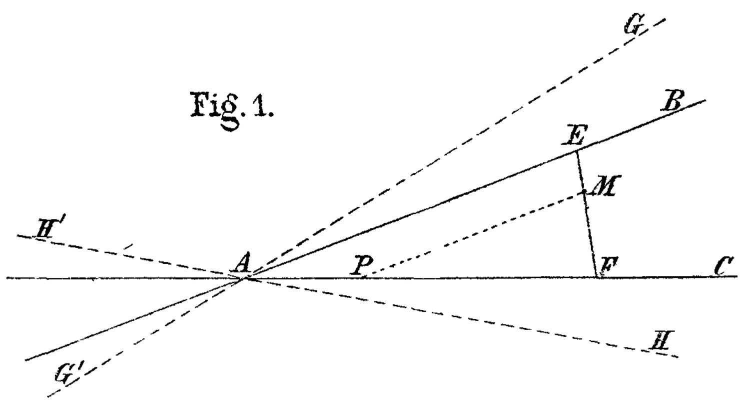
Ueber eine specielle geometrische Aufgabe des Minimums.*)

Von

Eduard Neovius in Helsingfors.

Die Aufgabe: Durch einen gegebenen Punkt M Fig. 1 eine Gerade zu legen, auf welcher die Schenkel eines gegebenen Winkels CAB eine möglichst kurze Strecke EF abschneiden, ist schon im vorigen Jahrhunderte, namentlich von L'Huilier behandelt worden. Es scheint jedoch bisher nicht bemerkt worden zu sein, dass die cubische Gleichung, auf welche die Lösung dieser Aufgabe führt, unter Umständen *drei* reelle Wurzeln besitzt, wobei aber nur *zwei* Wurzeln *ein Minimum, der dritten dagegen ein Maximum* der Länge der Strecke EF entspricht. Dies soll im Folgenden kurz dargethan werden.

Fig. 1.



Vom Punkte M aus ziehe man MP parallel zu AB und setze

$$AP = a, \quad PM = b, \quad PF = x, \quad EF = u, \quad CAB = \alpha,$$

$$\cos\beta = \frac{1}{3}\cos\alpha = c.$$

Es ist alsdann

$$u = \left(1 + \frac{a}{x}\right)\sqrt{b^2 - 6bcx + x^2},$$

woraus sich zur Bestimmung der unbekannten Grösse x die cubische Gleichung

*) Abgedruckt aus den Nachrichten d. Königl. Gesellschaft d. Wissenschaften zu Göttingen. Nr. 14. 1887.

$$x^3 - 3bcx^2 + 3abcx - ab^2 = 0$$

ergiebt, oder, wenn $x = y + bc$ gesetzt wird,

$$y^3 + py + q = 0,$$

wo

$$p = -3bc(bc-a)$$

und

$$q = -b^2(2bc^3-3ac^2+a).$$

Für die Grösse $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$, deren Vorzeichen darüber entscheidet, ob die cubische Gleichung eine oder drei reelle Wurzeln hat, ergiebt sich der Ausdruck

$$a^3b^3c^3\left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{1-6c^2-3c^4}{4c^3}\cdot\frac{b}{a} + 1\right),$$

oder, wenn

$$m = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-6c^2-3c^4}{4c^2},$$

und n gleich der reellen Grösse $m - \sqrt{m^2-1}$ gesetzt wird,

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = a^3b^3c^3\left(\frac{b}{a}+n\right)\left(\frac{b}{a}+\frac{1}{n}\right).$$

Wenn man nun a und b als Variable ansieht und erst $\frac{b}{a} = -n$, dann $\frac{b}{a} = -\frac{1}{n}$ annimmt, so werden dadurch zwei Gerade GG' und HH' bestimmt, welche mit den gegebenen Geraden AB und AC gleich grosse Winkel BAG und CAH $(=\gamma)$ einschliessen.

Jenachdem der Punkt M sich innerhalb eines von diesen beiden Winkeln befindet oder nicht, hat die cubische Gleichung *drei* reelle Lösungen oder nur *eine*.

