

## Über die Begründung der hyperbolischen Geometrie.

Von

H. LIEBMANN in Leipzig.

---

Seitdem die hyperbolische (nichteuclidische) Geometrie neben der euklidischen zur Geltung gelangt ist, sind die verschiedensten Methoden zur Grundlegung sowohl wie zum Aufbau dieses Gebiets angewendet worden. Man kann in dieser Beziehung etwa drei Richtungen unterscheiden, die wir als *Aufbau mit Hilfe einer bekannten Geometrie*, *Einbau* in die euklidische Geometrie und endlich als *freien Aufbau* bezeichnen können.

1. Bolyai\*) und Lobatschewskij\*\*) selber zielten in ihren klassischen Arbeiten dahin, ein Gebilde des dreidimensionalen hyperbolischen Raumes ausfindig zu machen (die Kugel mit unendlich großem Radius), auf dem die euklidische Geometrie gilt, und diesen Umstand dann für die Geometrie der hyperbolischen Ebene auszunützen.

Die Benützung des Raumes haben andere Autoren z. B. Gauß\*\*\*), Flye St. Marie†), Killing††) und Simon†††) vermieden, indem sie die Forderung an die Spitze stellten: „Alle Figuren der Ebene sollen frei beweglich sein, und im Unendlichkleinen soll die Euklidische Geometrie gelten.“ Man erhält auf diese Weise einerseits die sphärisch-elliptische, andererseits die pseudosphärisch-hyperbolische Geometrie.

---

\*) J. Bolyai, Appendix scientiam spatii absolute veram exhibeus. Ed. nova. (Budap. 1902.) Vgl. § 11, 17 und namentlich 21 „Superficies  $F$ “.

\*\*) N. J. Lobatschewskij, zwei geometrische Abhandlungen. Deutsch mit Anmerkungen von F. Engel (Leipzig 1899). Vgl. S. 12 (Über die Anfangsgründe der Geometrie § 9) „die Gränzkugel“.

\*\*\*) C. F. Gauß, Ges. Werke VIII, (Leipzig 1900) S. 255—257.

†) Flye St. Marie, Etudes analytiques sur la théorie des parallèles. (Paris 1871.) Chap. I.

††) W. Killing, Die nichteuclidischen Raumformen in analytischer Behandlung (Leipzig 1885), S. 5 ff.

†††) M. Simon. Die Trigonometrie in der absoluten Geometrie. Crelles Journal 109 (1892), S. 187—198.

Endlich gelangt man von der sphärischen Trigonometrie zu der hyperbolischen, indem man den Radius der Kugel der imaginären Einheit gleich setzt\*). Dieser Übergang erweist sich namentlich auch als ein wichtiges und fruchtbares Hilfsmittel für die nichteuklidische Mechanik\*\*).

2. Den *Einbau* der hyperbolischen Geometrie in die euklidische hat zuerst Beltrami\*\*\*) gegeben, indem er zeigte, daß die hyperbolische Geometrie auf den Flächen konstanten negativen Krümmungsmaßes gilt.

Hat in dieser Weise Beltrami ein kongruentes Abbild der hyperbolischen Ebene durch Flächen gegeben, die im euklidischen Raum liegen, so bekommt man nach Klein†) ein „geodätisches“, in der euklidischen Ebene gelegenes, indem man die projektive Maßbestimmung einführt. Jede geradlinige Strecke, die von zwei beliebigen Punkten des Fundamentalkegelschnittes begrenzt ist, ist in diesem Fall das Bild einer unbegrenzten hyperbolischen Geraden.

Ein „winkeltreues“ Abbild der hyperbolischen Ebene gibt z. B. die euklidische Halbebene. Bilder der hyperbolischen Geraden sind dann die auf der Begrenzungsgeraden der Halbebene senkrecht stehenden (Halb-) Kreise.††)

3. Als Geometer, die einen freien Aufbau der hyperbolischen Geometrie sich zum Ziele machten — von den allgemeinen Untersuchungen über Grundlagen der Geometrie soll übrigens bei dieser Übersicht abgesehen werden — seien hier genannt Gérard†††), der von einer für das Verhältnis zweier gegenüberliegenden Seiten im Viereck mit drei rechten Winkeln angenommenen Ungleichheit ausgeht, Schur\*†), der ohne Anwendung von Stetigkeit oder dem Archimedischen Axiom doch den Raum als Hilfsmittel braucht, und Hilbert\*\*†).

