiscono gli incrementi dx e dy quella del flusso, e riguardandosi l'elemento di spazio percorso ds come essenzialmente positivo.

Ne segue che

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{ds} = \frac{u^2 + v^2}{V} = V \geq 0.$$

Se di più si rammenta che i punti angolosi della parete ϖ sono per ipotesi in numero limitato e che perciò in punti di ϖ sufficientemente lontani da O , sia a monte che verso valle, è certamente

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = V > 0,$$

si può concludere che l'asserto è completamente giustificato. In sostanza esiste una corrispondenza biunivoca fra l'intera linea ϖ del piano χ e l'intero asse delle φ del piano f . Quando invece χ descrive la linea libera λ , il punto di affissa f si muove in virtù della (11) sulla retta

$$\psi = \pi,$$

che anzi, ripetendo il ragionamento già fatto a proposito della linea ϖ ed osservando che sulla λ è

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = V = 1,$$

si dovrà concludere che f descrive quella retta $\psi = \pi$ per intero, la sua parte reale variando da $-\infty$ a $+\infty$.

Riconosciuto così il comportamento al contorno, ricordiamo (§ 2) che $f(\chi)$ si mantiene regolare nel campo A per valori finiti di χ e che inoltre, per la (8), a $|\chi| = \infty$ corrisponde $|f| = \infty$.

Abbiamo quanto basta per poter legittimamente concludere che la relazione funzionale

$$f = f(\chi)$$

stabilisce una corrispondenza biunivoca senza eccezione fra il campo considerato A e la striscia

$$0 < \psi < \pi$$

del piano f . Perciò, considerando reciprocamente la χ come funzione dell'argomento f nel campo compreso fra le due rette $\psi = 0$ e $\psi = \pi$, la χ vi è funzione regolare in ogni punto a distanza finita mentre diviene infinita per f infinito:

$$\lim_{|f| \rightarrow \infty} |\chi| = \infty.$$

§ 5.

La funzione $w(f)$ ed il suo logaritmo $-i\omega$.

Si è già visto (§ 2) che la

$$w = u - iv$$

è funzione di z regolare nel campo A , compreso il punto all'infinito in cui, per le (1), è $w = 1$.

Potendosi considerare la z , per quanto si è visto nel § 4, come funzione di f , finita e continua in tutti i punti della striscia

$$0 < \psi < \pi,$$

anche la w si potrà riguardare come funzione finita e continua di f nello stesso campo.

Dalla (13) si deduce che, per $\psi = \pi$,

$$|w| = V = 1.$$

Il valore assoluto di w si annulla soltanto in corrispondenza dei punti angolosi della parete rigida ($\psi = 0$). In ogni altro punto del campo

$$|w| = V > 0.$$

Perciò, ponendo

(14)

$$w = e^{-i\omega}$$

e convenendo che nel punto all'infinito a valle del moto (là dove $w = 1$) sia $\omega = 0$ rimane definita una funzione ω uniforme nella striscia

$$0 < \psi < \pi$$

finita e continua anche sui bordi tranne che nei punti corrispondenti ai punti angolosi di ϖ , avvicinandosi ai quali punti $i\omega$ tende verso $+\infty$.

Sul bordo $\psi = \pi$, là dove w è, in valor assoluto, eguale all'unità, ω assume valori puramente reali.

§ 6.

Cambiamenti di variabile.

Si vuole ora eseguire un cambiamento di variabile che sostituisca alla striscia

$$0 < \psi < \pi$$

un semicerchio il cui contorno corrisponda alle due rette limiti della striscia in modo che quella di esse che rappresenta la linea libera λ del piano z e sulla quale ω è reale (§ 5), venga ad essere a sua volta rappresentata dal diametro del semicerchio, e la rimanente linea limite, immagine della parete rigida ϖ , venga a corrispondere alla semicirconferenza.

A questo scopo poniamo anzitutto

(15)

$$F = e^f$$

o, ciò che fa lo stesso,
(15')

$$f = \log F,$$

dove il logaritmo ha la determinazione che si riduce a zero per $F = 1$.

Mediante questa trasformazione la nostra striscia del piano f viene riferita biunivocamente al semipiano F di ordinate positive in guisa che alle rette limiti della striscia corrisponde l'asse reale del piano F e precisamente alla retta $\psi = 0$ corrisponde il semiasse positivo, alla $\psi = \pi$ il negativo, la nuova origine rappresentando il punto all'infinito a monte del moto.

Ed invero, posto per un momento $F = r e^{i\delta}$, dalla (15) che può allora esser scritta

$$r e^{i\delta} = e^{\varphi + i\psi} = e^{\varphi} e^{i\psi}$$

si deducono le due eguaglianze

$$r = e^{\varphi}, \quad \delta = \psi.$$

La prima mostra che variando φ da $-\infty$ a 0 , r varia da 0 ad 1 , e che variando φ da 0 a $+\infty$, r varia in conseguenza da 1 a $+\infty$.

Dalla seconda scende che al variare di ψ da 0 a π anche δ varia fra gli stessi limiti: ciò che basta a provare l'asserto.

Poniamo, in secondo luogo,

$$(16) \quad Z = \frac{F - 1}{F + 1}$$

ovvero

$$(16') \quad F = \frac{1 + Z}{1 - Z}.$$

Il semipiano F di ordinate positive viene così biunivocamente riferito ad un altro semipiano Z pure di ordinate positive in modo che all'asse reale del primo corrisponda l'asse reale del secondo, coll'avvertenza che il semiasse positivo del primo viene ad avere per immagine sul secondo il segmento finito compreso fra i punti di ascisse -1 e $+1$, i quali vengono così a rappresentare rispettivamente i due punti all'infinito a monte ed a valle del moto.

Ed invero per F reale risulta ovviamente Z reale: più precisamente, al variare di F da 0 ad 1 , Z varia da -1 a 0 ; al variare di F da 1 a $+\infty$, Z varia da 0 a -1 ; variando poi F da $-\infty$ a 0 , Z passa successivamente da 1 a $+\infty$ e da $-\infty$ a -1 .

Alla parete rigida ϖ_1 situata a monte di O corrisponde dunque il segmento finito dell'asse reale $-1 < Z < 0$.

Alla parete rigida ϖ_2 a valle di O corrisponde il segmento finito dello stesso asse reale $0 < Z < 1$.

Alla linea libera λ corrisponderanno invece le due porzioni dello stesso asse reale per cui si ha $1 < Z$ ovvero $Z < -1$, porzioni costituenti, sotto il punto di vista proiettivo, un unico segmento *infinito* $1, -1$.

La dimostrazione risulterà completa quando si sia osservato che, posto provvisoriamente nella (16)

$$F = F' + iF'' \quad \text{e} \quad Z = Z' + iZ'',$$

a valori positivi di F'' corrispondono sempre e soltanto valori positivi di Z'' .

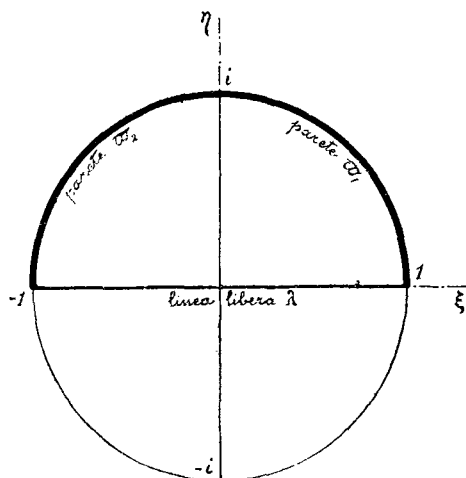
Imponendo finalmente la trasformazione

$$(17) \quad Z = -\frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right)$$

il campo di variabilità nel piano

$$\zeta = \xi + i\eta = \rho e^{i\sigma}$$

risulta quello desiderato.



[(Fig. 4) (piano $\zeta = \xi + i\eta$)].

Consideriamo infatti la semicirconferenza $1, i, -1$ della Fig. 4 ed il relativo diametro (segmento $-1, 1$ dell'asse reale).

Scritta la (17) sotto la forma

$$(17') \quad Z = -\frac{1}{2} \left[\left(\rho + \frac{1}{\rho} \right) \cos \sigma + i \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right) \sin \sigma \right]$$

immaginiamo di far percorrere a ζ la semicirconferenza $1, i, -1$.

I corrispondenti punti Z si ottengono dalla (17') ponendo in essa $\rho = 1$ e facendo variare σ da 0 a π ; si avrà

$$Z = -\cos \sigma$$

che varia evidentemente fra -1 e $+1$ in modo che:

$$\text{a } \sigma = 0 \quad \text{corrisponde il valore } Z = -1,$$

$$\text{» } \sigma = \frac{\pi}{2} \quad \text{» } \text{ » } \text{ » } Z = 0,$$

$$\text{» } \sigma = \pi \quad \text{» } \text{ » } \text{ » } Z = +1.$$

Ne concludiamo che la semicirconferenza $1, i, -1$ del piano ζ è la nuova immagine della parete rigida ϖ ; più precisamente l'arco $1, i$ rappresenta il tratto ϖ_1 di parete situato a monte dell'origine O , mentre l'arco $i, -1$ corrisponde al tronco di parete ϖ_2 a valle di O .

Facciamo ora percorrere a ζ il diametro $1, -1$.

Evidentemente quando ζ descrive il raggio 1 , o si ha $\sigma = 0$ mentre ρ varia da

1 a 0: la (17') mostra che

$$Z = -\frac{1}{2} \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right)$$

percorre l'asse reale da -1 a $-\infty$.