Der Winkel γ ist durch die Gleichung

$$\frac{\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)} = m - \sqrt{m^2-1}$$

bestimmt, woraus

$$\operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{2}\alpha+\gamma\right)\operatorname{cotg}\left(\tfrac{1}{2}\alpha\right) = \sqrt{\frac{m+1}{m-1}} = \sqrt{\frac{1+3c}{1-3c}}\left(\frac{1-c}{1+c}\right)^{\frac{3}{2}}$$
$$= \operatorname{cotg}\left(\tfrac{1}{2}\alpha\right)\cdot\operatorname{tg}^3\left(\tfrac{1}{2}\beta\right),$$

oder

$$\operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{2}\alpha+\gamma\right) = \operatorname{tg}^3\left(\tfrac{1}{2}\beta\right)$$

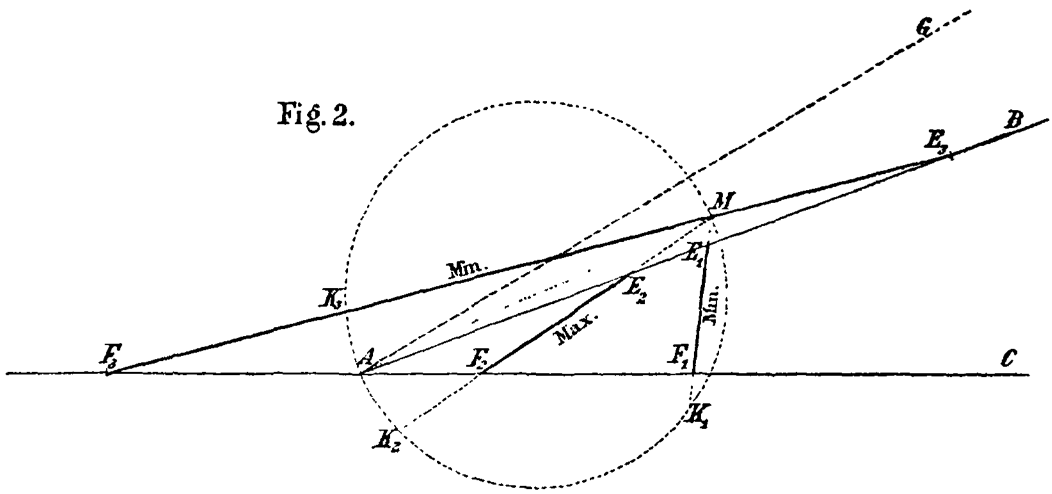
sich ergiebt.

In der folgenden Tabelle sind einige zusammengehörige Werthe der Grössen α und γ zusammengestellt.

α	γ		
Grade.	Grade.	Min.	Sec.
0	19	28	16
10	14	46	50
20	10	42	57
30	7	17	54
40	4	33	14
50	2	29	54
60	1	7	7
70		20	50
80		2	41
90			0

Wenn für kleinere Werthe von α (z. B. $\alpha = 20^0$) der Punkt M annähernd auf der Halbirungslinie des Winkels γ angenommen wird,

Fig. 2.



so treten die drei Lagen der Strecke EF, nämlich E_1F_1, E_2F_2, E_3F_3, welche den drei reellen Wurzeln der cubischen Gleichung entsprechen, recht deutlich hervor, wie Fig. 2 zeigt.

Eine von L'Huilier gefundene Bedingung für den Eintritt des Minimums (beziehungsweise Maximums) (Principiorum calculi differentialis et integralis expositio elementaris, Tubingae 1795, pag. 270) führt zu der Bemerkung, dass, wenn die Fusspunkte der vom Punkte A auf die Geraden MF_1, MF_2, MF_3 gefällten Perpendikel mit K_1, K_2 und K_3 bezeichnet werden, die Strecken ME_1 und F_1K_1, ME_2 und F_2K_2, ME_3 und F_3K_3 beziehlich gleiche Länge haben müssen. In Folge dessen liegen die Punkte F_1, F_2, F_3 auf einer durch den Punkt M gehenden circulären Curve dritter Ordnung, welche sich mit

Hülfe des über AM als Durchmesser beschriebenen Kreises construiren lässt. Ferner kann bemerkt werden, dass die Punkte $\dot{M}$, K_1, K_2, K_3 auf einer Hyperbel liegen, deren Asymptoten die beiden Schenkel des gegebenen Winkels sind.

Aus einer anderen Interpretation der Bedingungsgleichung für den Eintritt des Maximums oder Minimums (Vergl. Sturm, Cours d'Analyse I, pag. 189) ergiebt sich, dass die durch M senkrecht zu $ME_\lambda F_\lambda$, durch E_λ senkrecht zu AB, durch F_λ senkrecht zu AC gezogenen Geraden einander (für $\lambda = 1, 2, 3$) jedesmal in demselben Punkte schneiden.

Die beiden letzten Bemerkungen verdanke ich einer von befreundeter Seite mir gemachten Mittheilung.