\*) N. J. Lobatschewskij, Géométrie imaginaire. Crelles Journal XVII (1837), S. 299—320. \*\*) W. Killing. Die Mechanik in den nichteuklidischen Raumformen.

Crelles Journal 98 (1885), S. 1—49. \*\*\*) Beltrami, Saggio di interpretazione della geometria non euclidea. Giornale di Batt. VI (1868), S. 283—315. †) F. Klein,

Über die sogenannte nichteuklidische Geometrie. Math. Ann. 4 und 6 (Leipzig, 1871 und 72). F. Klein geht von der Cayleyschen Maßbestimmung aus und zeigt ihre von Cayley nicht erkannte Bedeutung für die nichteuklidische Geometrie. Außerdem aber wird sie unabhängig von der euklidischen Geometrie bestimmt, so daß die beiden Arbeiten auch unter 3) mit aufzuzählen sind. ††) Zum ersten Mal und zugleich in allgemeinerer Form (im Bild auf der Fläche zweiten Grades) findet sich diese Darstellung in Note VI (S. 45—47) von Kleins Erlanger Programm. (Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. Erlangen 1872). Wieder abgedruckt in Band XLIII der Math. Annalen. Leipzig 1893.

†††) Gérard, Sur la géométrie noneuclidienne. Thèse. Paris 1892.

\*†) F. Schur, Über die Grundlagen der Geometrie. Math. Annalen 55 (Leipzig 1902), S. 264—292. \*\*†) Hilbert, Neue Begründung der Bolyai-Lobatschewskijschen Geometrie. Math. Annalen 57 (Leipzig 1903), S. 137—150.

Hilbert macht nur von den einfachsten Voraussetzungen Gebrauch, es ist bemerkenswert, daß in § 1—3 seiner Abhandlung kaum ein Satz enthalten ist, den nicht Bolyai und Lobatschefskij selber zum Teil auch ohne Benützung des Raumes, des Stetigkeitsaxioms oder der euklidischen Geometrie bewiesen haben.

In der Tat gestattet die von Hilbert gegebene eigentümliche Einführung der Zahlen in die hyperbolische Geometrie, ohne weitere Hilfsmittel die hyperbolische Trigonometrie abzuleiten (s. w. unten, § 3—4). Zuvor aber soll gezeigt werden, daß eine Reihe von Konstruktionen sich schon auf Grund des Hilfssatzes § 1, 2 der Hilbertschen Arbeit ganz elementar ableiten lassen (§ 1) und daß die Bewegung der hyperbolischen Geometrie sich sehr einfach definieren lassen (§ 2).

### § 1.

#### Die merkwürdigen Punkte im Dreieck der hyperbolischen Geometrie nebst einigen Konstruktionen.

Wir gehen von der Tatsache aus, daß zwei Gerade sich entweder in einem (reellen) Punkt treffen, oder parallel sind (ein „Ende“\*) gemein haben) oder ein gemeinsames Lot besitzen. Diese drei Fälle wollen wir im folgenden so bezeichnen: Die Geraden schneiden sich *reell*, im *Unendlichen* oder *ideal*.

Entsprechend unterscheiden wir reelle Winkel, Nullwinkel, Überwinkel und verstehen allgemein unter der Halbierungslinie eines Winkels diejenige Gerade im Winkelraum, welche die Eigenschaft hat, daß die beiden Schenkel des Winkels durch Spiegelung an ihr ineinander übergehen.

Halbierungslinie eines Überwinkels ist also z. B. die Gerade, welche in der Mitte des gemeinsamen Lotes der beiden Schenkel auf diesem Lot senkrecht steht.