Che se poi ζ descrive il raggio 0, -1 , è $\sigma = \pi$ e ρ varia da 0 ad 1, perciò

$$Z = +\frac{1}{2} \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right)$$

descriverà lo stesso asse reale da $+\infty$ ad 1.

Il diametro 1, -1 del semicerchio è adunque precisamente l'immagine della linea libera λ del piano ζ .

E finalmente supponiamo che ζ si muova comunque nell'interno del semicerchio: si ha allora

$$\rho < 1 \quad \text{e} \quad 0 < \sigma < \pi$$

perciò il coefficiente di i nell'espressione di Z

$$-\frac{1}{2} \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right) \sin \sigma$$

si mantiene positivo: il corrispondente punto del piano Z ha ordinata positiva.

Avvicinandosi comunque ζ all'origine

$$|Z| = \frac{1}{2} \left| \zeta + \frac{1}{\zeta} \right|$$

tende all'infinito.

Da tutto ciò si può concludere che c'è corrispondenza biunivoca fra l'accennato semicerchio ed il semipiano Z di ordinata positiva, contorni inclusi.

Combinando le (15'), (16') e (17) si ottiene la relazione che lega la f alla ζ sotto la forma

$$f = \log \frac{1 - \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right)}{1 + \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right)}$$

o, più semplicemente,

$$(18) \quad f = \pi i + 2 \log \frac{1 - \zeta}{1 + \zeta}.$$

Ogni funzione di f regolare nella striscia

$$0 < \psi < \pi$$

si potrà pertanto, d'or innanzi, considerare anche come funzione di ζ , *regolare entro il semicerchio*

$$|\zeta| < 1, \quad \eta > 0.$$

In particolare sarà tale la funzione ω legata a $w = u - iv$ dalla (14)

$$w = e^{-i\omega}.$$

Nel punto all'infinito a valle del moto è per ipotesi $w = 1$ ed $\omega = 0$ (§ 5); ma

ad esso corrisponde sul piano del semicerchio il punto di affissa $\zeta = -1$, perciò possiamo dire che la funzione $\omega(\zeta)$ si annulla per $\zeta = -1$.

Invece nel punto all'infinito a monte del moto, cioè per $\zeta = +1$, si ha $\omega = \alpha$.

Si è visto inoltre (§ 5) che la ω assume valori reali sulla linea libera λ rappresentata nel piano ζ dal diametro $+1, -1$ del semicerchio: ciò vuol dire che $\omega(\zeta)$ sarà reale per ζ reale.

In questa condizione di cose, il noto principio di SCHWARZ ¹¹⁾ ci assicura che la funzione $\omega(\zeta)$ è continuabile per riflessione analitica nel sottostante semicerchio.

Essa è quindi regolare in tutto il cerchio

$$|\zeta| < 1.$$

Sulla semicirconferenza $1, i, -1$ sarà ancora $\omega(\zeta)$ finita e continua, fatta eccezione per un gruppo discreto di punti, immagini dei punti angolosi della parete rigida.

Sull'altra semicirconferenza $1, -i, -1$, vale analogo comportamento, cioè quello che risulta per riflessione.

§ 7.

Espressione degli elementi geometrici e cinematici mediante ζ ed $\omega(\zeta)$.

Ragioni di convenienza analitica, che appariranno più nettamente in appresso, ci hanno consigliato di sostituire la variabile naturalmente offerta dall'indole della questione (la velocità come funzione di χ) mediante la ω come funzione della ζ .

Per conservare, in ciò che segue, il sussidio della intuizione è opportuno tener presente che, nella corrispondenza tra il semicerchio

$$|\zeta| \leq 1, \quad \eta \geq 0$$

del piano ζ , ed il campo A , sede del moto nel piano χ :

il punto 1 rappresenta il punto all'infinito a monte del moto;

l'arco di circonferenza $1, i$ rappresenta la parete rigida π_1 ;

il punto i rappresenta l'origine O ;

l'arco di circonferenza $i, -1$ rappresenta la parete rigida π_2 ;

il punto -1 rappresenta il punto all'infinito a valle del moto;

il diametro $1, -1$ rappresenta l'intera linea di pelo libero λ .

Immagine delle linee di flusso. — Una linea generica di flusso è caratterizzata dalla equazione

$$\psi(x, y) = k.$$

L'intero sistema delle linee di flusso si ottiene da essa facendovi variare la costante k

¹¹⁾ SCHWARZ, *Ueber einige Abbildungsaufgaben* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. LXX (1869), pp. 105-120]. Cfr. per es. DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. I (Paris, Gauthier-Villars, 1887), pp. 174-175.

fra 0 e π , valori limiti ai quali debbono, come è noto, far riscontro le due linee di contorno (§ 3).

La rappresentazione di una generica linea di flusso nel piano ζ può eseguirsi usufruendo convenientemente delle formole di trasformazione (15), (16') e (17). Per effettuare il calcolo nel modo più spiccio conviene introdurre le quantità \bar{f} , \bar{F} , \bar{Z} , $\bar{\zeta}$ complesse coniugate a f , F , Z , ζ e notare che valgono anche per esse quelle tre formole di trasformazione.

Essendo

$$f = \varphi + i\psi, \quad \bar{f} = \varphi - i\psi$$

e quindi

$$\psi = \frac{f - \bar{f}}{2i},$$

la equazione da trasformare è

$$f - \bar{f} = 2ki,$$

la quale in virtù della (15) si può scrivere

$$\frac{F}{\bar{F}} = e^{2ki}$$

e tenendo presenti la (16') e la (17):

$$e^{2ki} = \frac{1+Z}{1-\bar{Z}} \cdot \frac{1-\bar{Z}}{1+\bar{Z}} = \frac{1 - \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)}{1 + \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)} \cdot \frac{1 + \frac{1}{2}\left(\bar{\zeta} + \frac{1}{\bar{\zeta}}\right)}{1 - \frac{1}{2}\left(\bar{\zeta} + \frac{1}{\bar{\zeta}}\right)}.$$

Moltiplicando numeratore e denominatore del secondo membro per $-\frac{1}{4}\zeta\bar{\zeta}$ si trova

$$e^{2ki} = \frac{1 - 2\zeta + \zeta^2}{1 + 2\zeta + \zeta^2} \cdot \frac{1 + 2\bar{\zeta} + \bar{\zeta}^2}{1 - 2\bar{\zeta} + \bar{\zeta}^2}$$

ed estraendo la radice quadrata da entrambi i membri

$$\pm e^{ki} = \frac{1-\zeta}{1+\zeta} \cdot \frac{1+\bar{\zeta}}{1-\bar{\zeta}}.$$

Dei due segni si assumerà il $-$ come quello per cui l'equazione risulta soddisfatta nell'origine cioè per $k=0$ e $\zeta=i$.

Sostituendo poi a ζ ed a $\bar{\zeta}$ i loro valori

$$\zeta + i\eta \quad \text{e} \quad \bar{\zeta} - i\eta$$

e riducendo a forma intiera si ottiene:

$$-e^{ki}[1 - (\xi^2 + \eta^2) + 2i\eta] = 1 - (\xi^2 + \eta^2) - 2i\eta.$$

Eguagliando le parti reali dei due membri si ha:

$$-[1 - (\xi^2 + \eta^2)] \cos k + 2\eta \sin k = 1 - (\xi^2 + \eta^2)$$

che può scriversi

$$(19) \quad 1 - (\xi^2 + \eta^2) = 2\eta \operatorname{tg} \frac{k}{2}$$

od anche

$$\xi^2 + \left(\eta + \operatorname{tg} \frac{k}{2}\right)^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{k}{2}.$$

Tale è adunque l'equazione in coordinate cartesiane ξ ed η delle volute immagini delle linee di flusso. Come si vede queste immagini sono *circonferenze* passanti tutte per gli estremi $+1$ e -1 del diametro reale.

Di esse naturalmente ha interesse soltanto la porzione interna al semicerchio

$$|\xi| \leq 1, \quad \eta \geq 0.$$

Ad ogni valore di k compreso fra 0 e π la $\psi(x, y) = k$ fa corrispondere una ben determinata linea di corrente nel piano z , mentre la (19) determina la circonferenza sua immagine in ξ : tale circonferenza ha per centro il punto di coordinate $\xi = 0$ ed $\eta = -\operatorname{tg} \frac{k}{2}$ ¹²⁾.

In particolare per $k=0$ la (19) ci conferma che la parete rigida ha la sua immagine sulla circonferenza

$$\xi^2 + \eta^2 = 1.$$

Per $k=\pi$ invece la stessa (19) ci fornisce l'immagine della linea libera sull'asse

$$\eta = 0.$$

¹²⁾ Alle stesse conclusioni si sarebbe potuto pervenire con semplici considerazioni geometriche. Infatti, posto

$$\xi - 1 = d e^{i\beta} \quad \text{e} \quad \xi + 1 = d' e^{i\beta'}$$

e per conseguenza

$$\bar{\xi} - 1 = d e^{-i\beta} \quad \text{e} \quad \bar{\xi} + 1 = d' e^{-i\beta'},$$

la equazione generica delle linee di flusso può scriversi sotto la forma

$$-e^{ki} = \frac{e^{i\beta}}{e^{i\beta'}} \cdot \frac{e^{-i\beta'}}{e^{-i\beta}} = e^{2i\beta} e^{-2i\beta'}$$

ovvero

$$e^{(\pi+k)i} = e^{2(\beta-\beta')i},$$

da cui si ricava

$$\beta - \beta' = \frac{\pi}{2} + \frac{k}{2}.$$

Ora, d e d' essendo rispettivamente le distanze del punto generico ζ dai punti di affisse $+1$ e -1 , e β e β' essendo gli angoli che la direzione positiva dell'asse ξ forma coi raggi vettori che da quei due punti vanno al punto ζ , $\beta - \beta'$ sarà l'angolo sotto il quale dal punto ζ si vede il diametro reale; le immagini delle linee di corrente ($\beta - \beta' = \text{costante}$) sono adunque archi di circonferenze passanti per gli estremi di quel diametro.