Es soll nun gezeigt werden, daß genau wie in der euklidischen Geometrie, so auch hier die Mittellote der drei Seiten (1), die Winkelhalbierenden der drei Innenwinkel oder eines Innenwinkels und zweier entsprechender Außenwinkel (2) und die drei Höhen (3) sich in je einem Punkt treffen. Dieser Punkt kann unter Umständen auch unendlich fern oder ideal sein, eine Annahme, die auch von den Ecken des Dreiecks gemacht werden darf. All' diese Sätze lassen sich elementar beweisen, und es sollen die Beweise durchgeführt werden, soweit sie für die Anwendungen erforderlich sind.

\*) Hilbert a. a. O. S. 140. (Zweite Definition nach Axiom IV.)

## 1. Die Mittellote der Dreiecksseiten.

Aus Kongruenzsätzen folgt leicht, daß wenn die Mittellote zweier Dreiecksseiten sich in einem reellen Punkte  $M$  treffen, auch das Mittellot der dritten Seite durch diesen Punkt  $M$  hindurchgeht.

Ist er ideal, sei etwa  $D'E'$  das gemeinsame Lot der Mittellote  $DD'$  und  $EE'$  von den beiden Dreiecksseiten  $a = BC$  und  $b = CA$  (Fig. 1), so fälle man auf das gemeinsame Lot die Lote  $AA'$ ,  $BB'$  und  $CC'$ . Die drei Lote sind untereinander gleich. Errichtet man jetzt auf  $A'B'$  das Mittellot, so muß es notwendig die Strecke  $AB$  (etwa in  $F'$ ) schneiden,

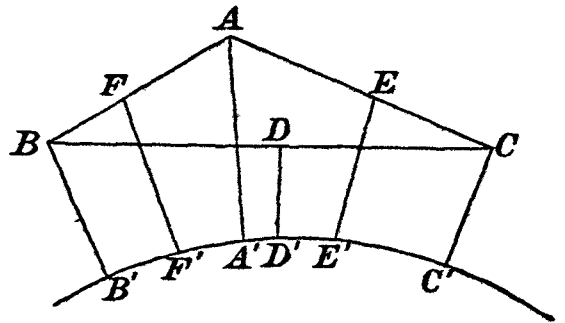


Fig. 1.

und die beiden Vierecke  $BFF'B'$  und  $AFF'A'$  sind dann einander kongruent, woraus folgt, daß  $F'F$  das Mittellot der Seite  $AB$  ist, was bewiesen werden sollte.\*)

Sind zwei der Mittellote zueinander parallel, so muß das Mittellot der dritten Seite jedenfalls mit jedem der beiden anderen Mittellote je ein Ende gemein haben. Wir haben nachzuweisen, daß dies dasselbe Ende ist, d. h. daß die drei genannten Geraden nicht etwa ein „asymptotisches Dreieck“ (d. h. ein Dreieck mit drei Nullwinkeln) bilden.

Man schließt auf die Richtigkeit der ausgesprochenen Behauptung aus den folgenden beiden sehr leicht zu erweisenden Tatsachen: Mindestens eine Seite im Dreieck, nämlich die dem größten Winkel gegenüberliegende, wird von allen drei Mittelloten getroffen; ferner: Eine Gerade kann nur zwei Seiten eines asymptotischen Dreiecks (in reellen Punkten) treffen.

Es müssen also die drei Mittellote, wenn zwei von ihnen ein Ende gemein haben, notwendig alle drei ein gemeinsames Ende besitzen.\*\*)

Anmerkung. Den dritten Spezialfall des Satzes von den Mittelloten kann man benützen, um die Richtigkeit der von Bolyai\*\*\*) gegebenen Konstruktion des Lotes zum Parallelwinkel zu erweisen.

Es sei  $\alpha$  der Winkel, zu dem das Lot gesucht wird. (Vorausgesetzt

\*) Vgl. die deutsche Ausgabe von Lobatschewskijs „Pangeometrie“ (Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften 130. Leipzig 1902). S. 85.

\*\*\*) Vgl. Hilbert a. a. O. § 1, Satz 4. An der von Hilbert zitierten Stelle hat Lobatschewskij den Satz sehr viel umständlicher bewiesen. (Vgl. die Englische Übersetzung S. 182—184).

\*\*\*\*) Appendix § 35 und Fig. 18. Dort wird die Existenz des in Fig. 2 dieser Abhandlung mit  $D$  bezeichneten Punktes  $\delta$  sehr sorgfältig bewiesen.

ist, daß man bereits Parallelen ziehen kann.) Dann kann man immer einen Parallelwinkel  $\beta$  so konstruieren — durch geeignete Wahl des Lotes — daß  $\beta > \alpha$ . Nun lege man  $\beta$  an den einen Schenkel  $AA'$  des

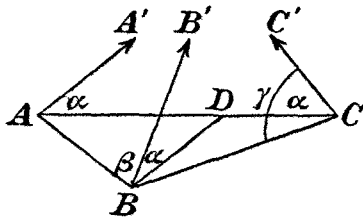


Fig. 2.

Winkels  $\alpha$  an (Fig. 2), mache  $AB$  gleich dem doppelten Lot das zum Parallelwinkel  $\beta$  gehört, ziehe die Parallele  $BB'$  zu  $AA'$ , trage den Winkel  $\alpha$  an  $BB'$  an, bringe den andern Schenkel zum Schnitt mit dem Schenkel des gegebenen Winkels (im Punkt  $D$ ), mache endlich noch  $DC = DB$ . Dann ist, wie wir beweisen wollen,

$AC$  das doppelte Lot, welches zum Parallelwinkel  $\alpha$  gehört, d. h. also, trägt man in  $C$  den Winkel  $\alpha$  an  $AC$  an, so ist  $CC'$  parallel  $AA'$ .

Es ist in Fig. 2, wenn wir die Dreieckswinkel mit  $A, B, C$  bezeichnen, ferner noch die Winkel  $B'BC$  und  $BCC'$  die zufolge der Konstruktion einander gleich sind, mit  $\gamma$  bezeichnen:

$$A = \beta - \alpha,$$

$$B = \beta + \gamma,$$

$$C = \gamma - \alpha,$$

also

$$\alpha = \frac{B - A - C}{2}, \quad \beta = \frac{B + A - C}{2}, \quad \gamma = \frac{B + C - A}{2}.$$

Jetzt wollen wir auf den drei Seiten des Dreiecks uns die Mittellote errichtet denken, und die Verbindungslinien des (reellen, unendlich-fernen oder idealen) gemeinsamen Punktes der drei Mittellote und der Ecken mit

$$A_0'A, \quad B_0'B, \quad C_0'C$$

bezeichnen. Dann ist

$$\sphericalangle A_0'AC = \sphericalangle ACC_0' \quad (= \alpha_0),$$

$$\sphericalangle A_0'AB = \sphericalangle ABB_0' \quad (= \beta_0),$$

$$\sphericalangle B_0'BC = \sphericalangle BCC_0' \quad (= \gamma_0)$$

und weiter

$$\sphericalangle A = \beta_0 - \alpha_0, \quad \sphericalangle B = \beta_0 + \gamma_0, \quad \sphericalangle C = \gamma_0 - \alpha_0.$$

Hieraus folgt

$$\alpha = \alpha_0, \quad \beta = \beta_0, \quad \gamma = \gamma_0,$$

d. h. die Linien  $A'A, B'B$  (und  $C'C$ ) gehen durch den gesuchten gemeinsamen Punkt. Nun ist aber nach Konstruktion  $AA'$  parallel zu  $BB'$ , also haben die drei Geraden ein gemeinsames Ende, was bewiesen werden sollte.



## 3. Die Höhen im Dreieck.\*)

Treffen sich zwei der drei Höhen im Dreieck in einem reellen Punkt, so geht auch die dritte durch diesen Punkt hindurch. — Es seien nämlich (Fig. 4)  $AD$  und  $BE$  die Höhen, die sich in  $H$  treffen mögen. Das Dreieck

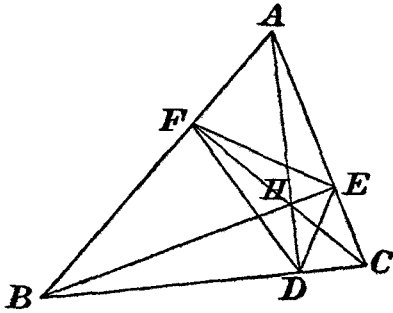


Fig. 4.