Ed è facile riconoscere che il centro di uno qualunque di questi archi verrà individuato sull'asse η dalla retta condotta per es.: dal punto di affissa -1 ed inclinata di $-\frac{k}{2}$ sulla direzione positiva dell'asse ξ .

Posizione corrispondente ad un punto generico ζ del semicerchio. — La (7)

$$dz = \frac{df}{w}$$

che, per la (14), può essere scritta

$$dz = e^{i\omega} df$$

serve a darci il punto P del piano z corrispondente ad un generico punto ζ del semicerchio.

Differenziando infatti la (18) e riducendo si ha:

$$(20) \quad df = \frac{4 d\zeta}{\zeta^2 - 1}.$$

Siccome d'altra parte devono corrispondersi $z=0$, $f=0$, e $\zeta=i$, l'affissa z del punto P corrispondente ad un generico ζ sarà definita dall'integrale

$$(21) \quad z = \int_i^\zeta e^{i\omega} df = 4 \int_i^\zeta \frac{e^{i\omega}}{\zeta^2 - 1} d\zeta,$$

integrale che deve intendersi preso lungo un cammino qualsiasi che dal punto di affissa i , senza uscire dal semicerchio, vada al punto generico ζ considerato.

Velocità. — La (14)

$$w = u - iv = e^{-i\omega}$$

definisce senza ambiguità la velocità come funzione esplicita di ω .

Ponendo

$$(22) \quad \omega = \theta + i\tau$$

con θ e τ reali, si avrà

$$(23) \quad |w| = V = |\sqrt{u^2 + v^2}| = e^\tau$$

ed

$$(24) \quad \frac{u + iv}{V} = e^{i\theta},$$

dalle quali vien chiarito il significato tanto di θ quanto di τ .

Ed invero dalla (23) risulta che τ è il *logaritmo naturale del valore assoluto della velocità* del fluido in un punto generico z ; dalla (24) invece si deduce essere θ l'anomalia del vettore $u + iv$, cioè *l'angolo che la direzione della velocità forma colla direzione positiva dell'asse x* .

Per definire il verso in cui quest'angolo va contato, ricordiamo che fra le infinite determinazioni di cui ω è suscettibile in base alla (14), determinazioni che differiscono l'una dall'altra per multipli intieri di 2π , abbiamo convenuto di scegliere quella che si annulla nel punto all'infinito a valle del moto.

Considerazioni ovvie di continuità, unitamente alle ipotesi del § 1, ci conducono pertanto ad ammettere che θ deve nell'intero campo A esser sempre compreso fra $-\pi$ e $+\pi$ ed è da contarsi positivamente nel verso $x \rightarrow y$ a partire dalla direzione positiva dell'asse x .

Allo stesso risultato si sarebbe arrivati osservando che in virtù delle (22) si ha

$$u - iv = e^\tau (\cos \theta - i \sin \theta)$$

epperò

$$\begin{cases} u = e^{\tau} \cos \theta, \\ v = e^{\tau} \sin \theta. \end{cases}$$

Elemento d'arco. — L'espressione dell'elemento lineare del piano z cioè di

$$|dz| = |\sqrt{dx^2 + dy^2}|$$

in funzione di ζ è per la (7) e per la (23):

$$|dz| = \frac{|df|}{|w|} = e^{-\tau} |df|.$$

Curvatura di una linea di flusso. — L'angolo di contingenza lungo una linea di flusso essendo $d\theta$, si ha la formola notevole:

$$\gamma = \frac{d\theta}{|dz|} = e^{\tau} \frac{d\theta}{|df|},$$

in cui $|\gamma|$ designa la curvatura.

Equazioni della parete rigida ϖ . — Immaginando di prendere l'integrale (21)

$$z = \int_i^{\zeta} e^{i\omega} df = 4 \int_i^{\zeta} \frac{e^{i\omega}}{\zeta^2 - 1} d\zeta$$

lungo la semicirconferenza 1, i , -1 , l'affissa z andrà descrivendo la parete rigida ϖ , e precisamente percorrerà ϖ_1 ovvero ϖ_2 secondochè si farà variare ζ da i verso il punto di affissa 1 ovvero verso quello di affissa -1 .

Basterà poi separare nell'espressione di z la parte reale dall'immaginaria per avere l'espressione parametrica delle coordinate x ed y di un punto generico di ϖ .

Se si nota che sull'accennata semicirconferenza $\zeta = e^{i\sigma}$ con σ reale e compreso fra 0 e π , e che perciò

$$df = \frac{4 d\zeta}{\zeta^2 - 1} = \frac{2 d\sigma}{\sin \sigma},$$

si trova facilmente

$$z = 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\sigma} \frac{e^{i\omega} d\sigma}{\sin \sigma}.$$

Come si vede la funzione integranda tende a diventare infinita quando σ tende a 0 ovvero a π .

Se ne trae per la (22):

$$(25) \quad \begin{cases} x = 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\sigma} e^{-\tau} \frac{\cos \theta}{\sin \sigma} d\sigma, \\ y = 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\sigma} e^{-\tau} \frac{\sin \theta}{\sin \sigma} d\sigma, \end{cases}$$

dove tutto è reale.

L'espressione dell'elemento d'arco diviene

$$|d\varpi| = \frac{2 e^{-\tau}}{\sin \sigma} |d\sigma|.$$

Perciò la lunghezza dell'arco di parete rigida compreso fra l'origine ed un punto generico, situato sia su ϖ_1 che su ϖ_2 , è data dall'integrale:

$$(26) \quad \varpi = 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\sigma} \frac{e^{-\tau}}{\sin \sigma} d\sigma$$

ovvero, tenendo presente che, mentre $\sin \sigma$ è sempre positivo, $d\sigma$ è positivo o negativo secondochè σ va crescendo o decrescendo:

$$(26') \quad \begin{cases} \varpi_1 = 2 \int_{\sigma}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\tau}}{\sin \sigma} d\sigma, \\ \varpi_2 = 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\sigma} \frac{e^{-\tau}}{\sin \sigma} d\sigma. \end{cases}$$

L'espressione della curvatura in un punto di ϖ si ricava poi dalla relazione

$$\gamma = \frac{d\theta}{|d\varpi|} = \frac{1}{2} e^{\tau} \sin \sigma \left| \frac{d\theta}{d\sigma} \right|.$$

Equazioni della linea libera λ . — Il punto di affissa ζ descrive la linea libera λ dal punto all'infinito a monte al punto all'infinito a valle del moto, quando a ζ si fa percorrere l'asse reale da 1 a -1 ; allora anche df ed ω sono reali.

Indichiamo con P_0 quel punto della linea libera che ha per immagine il centro del semicerchio ($\zeta = 0$) e sia $z_0 = x_0 + iy_0$ la sua affissa. Si ha per la (21)

$$(27) \quad z_0 = 4 \int_i^0 \frac{e^{i\omega}}{\zeta^2 - 1} d\zeta.$$

Supposto preso l'integrale lungo l'asse degli immaginari puri ($\zeta = i\eta$) si trova:

$$(27') \quad z_0 = 4i \int_0^1 \frac{e^{i\omega}}{\eta^2 + 1} d\eta$$

per η reale ed ω funzione della sola η .

Ciò premesso, in un generico punto z della linea libera λ si avrà $\zeta = \xi$, epperò

$$(28) \quad z - z_0 = 4 \int_0^{\xi} \frac{e^{i\omega}}{\xi^2 - 1} d\xi$$

per ξ reale e compreso fra 1 e -1 : in vicinanza di questi due valori estremi la funzione sotto il segno tende, come è naturale, a diventare infinita.

Separando, così nella (27) come nella (28), la parte reale dall'immaginaria si otterranno assai facilmente le espressioni parametriche delle coordinate dei singoli punti di λ .

Ricordando che sulla linea libera

$$e^{\tau} = |w| = 1$$

l'elemento d'arco può esprimersi sotto la forma

$$|d\lambda| = \frac{|df|}{|w|} = |df|.$$

Ora (§ 4) mentre z percorre la linea λ nel verso del moto, dall'infinito a monte all'infinito a valle, la parte reale φ di f cresce continuamente da $-\infty$ a $+\infty$ mentre il coefficiente ψ della sua parte immaginaria si mantiene costante ed eguale a π .

Ciò equivale a dire che è

$$df = d\varphi.$$

Se perciò si riflette che in P_0 , per essere $\zeta = 0$, si ha, per la (18), $f = \pi i$, cioè $\varphi = 0$, si può concludere che la lunghezza dell'arco di linea libera compreso fra P_0 ed un punto generico P arbitrariamente scelto su λ , è misurata dal valore assoluto della φ in P stesso.

In simboli, supposto P situato a valle di P_0 si ha, in valore ed in segno:

$$\lambda = f - \pi i,$$

ossia, in virtù della stessa (18), nella quale si deve ora supporre ζ reale e compreso fra 0 e $-\infty$,

$$(29) \quad \lambda = 2 \log \frac{1 - \xi}{1 + \xi}.$$

Per un punto generico della linea libera, situato a monte di P_0 si dovrebbe nella stessa formola cambiare ξ in $-\xi$ facendo poi variare la variabile fra 0 ed 1.