nun, für welches  $H$  der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises ist, und von dem  $D$  und  $E$  zwei Ecken sind, hat zum Mittelpunkt des der Seite  $DF$  anbeschriebenen Kreises den Punkt  $B$ , in dem sich die Gerade  $EH$  und das Lot  $CD$  auf  $HD$  schneiden. Genau so sieht man, daß  $A$  der Mittelpunkt eines zweiten anbeschriebenen Kreises ist. Man erkennt so, daß der Punkt  $F$  reell ist, auf  $AB$  liegt, und daß  $FC$  durch  $H$  hindurchgeht, ferner auf  $AB$  senkrecht schneidet, d. h. also: Auch die dritte Höhe geht durch  $H$  hindurch w. z. b. w.

Denken wir uns ferner in Fig. 3 das Lot auf  $A'A$  in  $A$  errichtet, nehmen wir ferner an, die Figur sei so gewählt, daß  $B'B$  und dieses Lot sich in einem reellen Punkt ( $K$ ) und ebenso  $C'C$  und das Lot sich in einem reellen Punkt ( $L$ ) schneiden, so gehen die Geraden  $BM$  und  $CM$  resp. durch die Mittelpunkte  $L$  und  $K$  der anbeschriebenen Kreise des Dreiecks  $ABC$  und stehen auf  $B'K$  und  $C'L$  in  $B$  bzw.  $C$  senkrecht.

Umgekehrt erhalten wir aus der Figur den Satz: Schneiden sich im Dreieck  $KL(D'E')$ , das zwei reelle und eine ideale Ecke hat, die beiden Höhen  $LB$  und  $KC$  in einem reellen Punkt  $M$ , so geht auch die dritte Höhe (d. h. das gemeinsame Lot  $AA'$  von  $KL$  und  $B'C'$  durch diesen Punkt hindurch.

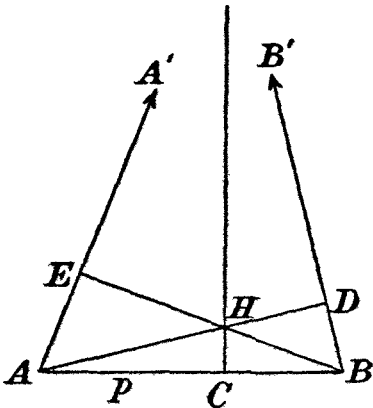


Fig. 5.

Entsprechend, d. h. auch durch Zurückführung auf den Satz von den Winkelhalbierenden, ist der Beweis für ein Dreieck mit einer unendlichfernen Ecke zu führen.

Anwendungen. Die beiden zuletzt genannten Fälle können zur einfachen Lösung zweier Aufgaben dienen.

Erstens\*\*): Konstruktion des Lotes zum Parallelwinkel  $\alpha$  (Fig. 5).

\* ) Ein analytischer Beweis des Satzes, daß die Höhen sich in einem reellen, unendlichfernen oder idealen Schnittpunkt schneiden findet sich bei Gérard, a. a. O. p. 54; vgl. auch (für die euklidische Ebene und die Kugel) Baltzer, Elemente der Mathematik II (6. Aufl. Leipzig 1883) S. 41.

\*\* ) Gérard a. a. O. p. 74. Diese Konstruktion ist die einfachste (Vgl. Hilbert a. a. O. S. 142, Fig. 3).

Man bestimme, was immer möglich ist, den Punkt  $B$  so, daß die Parallele  $BB'$  zu  $AA'$  mit  $AB$  einen spitzen Winkel einschließt. Dann fälle man die Lote  $AD$  und  $BE$  auf  $AA'$  und  $BB'$  und von dem immer vorhandenen reellen Schnittpunkt  $H$  aus das Lot  $HC$  auf  $AB$ . Dann ist  $p = AC$  die gesuchte Strecke, so daß

$$\alpha = \Pi(p)$$

ist.