Si constata facilmente che, in ogni caso, l'espressione posta sotto il segno log è essenzialmente positiva, anzi maggiore dell'unità, almeno entro i limiti di variabilità imposti alla ξ .

Perciò il secondo membro di quelle equazioni è certamente reale, anzi positivo, come del resto dev'essere, pel suo significato.

La curvatura, per le ragioni già dette a proposito dell'elemento d'arco, viene determinata, sulla linea libera, dalla relazione

$$\gamma = \frac{d\theta}{|d\lambda|} = \frac{d\theta}{|df|} = \frac{d\theta}{|d\varphi|}.$$

§ 8.

Azione dinamica sulla parete rigida.

Si indichi con $d\varpi$ un elemento del contorno rigido e con n la normale a $d\varpi$ rivolta verso l'interno del campo A .

Noi determineremo la risultante delle pressioni che sulla parete rigida ϖ agiscono nell'ipotesi che nel campo C (Fig. 2) regni una pressione costante eguale a quella p_0 che si è supposta esistere in B .

Detta risultante, trattandosi di un sistema piano, viene caratterizzata dalle due sue componenti dirette secondo gli assi:

$$R_x = \int_{\varpi} (p_0 - p) \cos(nx) d\varpi,$$

$$R_y = \int_{\varpi} (p_0 - p) \cos(ny) d\varpi$$

e dal suo momento preso rispetto all'origine:

$$M = \int_{\varpi} (p_0 - p) [x \cos(ny) - y \cos(nx)] d\varpi$$

positivo se tende a produrre rotazione attorno alla normale al piano nel verso $x \rightarrow y$, negativo nel caso opposto.

Per valutare queste 3 quantità ricordiamo anzitutto che (§ 3) lungo tutta la ϖ , come del resto in ogni punto di A , si ha

$$p = p_0 + \frac{1}{2}(1 - V^2),$$

epperò

$$p_0 - p = -\frac{1}{2}(1 - V^2).$$

Si trovano così le relazioni

$$R_x = -\frac{1}{2} \int_{\varpi} (1 - V^2) \cos(nx) d\varpi,$$

$$R_y = -\frac{1}{2} \int_{\varpi} (1 - V^2) \cos(ny) d\varpi,$$

$$M = -\frac{1}{2} \int_{\varpi} (1 - V^2) [x \cos(ny) - y \cos(nx)] d\varpi,$$

le quali mostrano che la risultante cercata dipende, com'era da prevedersi, soltanto dalle velocità delle particelle liquide che scorrono lungo la parete.

Osserviamo ora che, immaginando di percorrere ϖ in tutta la sua lunghezza nel senso del moto, sempre si ha

$$\begin{cases} d\varpi \cos(nx) = -dy, \\ d\varpi \cos(ny) = dx, \end{cases}$$

essendo dx e dy le proiezioni sugli assi dell'arco elementare $d\varpi$. Scriveremo pertanto

$$R_x = \frac{1}{2} \int_{\varpi} (1 - V^2) dy,$$

$$R_y = -\frac{1}{2} \int_{\varpi} (1 - V^2) dx,$$

$$M = -\frac{1}{2} \int_{\varpi} (1 - V^2) [x dx + y dy].$$

Posto

$$\mathbf{R} = R_x + iR_y,$$

si trova facilmente

$$(30) \quad \mathbf{R} = \frac{1}{2i} \int (1 - V^2) d\zeta,$$

l'integrale curvilineo del secondo membro intendendosi esteso all'intero contorno rigido ϖ percorso nel senso del moto.

Per le (7), (14) e (23), la (30) può scriversi

$$R = \frac{1}{2i} \int (1 - e^{2\tau}) e^{i\omega} df,$$

dove l'espressione da integrarsi è funzione di ζ epperò l'integrale va esteso, nel piano ζ , a tutta la semicirconferenza 1, i , -1 immagine della parete ∞ . Avremo pertanto sviluppando:

$$R = \frac{1}{2i} \int_{(1, i, -1)} e^{i\omega} df - \frac{1}{2i} \int_{(1, i, -1)} e^{2\tau + i\omega} df.$$

Ora è da notare che, ω essendo reale sull'asse reale, in punti coniugati ζ e $\bar{\zeta}$, la parte reale θ assume valori eguali mentre il coefficiente dell'immaginario τ assume valori eguali con segni opposti. In simboli:

$$\begin{aligned}\theta_{\zeta} &= \theta_{\bar{\zeta}}, \\ \tau_{\zeta} &= -\tau_{\bar{\zeta}}.\end{aligned}$$

Ne viene

$$2\tau_{\zeta} + i\omega_{\zeta} = \tau_{\zeta} + i\theta_{\zeta} = -\tau_{\bar{\zeta}} + i\theta_{\bar{\zeta}} = i\omega_{\bar{\zeta}},$$

e siccome sulla circonferenza $|\zeta| = 1$

$$\bar{\zeta} = e^{-i\sigma} = \frac{1}{e^{i\sigma}} = \frac{1}{\zeta},$$

così, detta $\omega\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ la funzione che si ottiene da $\omega(\zeta)$ quando in essa si muti ζ in $\frac{1}{\zeta}$, potremo ritenere, sopprimendo gli indici,

$$2\tau + i\omega = i\omega\left(\frac{1}{\zeta}\right).$$

D'altra parte l'espressione (20) di df non muta per lo scambio di ζ in $\frac{1}{\zeta}$, perciò

$$\int_{(1, i, -1)} e^{2\tau + i\omega} df = \int_{(1, i, -1)} e^{i\omega\left(\frac{1}{\zeta}\right)} df = \int_{(1, -i, -1)} e^{i\omega} df = - \int_{(-1, -i, 1)} e^{i\omega} df.$$

Sostituendo si trova l'espressione notevole:

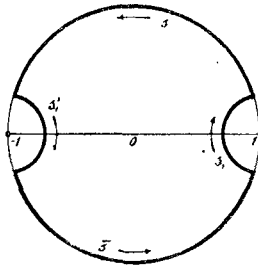
$$(30') \quad R = \frac{1}{2i} \int e^{i\omega} df = \frac{2}{i} \int \frac{e^{i\omega}}{\zeta^2 - 1} d\zeta,$$

l'integrale essendo esteso alla intiera circonferenza $|\zeta| = 1$ percorsa nel senso diretto $x \rightsquigarrow y$.

Ora la funzione sotto il segno [che per le (7) e (14) non è altro che $d\chi$] è finita e continua per χ finito, cioè *in tutto il cerchio contorno compreso* esclusi soltanto i due punti $\zeta = +1$ e $\zeta = -1$ nei quali essa presenta due punti singolari o, più precisamente, due poli semplici.

Escludiamo per un momento questi due punti mediante due archi di cerchio aventi i punti stessi per centri e raggi eguali rispettivamente a ρ_1 ed a ρ'_1 (grandezze arbitrarie purchè sufficientemente piccole).

Indicando (Fig. 5) rispettivamente con s_1 e con s'_1 gli archi di quei due cerchietti interni al campo $|\zeta| \leq 1$ e con s ed \bar{s} le due porzioni del cerchio $|\zeta| = 1$ esterne a



(Fig. 5).

quei cerchietti, ed applicando al nuovo contorno $s_1 + s + s'_1 + \bar{s}$, percorso nel verso positivo di rotazione, il teorema di CAUCHY, si ha evidentemente

$$\int_{s_1 + s + s'_1 + \bar{s}} \frac{e^{i\omega}}{\zeta^2 - 1} d\zeta = 0,$$

cioè

$$\int_{s + \bar{s}} \frac{e^{i\omega}}{\zeta^2 - 1} d\zeta = - \int_{s_1} \frac{e^{i\omega}}{\zeta^2 - 1} d\zeta - \int_{s'_1} \frac{e^{i\omega}}{\zeta^2 - 1} d\zeta$$

e passando al limite, per ρ_1 e ρ'_1 tendenti a zero,

$$\int_{|\zeta|=1} \frac{e^{i\omega}}{\zeta^2 - 1} d\zeta = - \lim_{\rho_1=0} \int_{s_1} \frac{e^{i\omega}}{\zeta^2 - 1} d\zeta - \lim_{\rho'_1=0} \int_{s'_1} \frac{e^{i\omega}}{\zeta^2 - 1} d\zeta.$$

Ora si verifica facilmente che

$$- \lim_{\rho_1=0} \int_{s_1} \frac{e^{i\omega(\zeta_1)}}{\zeta^2 - 1} d\zeta = \frac{i\pi}{2} e^{i\omega(+1)} = \frac{i\pi}{2} e^{i\alpha}$$

e che

$$- \lim_{\rho'_1=0} \int_{s'_1} \frac{e^{i\omega(\zeta'_1)}}{\zeta^2 - 1} d\zeta = - \frac{i\pi}{2} e^{i\omega(-1)} = - \frac{i\pi}{2}.$$

Perciò

$$\int_{|\zeta|=1} \frac{e^{i\omega}}{\zeta^2 - 1} d\zeta = \frac{i\pi}{2} (e^{i\alpha} - 1)$$

e finalmente sostituendo

$$(31) \quad R = \pi (e^{i\alpha} - 1),$$

la quale mette in evidenza che: *grandezza e direzione della risultante delle pressioni trasmesse dal liquido alla parete rigida non dipendono dalla forma di questa parete ma soltanto dall'angolo α formato dai due assintoti r_1 ed r_2 .*

Risultato questo che concorda perfettamente colle opinioni più recenti ed accreditate fra gli idraulici: i quali anzi accettano correntemente quello stesso valore della risultante R che risulta dalla (31), o meglio dalla sua equivalente:

$$(31') \quad R = \left(2\pi \sin \frac{\alpha}{2} \right) i e^{i \frac{\alpha}{2}}.$$

Senonchè questo argomento, la cui importanza specie nella teoria delle macchine idrauliche non sfugge certamente ad alcuno, viene per lo più trattato soltanto limitatamente a qualche caso particolarissimo ed in base a procedimenti sui quali possono sollevarsi dubbi non lievi ¹³⁾.