Zweitens\*): Das gemeinsame Lot zweier sich nicht schneidenden Geraden  $g$  und  $h$ . (Fig. 6.)

Da die beiden Geraden ( $g$  und  $h$ ) ein gemeinsames Lot haben, so müssen die Punkte  $B$  und  $C$  auf  $g$  sich so wählen lassen, daß die Winkel  $\beta = B'BC$  und  $\gamma = BCC'$  der von  $B$  und  $C$  auf  $h$  gefällten Lote mit  $BC$  bzw.  $CB$  beide spitz sind. Die Höhen des Dreiecks  $BC(C'B')$  treffen sich dann sicher in einem reellen Punkt  $M$ , und das von  $M$  auf  $g$  gefällte Lot steht auch auf  $h$  senkrecht. —

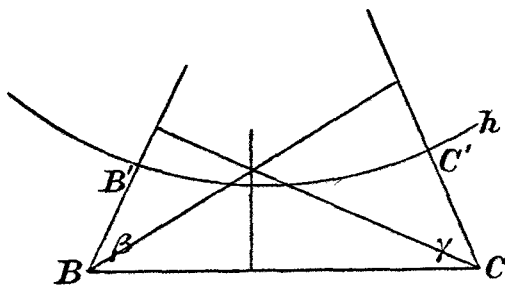


Fig. 6.

## § 2.

### Die Bewegungen in der hyperbolischen Ebene.

In § 4 seiner Abhandlung\*\*) gelangt Hilbert zu dem Ergebnis: Bezeichnet man die den Enden einer Geraden zugeordneten Zahlenwerte mit  $\xi$  und  $\eta$ , so bedeutet die in  $\xi$  und  $\eta$  bilineare Gleichung

$$a\xi\eta + \frac{b}{2}(\xi + \eta) + c = 0 \quad (4ac - b^2 > 0)$$

einen Punkt.

Durch geometrische Überlegungen gelangt man nun leicht zur Einsicht, daß jede beliebige Bewegung erhalten werden kann, in dem man „Verschiebungen der Ebene längs der Geraden  $(0, \infty)$ \*\*\*) ferner „Drehungen um das Ende  $\infty$ “†) und Spiegelungen an der Achse  $(+1, -1)$  in genügender Anzahl kombiniert††).

\*) Alle andern Konstruktionen erfordern, mit einziger Ausnahme der von Hilbert gegebenen, das Ziehen von Parallelen. Vgl. z. B. Engel a. a. O. S. 253 u. 255 und meine Ausgabe der „Pangeometrie“ S. 85. Zusatz 2. Hilbert verknüpft Existenzbeweis und Konstruktion in einfachster Weise (a. a. O. S. 141, Fig. 2).

\*\*) a. a. O. S. 149. Vgl. auch Fig. 6 und 7 für das folgende.

\*\*\*) a. a. O. S. 149 unten.

†) a. a. O. S. 150 oben.

††) Spiegelungen an dieser Achse setzen sich aus Spiegelungen am Punkte 0 und an der Achse  $(0, \infty)$  zusammen, d. h.

$$\xi' = -\frac{1}{\xi}, \quad \xi'' = -\xi, \quad \text{oder} \quad \xi' = +\frac{1}{\xi} \left( \eta' = +\frac{1}{\eta} \right).$$



Diese drei Arten von Bewegungen sind aber gegeben durch die Transformationen

$$\begin{aligned}\xi' &= \alpha \xi, & (\eta' &= \alpha \eta); \\ \xi' &= \xi + \alpha, & (\eta' &= \alpha + \eta); \\ \xi' &= + \frac{1}{\xi}, & (\eta' &= + \frac{1}{\eta})\end{aligned}$$

in genügender Anzahl kombiniert.

Hieraus folgt: *Die allgemeinste Bewegung ist durch eine Gleichung der Form*

$$\xi' = \frac{\alpha \xi + \beta}{\gamma \xi + \delta}, \quad (\eta' = \frac{\alpha \eta + \beta}{\gamma \eta + \delta})$$

gegeben.

Dabei wird die bilineare Gleichung des Punktes sich wieder in eine bilineare Gleichung verwandeln, deren Determinante ist

$$4\alpha'\delta' - \beta'^2 = (4\alpha\delta - \beta^2)(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 > 0.$$

Aus dieser Form der allgemeinsten Bewegung entnehmen wir noch den Satz:

*Eine Bewegung ist vollkommen bestimmt, wenn man die Bilder dreier Enden kennt. —*

Diesen halbgeometrischen, halbanalytischen Betrachtungen wollen wir jetzt eine rein geometrische Überlegung gegenüberstellen und zweierlei beweisen.

1. *Eine Transformation der hyperbolischen Ebene, bei der jeder reelle Punkt in einen reellen Punkt und jede Gerade in eine Gerade übergeht, ist notwendig eine Bewegung\*).*

2. *Jede Bewegung ist durch die Angabe der Bilder dreier Enden vollkommen bestimmt.*

---

1. Bei der Transformation verwandeln sich Gerade, die einen reellen Punkt ( $A$ ) gemein haben, in Gerade die ebenfalls einen reellen Punkt ( $A'$ ) gemein haben. Schneidet man nun eine Anzahl solcher von einem Punkt ausgehenden Halbstrahlen mit einer Transversale die die Geraden in  $A_1, A_2, \dots, A_n$  treffen möge, so entspricht der endlichen Strecke  $A_1 A_n$  eine endliche Strecke  $A'_1 A'_n$ , es haben die Punkte  $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$  dieselbe Anordnung wie die Punkte  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . (Liegt  $A_i$  zwischen  $A_1$  und  $A_n$ , so auch  $A'_i$  zwischen  $A'_1$  und  $A'_n$ ). Hieraus folgt weiter, daß Geraden mit gemeinsamem Ende auch wieder Gerade mit gemeinsamem Ende und Geraden mit gemeinsamem Lot auch wieder Gerade mit gemeinsamem Lot entsprechen. Ist nämlich  $AB$  die Grenze zwischen den schneidenden und

---

\*) Ferner soll die Anordnung der von einem Punkt ausgehenden Halbstrahlen ungeändert bleiben.

den nicht schneidenden Geraden, so muß jede Gerade auf der einen Seite von  $A'B'$  noch die Transversale  $A'_1A'_2 \dots A'_n \dots$  treffen, während andererseits keine auf der andern Seite von  $A'B'$  liegende Halbgerade die Transversale treffen kann; es wird also  $A'B'$  parallel zu  $A'_1A'_2 \dots A'_n \dots$ . Weiter verwandeln sich zwei Gerade mit idealem Schnittpunkt in ebensolche Gerade.

Zieht man die beiden Geraden zwischen zwei Geraden  $g$  und  $h$  mit gemeinsamem Lot, die je ein Ende mit jeder der beiden gegebenen Geraden gemein haben und sich in einem Punkte  $M$  treffen, so hat  $M$  folgende Eigenschaften: Legt man durch  $M$  irgend eine Gerade, die  $g$  und  $h$  in  $G$  und  $H$  trifft, so ist  $GM = MH$ . Legt man zwei Geraden, die  $g$  und  $h$  in  $G_1G_2$  und  $H_1H_2$  treffen, so ist  $G_1G_2 = H_1H_2$ .

$M$  verwandelt sich nun bei der Transformation in den entsprechenden Punkt  $M'$ , und hieraus ergeben sich die Sätze:

Der Mittelpunkt  $M$  einer beliebigen Strecke  $(GH)$  verwandelt sich in den Mittelpunkt ( $M'$ ) der entsprechenden Strecke  $(G'H')$ .

Hieraus folgt weiter, daß zwei gleich große auf einer Geraden gelegene Strecken sich in zwei gleich große Strecken verwandeln.

Aus der oben gemachten Bemerkung über gewisse untereinander gleiche Strecken  $(G_1G_2)$  und  $(H_1H_2)$  folgert man dann leicht noch: Zwei Strecken, die untereinander gleich sind und auf zwei Geraden mit gemeinsamem Lot liegen, verwandeln sich in zwei entsprechend gelegene untereinander gleiche Strecken.