La dimostrazione qui esposta sembra per contro conferire ai risultati in questione tutta la generalità ed al tempo stesso tutto il rigore desiderabile.

§ 9.

Comportamento di $\omega(\zeta)$ nei punti angolosi.

Sia ζ_h l'affissa di un punto del semicerchio I, $i, -i$, immagine di un punto angoloso P_h della parete ϖ , e σ_h la sua anomalia, per modo che si abbia

$$\zeta_h = e^{i\sigma_h}.$$

Per $\zeta = \zeta_h$ la funzione $\omega(\zeta) = \theta + i\tau$ non può conservarsi finita (§ 5). Il modo con cui essa diventa infinita non è però accessibile all'intuizione diretta: lo è invece l'andamento della parte reale θ , il che basta, come ora mostreremo, a caratterizzare la natura della singolarità.

Sia θ'_h l'angolo che la tangente in P_h alla parete rigida immediatamente a monte di P_h , presa, s'intende, nel senso del flusso, forma colla direzione positiva dell'asse x ; e similmente sia θ''_h l'angolo che colla stessa direzione forma la tangente in P_h stesso alla parete rigida immediatamente a valle di esso.

Tenendo presente il significato di θ (§ 7), abbiamo senz'altro

$$(32) \quad \begin{cases} \lim \theta = \theta'_h, & \text{per } \zeta \text{ tendente a } \zeta_h \text{ lungo l'arco I, } \zeta_h, \\ \lim \theta = \theta''_h, & \text{per } \zeta \text{ tendente a } \zeta_h \text{ lungo l'arco } -\text{I, } \zeta_h. \end{cases}$$

La simmetria implica poi una discontinuità nel punto

$$\bar{\zeta}_h = e^{-i\sigma_h}$$

e precisamente si ha

$$(32') \quad \begin{cases} \lim \theta = \theta'_h, & \text{per } \zeta \text{ tendente a } \bar{\zeta}_h \text{ lungo l'arco I, } \bar{\zeta}_h, \\ \lim \theta = \theta''_h, & \text{per } \zeta \text{ tendente a } \bar{\zeta}_h \text{ lungo l'arco } -\text{I, } \bar{\zeta}_h. \end{cases}$$

Ciò deve naturalmente ripetersi per tutti i punti della semicirconferenza I, $i, -i$, immagini dei punti angolosi della parete rigida nonchè pei loro simmetrici della semicirconferenza I, $-i, i$.

Ma, in ogni altro punto della circonferenza $|\zeta| = 1$, $\theta(\zeta)$ deve riguardarsi come funzione continua, dotata di derivata pure continua (perchè in ogni punto non angoloso di ϖ la curvatura si suppone finita e continua).

Essa è inoltre [come parte reale della $\omega(\zeta)$, regolare entro il cerchio e reale sul-

¹³⁾ Cfr. per es.: PFARR, l. c. ⁸⁾, pag. 10 e 96.

l'asse reale] armonica entro il cerchio $|\zeta| < 1$ e simmetrica rispetto all'asse reale $[\theta(\zeta) = \theta(\bar{\zeta})]$.

§ 10.

Integrale generale del moto.

Sia θ_0 una particolare funzione armonica soddisfacente a tutte quelle condizioni qualitative a cui, come si è visto nel paragrafo precedente, la θ deve soddisfare. Sia τ_0 la sua associata, la costante additiva intendendosi presa in modo che τ_0 si annulli nell'origine. Sarà

$$\omega_0 = \theta_0 + i\tau_0$$

la corrispondente funzione della variabile complessa $\zeta = \xi + i\eta$.

Le relazioni

$$\frac{\partial \theta_0}{\partial \xi} = \frac{\partial \tau_0}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \theta_0}{\partial \eta} = -\frac{\partial \tau_0}{\partial \xi},$$

tenendo conto che θ_0 è funzione pari di η , danno

$$\tau_0(\xi, -\eta) = -\tau_0(\xi, \eta) + \text{costante}$$

e, siccome τ_0 si annulla per $\xi = \eta = 0$, così essa risulta funzione dispari di η e quindi ω_0 reale sull'asse reale.

Posto

$$\Theta = \theta_0 - \theta,$$

la differenza Θ si mantiene evidentemente *continua su tutta la circonferenza* $|\zeta| = 1$; essa si annulla in particolare in tutti i punti come ζ_h e $\bar{\zeta}_h$.

È chiaro inoltre che essa deve dar luogo ad un'associata

$$T = \tau_0 - \tau$$

funzione dispari di η , continua anch'essa senza restrizione su $|\zeta| = 1$; si ha perciò in definitiva

$$(33) \quad \omega = \omega_0 - \Omega,$$

essendo

$$\Omega = \Theta + iT$$

una funzione della variabile complessa ζ , reale sull'asse reale e regolare entro il cerchio $|\zeta| < 1$ al pari di ω e ω_0 , ma avente sopra di esse il vantaggio di restare finita e continua anche sulla circonferenza.

Dacchè mediante $\omega(\zeta)$ rimangono definiti, come abbiamo visto, tutti gli elementi del moto, si può dire che la (33) *costituisce l'integrale generale della classe di problemi considerati; la funzione*

$$(34) \quad \Omega = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \zeta^n,$$

dove le c_n sono costanti reali e la serie converge entro e sopra la circonferenza $|\zeta| = 1$, ne mette nettamente in evidenza il grado di arbitrarietà.

La condizione che la parte reale Θ di Ω si annulli per $\zeta = \zeta_b$ e per $\zeta = \bar{\zeta}_b$, porta manifestamente fra le c_n il vincolo espresso dall'equazione

$$(35) \quad \Theta = \sum_{n=0}^{n=\infty} c_n \cos n \sigma_b = 0.$$

Si otterranno così tante condizioni quanti sono i punti angolosi della parete rigida ϖ .

Indipendentemente poi dall'esistenza o meno dei punti angolosi, le c_n dovranno soddisfare ad alcune altre condizioni derivanti dalle ipotesi fatte nel § 1.

E precisamente, la condizione che $\omega(\zeta)$ si annulli per $\zeta = -1$ (cioè nel punto immagine del punto all'infinito a valle del moto dove $w = 1$), conduce alla relazione

$$(36) \quad \begin{aligned} &\omega_0(-1) - \Omega(-1) = 0, \\ &\sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n c_n = \omega_0(-1). \end{aligned}$$

E similmente, dovendo $\omega(\zeta)$ diventare eguale ad α per $\zeta = 1$ (cioè nel punto immagine del punto all'infinito a monte del moto, là dove la velocità ha grandezza unitaria e forma colla direzione positiva dell'asse x l'angolo α , epperò $w = e^{-i\alpha}$), dovrà essere

$$(37) \quad \begin{aligned} &\omega_0(1) - \Omega(1) = \alpha, \\ &\sum_{n=0}^{n=\infty} c_n = \omega_0(1) - \alpha. \end{aligned}$$

§ 11.

Parete rigida senza punti angolosi.

In assenza di punti angolosi su ϖ , epperò di punti singolari per la $\omega(\zeta)$ sulla circonferenza $|\zeta| = 1$, si può evidentemente assumere semplicemente

$$\omega_0(\zeta) = 0,$$

con che le (33) e (34) ci danno l'integrale generale dei moti su parete rigida *curvilinea* sotto la forma:

$$(38) \quad \omega = - \sum_{n=0}^{n=\infty} c_n \zeta^n,$$

le costanti reali c_n essendo fra loro legate dalle due equazioni di condizione:

$$(39) \quad \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n c_n = 0,$$

$$(40) \quad \sum_{n=0}^{n=\infty} c_n = -\alpha.$$

Se, per fare l'ipotesi più semplice, si suppongono nulle tutte le c_n da $n = 2$ ad $n = \infty$ si ha

$$\omega = c_0 + c_1 \zeta$$

o meglio, per le (39) e (40):

$$(41) \quad \omega = \frac{\alpha}{2}(1 + \zeta),$$

la quale dà luogo ad un caso particolare per ogni valore di α .

Per $\alpha = 0$, $\omega = 0$ epperò $\theta = 0$ e $\tau = 0$ in ogni punto del campo A : si trova così un moto traslatorio uniforme: la parete rigida e la linea libera sono entrambe rettilinee e parallele.

Qualunque sia poi α , si trova facilmente che la grandezza della velocità delle particelle fluide (che sulla linea libera si mantiene costantemente eguale all'unità) varia invece lungo la parete rigida tra 1 ed $e^{\frac{\alpha}{2}}$ ¹⁴⁾, valore che essa raggiunge in corrispondenza dell'origine O , là dove la parete fa colla direzione positiva dell'asse x un angolo precisamente eguale ad $\frac{\alpha}{2}$.

Una giudiziosa applicazione delle (25) e (28) permetterebbe evidentemente di determinare con rigore la forma delle linee di contorno.

§ 12.

Parete rigida con un punto angoloso nell'origine O .

Indichiamo con θ' e con θ'' rispettivamente gli angoli che le due tangenti in O alle due pareti rigide ϖ_1 ed ϖ_2 , prese s'intende nel senso del flusso, formano colla direzione positiva dell'asse x .

Tenuto presente che all'origine O del piano ζ corrisponde sul semicerchio $|\zeta| \leq 1$, $\eta \geq 0$ il punto di affissa i , le (32) e (32') diventano:

$$\begin{cases} \lim \theta = \theta' & \text{per } \zeta \text{ tendente ad } i & \text{lungo l'arco } 1, i, \\ \lim \theta = \theta'' & \text{per } \zeta \text{ tendente ad } i & \text{lungo l'arco } -1, i, \\ \lim \theta = \theta' & \text{per } \zeta \text{ tendente a } -i & \text{lungo l'arco } 1, -i, \\ \lim \theta = \theta'' & \text{per } \zeta \text{ tendente a } -i & \text{lungo l'arco } -1, -i. \end{cases}$$

Ad esse si soddisfa evidentemente supponendo che θ_0 abbia il valore costante θ' sull'arco $-i, 1, i$ ed il valore pure costante θ'' sull'arco rimanente $i, -1, -i$.

Per formare la ω_0 corrispondente giova partire dalla funzione ¹⁵⁾

$$\frac{1}{i} \log \frac{\zeta - i}{\zeta + i}$$

anzi più precisamente da quel ramo di essa, uniforme e regolare entro la circonferenza

¹⁴⁾ Se son verificate le ipotesi del § 1 si ha $\alpha < 0$ epperò $e^{\frac{\alpha}{2}} < 1$; sulla parete *concava* la velocità si mantiene ovunque minore dell'unità.

¹⁵⁾ Cfr. LEVI-CIVITA, l. c. ¹⁾, § 10.

$|\zeta| = 1$, che si riduce per $\zeta = 0$ ad

$$\frac{1}{i} \log(-1) = \pi.$$

La parte reale θ^* di una tale funzione altro non è che l'angolo $-i, \zeta, i$, ovvero, per essere più esatti, la misura, compresa fra 0 e 2π , di tale angolo contato a partire dal lato ζi nel verso $\zeta \rightarrow \eta$.

Ovvie considerazioni di geometria elementare mostrano che, sull'arco $-i, 1, i$, si ha:

$$\theta^* = \frac{3\pi}{2},$$

mentre che sull'arco rimanente $-i, -1, i$ si ha:

$$\theta^* = \frac{\pi}{2}.$$

La funzione è poi reale sull'asse reale perchè la sua espressione non muta cambiandovi i in $-i$.

Sottraendo π , la funzione diviene

$$\frac{1}{i} \log \frac{\zeta - i}{\zeta + i} - \pi = \frac{1}{i} \log \frac{\zeta - i}{\zeta + i} - \frac{1}{i} \log(-1) = \frac{1}{i} \log \frac{i - \zeta}{i + \zeta},$$

ovvero anche

$$-i \log \frac{1 + i\zeta}{1 - i\zeta},$$

la cui parte reale prende sull'arco $-i, 1, i$ il valore $\frac{\pi}{2}$ e sull'arco rimanente $-i, -1, i$ il valore $-\frac{\pi}{2}$.

Moltiplicando la funzione per $\frac{\theta' - \theta''}{\pi}$, questi due valori della parte reale divengono rispettivamente $\frac{\theta' - \theta''}{2}$ e $\frac{\theta'' - \theta'}{2}$. Dopo ciò è manifesto che

$$(42) \quad \omega_0 = \frac{\theta' + \theta''}{2} - i \frac{\theta' - \theta''}{\pi} \log \frac{1 + i\zeta}{1 - i\zeta},$$

dove il logaritmo ha la determinazione che si riduce a zero per $\zeta = 0$, soddisfa alle condizioni imposte, epperò è la funzione cercata.

L'integrale generale (33), nel caso in cui la parete rigida presenta un solo punto angoloso col quale si è fatta coincidere l'origine delle coordinate, diviene pertanto

$$(43) \quad \omega = \frac{\theta' + \theta''}{2} - i \frac{\theta' - \theta''}{\pi} \log \frac{1 + i\zeta}{1 - i\zeta} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n \zeta^n,$$

le c_n dovendo soddisfare a quelle relazioni che si ottengono dalle (35), (36) e (37) ponendo nella prima

$$\sigma_h = \frac{\pi}{2},$$

nella seconda

$$\omega_0(-1) = \theta'',$$

e nella terza

$$\omega_0(1) = \theta'.$$

Si trovano così le tre equazioni di condizione:

$$(44) \quad \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n c_{2n} = 0,$$

$$(45) \quad \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n c_n = \theta'',$$

$$(46) \quad \sum_{n=0}^{n=\infty} c_n = \theta' - \alpha.$$

§ 13.

Parete rigida poligonale.

Per $\theta' = \alpha$ e $\theta'' = 0$ le (44), (45) e (46) risultano certamente soddisfatte supponendo le c_n tutte nulle, cioè facendo

$$(47) \quad \omega = \frac{\alpha}{2} - i \frac{\alpha}{\pi} \log \frac{1 + i\zeta}{1 - i\zeta}.$$

Sui due archi $1, i$ ed $i, -1$ che corrispondono rispettivamente alle due porzioni π_1 ed π_2 di parete, la parte reale θ di ω assume, per costruzione, i valori costanti α e 0 .

Ora θ rappresenta, per qualsiasi linea di flusso, ed in particolare per π_1 ed π_2 , l'inclinazione della tangente generica sull'asse delle x . Ne viene che quelle due porzioni di parete sono rettilinee, inclinata la prima dell'angolo α sull'asse x , l'altra parallela anzi coincidente con quest'asse.

Il moto su parete rigida bilatera definito dalla (47) non è altro del resto che il più semplice caso particolare di moti su parete rigida poligonale qualunque, moti al cui integrale generale si arriva facilmente riprendendo, sotto forma un po' più generale, il ragionamento del paragrafo precedente.

Tenuto presente ancora una volta il significato di θ , si vede infatti che la funzione ω deve definire un moto su parete rigida poligonale quando e solo quando la sua parte reale assuma valori costanti $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n$ sugli archi $1\zeta_1, \zeta_1\zeta_2, \zeta_2\zeta_3, \dots, \zeta_{n-1} - 1$ in cui certi punti $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \dots, \zeta_{n-1}$ dividono la semicirconferenza $1, i, -1$.

S'intende che sulla semicirconferenza $1, -i, -1$ la ω deve presentare il comportamento che risulta per riflessione.

È facile costruire una funzione ω_0 , la cui parte reale θ_0 soddisfi a cosiffatte condizioni, partendo dalla funzione ¹⁶⁾

$$f_b(\zeta) = \frac{1}{i} \log \frac{\zeta_b - \zeta}{\zeta_b + \zeta},$$

¹⁶⁾ Cfr. CISOTTI, l. c. ²⁾, § 12.

dove, detta σ_b l'anomalia del punto singolare ζ_b , si ha

$$\zeta_b = e^{i\sigma_b} \quad \text{e} \quad \bar{\zeta}_b = e^{-i\sigma_b}.$$

S'intende che, al solito, della $f_b(\zeta)$ noi prendiamo a considerare soltanto quel ramo, uniforme e regolare entro la circonferenza $|\zeta| = 1$, che per $\zeta = 0$ si riduce ad

$$f_b(0) = \frac{1}{i} \log \frac{\zeta_b}{\bar{\zeta}_b} = 2\sigma_b.$$

La parte reale di $f_b(\zeta)$ non è altro, come già sappiamo, che l'angolo $\bar{\zeta}_b, \zeta, \zeta_b$, ovvero, per essere più esatti, la misura, compresa tra 0 e 2π , di tale angolo contato a partire dal lato $\zeta\zeta_b$ nel verso $\xi \rightarrow \eta$. Sull'arco $\bar{\zeta}_b, 1, \zeta_b$ questa parte reale vale perciò costantemente

$$\pi + \sigma_b,$$

mentrechè sull'arco rimanente $\zeta_b, -1, \bar{\zeta}_b$ essa si mantiene eguale a

$$\sigma_b.$$

La funzione è poi reale sull'asse reale perchè la sua espressione rimane inalterata cambiandovi i in $-i$ (il che implica che si cambi in essa ζ_b in $\bar{\zeta}_b$).

Ciò premesso, sottraendo da $f_b(\zeta)$ la quantità $\sigma_b + \frac{\pi}{2}$ si ottiene una funzione

$$\frac{1}{i} \log \frac{\zeta_b - \zeta}{\bar{\zeta}_b - \zeta} - \left(\sigma_b + \frac{\pi}{2} \right) = -i \log \left(i \frac{\zeta - \zeta_b}{1 - \zeta\bar{\zeta}_b} \right)$$

la cui parte reale assume, su quei due stessi archi, rispettivamente i valori $\frac{\pi}{2}$ e $-\frac{\pi}{2}$.

Posto perciò

$$(48) \quad g_b(\zeta) = \frac{2i}{\pi} \log \left(i \frac{\zeta - \zeta_b}{1 - \zeta\bar{\zeta}_b} \right),$$

potremo dire che la parte reale di $g_b(\zeta)$ assume sull'arco $\bar{\zeta}_b, 1, \zeta_b$ il valore costante -1 e sull'arco rimanente $\zeta_b, -1, \bar{\zeta}_b$ il valore costante $+1$.

Si potrà scrivere perciò

$$(49) \quad \omega_0 = \sum_{b=1}^{h=n-1} c_b g_b(\zeta) + c$$

ove si determinino convenientemente le n costanti reali c .

Ed invero, affinchè sull'arco $1, \zeta_1$ (e quindi anche sull'arco $1, \bar{\zeta}_1$) la parte reale di ω_0 assuma valore costante ed eguale a θ_1 è necessario e sufficiente che sia

$$(50) \quad c - \sum_{b=1}^{h=n-1} c_b = \theta_1$$

poichè le parti reali della $g_b(\zeta)$ assumono tutte, lungo quell'arco, il valore -1 .

Similmente, osservando che sull'arco ζ_1, ζ_2 (e quindi anche sull'arco $\bar{\zeta}_1, \bar{\zeta}_2$) la parte reale di $g_1(\zeta)$ assume il valore $+1$ mentre le parti reali di tutte le altre $g_b(\zeta)$ si mantengono eguali a -1 , si dovrà concludere che, affinchè sull'arco stesso la parte reale

di ω_0 assuma valore costante ed eguale a θ_2 occorre e basta che si abbia

$$c + c_1 - \sum_{h=2}^{h=n-1} c_h = \theta_2.$$

In generale si potrà dire che condizione necessaria e sufficiente affinchè la parte reale di ω_0 assuma il valore costante θ_j sull'arco $\zeta_{j-1}\zeta_j$ (e sull'arco $\bar{\zeta}_{j-1}\bar{\zeta}_j$) è che sia

$$(51) \quad c + \sum_{h=1}^{h=j-1} c_h - \sum_{h=j}^{h=n-1} c_h = \theta_j.$$

Infine la parte reale di ω_0 diverrà θ_n sull'arco $\zeta_n, -1$ (nonchè sull'arco $\bar{\zeta}_n, -1$) se, e solo se:

$$(52) \quad c + \sum_{h=1}^{h=n-1} c_h = \theta_n.$$

Facendo variare nella (51) j da 2 ad $n-1$, si ottengono $n-2$ equazioni, le quali insieme alla (50) ed alla (52) determinano i valori delle n costanti c .

Osserviamo infatti che dalle (50) e (52) si ricava

$$(53) \quad c = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_n)$$

e che inoltre, per le (51), si trovano successivamente

$$c_1 = \frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1),$$

$$c_2 = \frac{1}{2}(\theta_3 - \theta_2),$$

$$\dots\dots\dots$$

epperò più generalmente

$$(54) \quad c_h = \frac{1}{2}(\theta_{h+1} - \theta_h)$$

per h variabile da 1 ad $n-1$.

Sostituendo nella (49) i valori dati dalle (48), (53), e (54), l'integrale generale (33) diventa

$$\omega = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_n) + \frac{i}{\pi} \sum_{h=1}^{h=n-1} (\theta_{h+1} - \theta_h) \log \left(i \frac{\zeta - \zeta_h}{1 - \bar{\zeta} \bar{\zeta}_h} \right) - \Omega.$$

Volendo limitarci al caso di pareti *poligonal*i dovremo anche qui porre

$$\Omega = 0$$

supponendo nulle tutte le c_n ciò che non contraddice alle (35), (36) e (37) quando siano

$$(55) \quad \begin{cases} \theta_1 = \alpha, \\ \theta_n = 0. \end{cases}$$

L'integrale generale dei moti su parete rigida poligonale assume allora la forma

$$(56) \quad \omega = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_n) + \frac{i}{\pi} \sum_{h=1}^{h=n-1} (\theta_{h+1} - \theta_h) \log \left(i \frac{\zeta - \zeta_h}{1 - \bar{\zeta} \bar{\zeta}_h} \right).$$

Le (55) impongono semplicemente che siano rispettate le condizioni di assintoticità che nella parete rigida noi abbiamo presupposte fin dal principio della trattazione (§ 1).

È appena necessario far notare che facendo nella (56)

$$n = 2 \quad \text{e} \quad \zeta_1 = i$$

si ritrova la (47) relativa alla parete rigida bilatera con vertice nell'origine O .

§ 14.

Contorni simmetrici.

Supponiamo che la parete rigida π ammetta un asse di simmetria. È facile dimostrare che *rispetto a quest'asse deve risultare simmetrico l'intero sistema delle linee di corrente*.

Ed invero, per ciò che si è detto nei §§ 2 e 3, il potenziale di velocità φ viene, nel campo A del moto, completamente determinato quando si imponga:

1°) che nell'intero campo sia verificata l'equazione di LAPLACE

$$\Delta_2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0;$$

2°) che, soddisfatte essendo le solite condizioni all'infinito, si abbia

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$$

così sulla parete rigida π , data, come sulla linea libera λ , caratterizzata ulteriormente dalla relazione

$$V = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 = 1;$$

3°) che, infine, in un dato punto, per esempio nell'origine O delle coordinate, sia

$$\varphi = 0.$$

Ora è evidente che la funzione $-\varphi$, definita come la φ in tutto il campo A , soddisfa essa pure alle stesse condizioni al finito, epperò può assumersi come potenziale di velocità di un moto liquido svolgentesi in quel medesimo campo colla stessa parete rigida, colla medesima linea libera, *colle identiche linee di corrente*.

Siccome però le componenti della velocità in ogni punto del campo, ed in particolare nei punti all'infinito, cambiano di segno col cambiare del segno della funzione φ , il nuovo moto deve avvenire in senso inverso al dato.

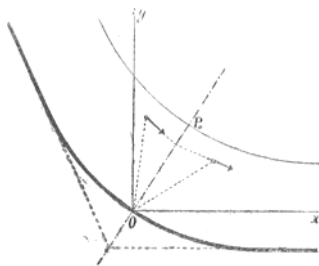
Se la parete rigida π ammette un asse di simmetria, gli elementi determinanti (parete e velocità assintotiche) del moto che ha $-\varphi$ per potenziale di velocità sono i simmetrici, rispetto a quell'asse, degli elementi corrispondenti relativi al moto di potenziale φ , quindi l'intero sistema delle linee di corrente relative al nuovo moto deve ottenersi dal sistema delle linee di corrente del moto dato per simmetria rispetto a quell'asse.

Ma le primitive linee di corrente altro non essendo che le nuove percorse in senso

inverso, la cosa non può verificarsi se esse non ammettono quella retta per asse di simmetria, il che è quanto ci eravamo proposti di dimostrare ¹⁷⁾.

Ma si può dire di più: quest'asse, rispetto a cui ciascuna linea di corrente deve esser simmetrica, dovrà tagliare ortogonalmente ogni tal linea, epperò necessariamente farà parte del sistema delle traiettorie ortogonali (linee equipotenziali), cioè avrà un'equazione della forma

$$\varphi = \text{costante}.$$



(Fig. 6).

Supporremo, ciò che al solito non toglie generalità alla trattazione, che esso passi per l'origine, o, ciò che torna lo stesso, che si sia assunta come origine l'intersezione di quest'asse colla parete rigida. Sarà allora in ogni punto di esso:

$$\varphi = 0.$$

Perciò, nella corrispondenza fra il piano z ed il piano f , all'asse di simmetria deve corrispondere l'asse ψ degli immaginari puri.

¹⁷⁾ Nei vari problemi di idrodinamica che, coll'aiuto della teoria delle funzioni di variabile complessa, erano stati in passato risolti dai Proff. LEVI-CIVITA e CISOTTI si era presentata sempre, quale caso particolare, la possibilità di una simmetria rispetto ad una linea di corrente rettilinea.

Le grandezze determinatrici del fenomeno si presentavano allora tali che, in punti simmetrici rispetto a quella retta, i parametri scalari assumevano valori eguali, i vettori determinazioni simmetriche; si poteva perciò affermare senz'altro che l'intero fenomeno doveva svolgersi con legge di simmetria rispetto a quell'asse: qualunque scalare spettante al fenomeno doveva assumere valori identici in punti simmetrici, qualunque vettore determinazioni simmetriche.

Il problema che stiamo trattando non soddisfa invece a simili condizioni: ogni eventuale asse di simmetria della parete non può far parte del sistema delle linee di corrente, e le velocità limiti, le quali insieme alla forma del profilo rigido, servono a caratterizzare il fenomeno, non possono in nessun caso essere simmetriche rispetto a quell'asse.

Si presenta cioè qui, come possibile, soltanto un caso di *emisimmetria*, cioè una simmetria geometrica accompagnata da simmetria con inversione di senso nelle velocità.

Che l'emisimmetria degli elementi determinanti del moto portasse con sé come necessaria conseguenza un'analoga emisimmetria dell'intero fenomeno, non era più pertanto un fatto per sé stesso evidente; la breve dimostrazione che ne abbiamo data sembra però sufficiente ad eliminare ogni dubbio in proposito.

Nell'intervallo di tempo trascorso tra la compilazione e la stampa di questa Memoria, il problema venne da me ripreso e trattato, sotto un punto di vista assai più generale, in una breve Nota: *Sopra un caso di emisimmetria che si presenta in certe questioni di Idrodinamica* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XX, 1° semestre 1911, pp. 322-324].

Che se poi si passa dal piano f al piano ζ si deve trovare come immagine di quella retta lo stesso asse immaginario del semicerchio.

A punti del piano ζ simmetrici rispetto a quella retta vengono a corrispondere così in f come in ζ punti simmetrici rispetto all'asse immaginario.

Ciò premesso, ritornando a considerare il campo A del moto, osserviamo che, in punti di esso corrispondenti in quella simmetria, la velocità deve essere la stessa in valore assoluto, egualmente inclinata sull'asse di simmetria (o, ciò che fa lo stesso, sulle due rette direttrici r_1, r_2 , simmetriche alla lor volta rispetto allo stesso asse), ma diretta in senso opposto a quello che dalla legge di simmetria sarebbe richiesto.

In altri termini:

il coefficiente τ della parte immaginaria della funzione ω deve assumere, in punti del semicerchio $|\zeta| \leq 1$, $\eta \geq 0$ simmetrici rispetto all'asse η , valori eguali;

la parte reale della stessa funzione deve, nei medesimi punti, prendere valori come 0 ed $\alpha - \theta$ (α essendo la solita costante già definita nel § 8).

Queste due condizioni si possono simultaneamente esprimere dicendo che la funzione

$$i\left(\omega - \frac{\alpha}{2}\right)$$

considerata come funzione di ζ assume valori coniugati in punti simmetrici rispetto all'asse immaginario, cioè per valori ζ e $-\bar{\zeta}$ dell'argomento: in particolare essa si mantiene reale per ζ puramente immaginario.

Tenendo conto che $\omega - \frac{\alpha}{2}$ è in ogni caso reale per ζ reale, ciò può anche esprimersi dicendo che:

$$\omega - \frac{\alpha}{2} \text{ è funzione dispari di } \zeta.$$

Infatti nell'interno del cerchio $|\zeta| = 1$ la funzione in questione è regolare epperò può svilupparsi in una serie di potenze i cui coefficienti sono reali perchè la funzione deve mantenersi reale per ζ reale. Condizione necessaria e sufficiente affinchè una tal funzione risulti immaginaria per ζ immaginario puro è che si annullino tutti i coefficienti delle potenze pari.

D'altronde in tali ipotesi si ha evidentemente:

$$i\left[\omega(-\bar{\zeta}) - \frac{\alpha}{2}\right] = -i\left[\omega(\bar{\zeta}) - \frac{\alpha}{2}\right] = \overline{i\left[\omega(\zeta) - \frac{\alpha}{2}\right]} \quad \text{C. D. D.}$$

Affatto ovvie sono le semplificazioni che si vengono così ad introdurre nelle formule dei paragrafi precedenti.

Così per es.: nella (43) rappresentante un moto generico su parete curvilinea dotata di un punto angoloso nell'origine, si dovrà, in caso di simmetria, supporre

$$\theta' + \theta'' = \alpha$$

dopo di che si potranno soddisfare le condizioni testè trovate annullando tutte le c_n di posto pari.

L'integrale generale dei moti simmetrici su parete dotata di un punto angoloso nell'origine assume pertanto la forma

$$(57) \quad \omega = \frac{\alpha}{2} - i \frac{\theta' - \theta''}{\pi} \log \frac{1 + i\zeta}{1 - i\zeta} - \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \zeta^{2n+1},$$

le c_{2n+1} restando vincolate dall'unica relazione

$$(58) \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} = \theta' - \alpha = -\theta''.$$

Per

$$\theta' = \theta'' = \frac{\alpha}{2}$$

si trova l'integrale generale dei moti simmetrici su parete rigida priva di punti angolosi

$$(59) \quad \omega = \frac{\alpha}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \zeta^{2n+1},$$

dove

$$(60) \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} = -\frac{\alpha}{2},$$

quale si sarebbe potuto dedurre direttamente dalla (38) tenute presenti le (39) e (40).

In particolare possiamo ora affermare che alla classe dei moti simmetrici appartiene il caso definito dalla (41).

Per

$$\theta' = \alpha \quad \text{e} \quad \theta'' = 0$$

con le c_{2n+1} tutte eguali a zero, si ritrova invece l'integrale (47) dei moti su parete bilatera

$$\omega = \frac{\alpha}{2} - i \frac{\alpha}{\pi} \log \frac{1 + i\zeta}{1 - i\zeta}.$$

Similmente si potrebbero assai facilmente studiare le forme simmetriche dei moti su parete rigida poligonale tenendo presente che per esse dovrebbero risultare soddisfatte le seguenti condizioni:

$$(61) \quad \begin{cases} \sigma_b + \sigma_{n-b} = \pi \\ \theta_b + \theta_{n-b+1} = \alpha \end{cases} \quad \left(\text{per } n \text{ pari e } b = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} \right).$$

§ 15.

Comportamento nei punti angolosi.

A base di questa trattazione, noi abbiamo ammesso che la velocità delle particelle fluide, in generale diversa da zero, si annullasse nei punti angolosi della parete rigida ω , (§ 1, e), e ciò allo scopo di rendere ovunque, punti singolari compresi, il moto continuo ¹⁸⁾. Vogliamo ora giustificare l'ipotesi *a posteriori* mostrando come ad essa si

¹⁸⁾ È da notarsi che alla medesima ipotesi si è anche condotti dalle proprietà generali della rappresentazione conforme. Cfr. per es.: A. KORN, *Lehrbuch der Potentialtheorie*, Band II (Leipzig, Dümmler, 1901), pp. 211-233, ovvero: LEVI-CIVITA, *Sopra un problema di elettrostatica che si è presentato nella costruzione dei cavi* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XX (1905), pp. 173-228].

sia inevitabilmente condotti anche quando si vogliano considerare quei punti angolosi come casi limiti di punti ordinari nei quali la curvatura cresca indefinitamente.

Riprenderemo, a questo fine, in esame il moto su parete rigida bilatera definito dalla (47)

$$\omega = \frac{\alpha}{2} - i \frac{\alpha}{\pi} \log \frac{1+i\zeta}{1-i\zeta}$$

e dimostreremo, in primo luogo, che la funzione

$$(62) \quad \omega = \frac{\beta}{2} + \frac{2\alpha}{\pi} \sum_{n=0}^{n=r} (-1)^n \frac{\zeta^{2n+1}}{2n+1}$$

con

$$(63) \quad \beta = \frac{4\alpha}{\pi} \sum_{n=0}^{n=r} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

rappresenta un moto su parete rigida *priva di punti angolosi* il quale per r indefinitamente crescente si avvicina indefinitamente al moto dato.

Ed infatti le (62) e (63) altro non sono se non un caso particolare delle (59) e (60) caratteristiche dei moti simmetrici su pareti rigide prive di punti angolosi.

Per altra parte per $r = \infty$ la (63) dà

$$\beta = \frac{4\alpha}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = \alpha,$$

con che la (62) diventa, al limite,

$$\omega = \frac{\alpha}{2} - i \frac{\alpha}{\pi} \cdot 2 \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(i\zeta)^{2n+1}}{2n+1},$$

dove la serie

$$2 \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(i\zeta)^{2n+1}}{2n+1}$$

converge in tutto il cerchio $|\zeta| < 1$ ed ha ivi per somma precisamente

$$\log \frac{1+i\zeta}{1-i\zeta}.$$

Si può adunque sempre trovare un valore di r tale che il moto privo di punti singolari definito dalla (62) differisca di tanto poco quanto si vuole dal moto su parete bilatera rappresentato dalla (47).

In particolare, facendo r sufficientemente grande, si potrà sempre ottenere che la curvatura della parete rigida pur mantenendosi ovunque finita, assuma nell'origine O valori comunque grandi.

Ora, in corrispondenza di un tal punto O , si ha $\zeta = i$ epperò il coefficiente della parte immaginaria della funzione ω diviene

$$\tau(i) = \frac{2\alpha}{\pi} \sum_{n=0}^{n=r} \frac{1}{2n+1}$$

che per r crescente cresce esso pure indefinitamente in valor assoluto.

Quanto al segno è da osservarsi che, se sono verificate le ipotesi del § 1, α è una grandezza essenzialmente negativa, epperò tale dev'essere anche $\tau(i)$.

Ne segue che in quel punto la grandezza della velocità

$$|w| = e^{\tau}$$

decesce col crescere della curvatura, anzi si può rendere tanto piccola quanto si vuole.

Resta così completamente giustificata la ipotesi che, al limite, la velocità si annulli nei punti angolosi.

La pressione raggiunge ivi il valore massimo:

$$p_{max} = p_0 + \frac{1}{2}.$$

Per contro, per $\alpha > 0$, cioè su di una parete convessa, la velocità dovrebbe crescere coll'aumentare della curvatura. Senonchè la formazione contemporanea di una depressione [dovuta al fatto che per $V > 1$ è $p = p_0 + \frac{1}{2}(1 - V^2) < p_0$], tende a produrre il distacco dello strato liquido dalla parete.

Questo distacco avverrà qualunque sia il valore della curvatura se in vicinanza del punto O il campo A si trova in comunicazione con un altro campo occupato da fluido in quiete alla pressione p_0 .

Ma, anche quando ciò non sia, il distacco deve inevitabilmente avvenire prima che la velocità lungo la parete possa raggiungere il valore limite

$$V_{max} = \sqrt{1 + 2p_0},$$

pel quale si avrebbe $p = 0$.

S'intende che la discontinuità, che così viene a generarsi nel moto, può essere, in questo secondo caso, un fatto puramente *locale*, incapace di alterare sensibilmente l'andamento generale del fenomeno.

In particolare una discontinuità nel moto deve verificarsi in prossimità di ogni punto angoloso convesso della parete.

La teoria viene così indirettamente a provare quanto fosse opportuna la restrizione da noi introdotta (§ 1, c) a proposito del senso della concavità della parete rigida.

Torino, dicembre 1910.

GUSTAVO COLONNETTI.