Hat man endlich zwei beliebig gelegene gleich große Strecken, so kann man leicht eine dritte Strecke angeben, deren Trägerin eine Gerade ist, die jede der beiden ersten Geraden in einem idealen Punkt trifft. Hieraus ergibt sich dann:

*Je zwei Strecken, die untereinander gleich sind, verwandeln sich in zwei Strecken, die untereinander gleich sind.*

Ein gleichschenkliges Dreieck wird sich also wieder in ein gleichschenkliges Dreieck verwandeln, und die Mitte seiner Basis wieder in die Mitte der Basis. Hieraus ergibt sich leicht, daß die rechten Winkel sämtlich ungeändert bleiben, mit Hilfe des rechtwinklig gleichschenkligen Dreiecks dann, indem man die Höhe fällt, daß auch die Winkel von der Größe  $\frac{1}{4}\pi$  ungeändert bleiben. Überhaupt kann man zeigen, daß jeder Winkel  $(\pi \cdot 2^{-n})$  ungeändert bleibt. Hieraus ergibt sich, übrigens ohne Anwendung des archimedischen Axioms allein mit Anwendung der Axiome über die Anordnung und des Begriffs „Winkelraum“\*), daß bei der Transformation *alle* Winkel ungeändert bleiben. Mit den Winkeln bleiben aber auch die Strecken (Lote) ungeändert, zu denen die Winkel als Parallel-

\*) Hilbert a. a. O. p. 139 oben.

winkel gehören, d. h. es bleiben alle Strecken ungeändert, die Transformation ist eine Bewegung. —

2. Daß eine Bewegung durch die Bilder dreier Enden vollkommen bestimmt ist, sieht man in folgender Weise ein: Fällt man von einem Punkt  $P$  aus die drei Lote auf drei Seiten eines asymptotischen Dreiecks, so haben diese Lote bestimmte Größen und bestimmen ihrerseits die Lage des Punktes  $P$  vollkommen eindeutig. (Zwei Lote reichen zur eindeutigen Festlegung des Punktes nicht aus). —

### § 3.

#### Punktkoordinaten. Entfernung und Winkel.

Wir wollen jetzt zur hyperbolischen Metrik übergehen, und zunächst den Winkel zweier Geraden durch ihre Enden  $(\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2)$  ausdrücken, sodann neue Punktkoordinaten einführen, um die Entfernung zweier Punkte zu berechnen.

#### 1. Berechnung des Winkels.

Wir wollen zuerst eine Formel für die Drehungen um den Punkt  $O$  aufstellen.

Die Gleichung des Punktes  $O$  ist:

$$\xi\eta = -1.$$

Die Drehung um diesen Punkt muß also gegeben sein durch Gleichungen der Form

$$(1) \quad \xi' = \frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta}, \quad \eta' = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta},$$

vermöge deren

$$\xi'\eta' = -1$$

wird, sobald

$$\xi\eta = -1.$$

Daraus ergibt sich die Form

$$\xi' = \frac{\xi + \alpha}{1 - \alpha\xi}.$$

Führt man eine Drehung um  $90^\circ$  aus, so entsprechen den Enden  $-1, 0, 1, \infty$  die Enden  $0, 1, \infty, -1$ , dreht man um  $180^\circ$ , so weiter die Enden:  $1, \infty, -1, 0$ .

Im ersten Fall wird

$$\alpha = 1 \left( = \tan \frac{1}{4} \pi \right),$$

im zweiten Fall

$$\alpha = \infty \left( = \tan \frac{1}{2} \pi \right)$$

$\alpha$  ist also in diesen speziellen Fällen gleich der Tangente des halben Drehungswinkels, und diese Beziehung wollen wir jetzt allgemein beweisen.

Führt man zwei Drehungen nacheinander aus

$$\xi' = \frac{\xi + \alpha}{1 - \alpha\xi}, \quad \xi'' = \frac{\xi' + \alpha'}{1 - \alpha'\xi'}$$

so wird

$$\xi'' = \frac{\xi + \alpha''}{1 - \alpha''\xi},$$

wobei

$$\alpha'' = \frac{\alpha + \alpha'}{1 - \alpha\alpha'}$$

ist.

Andrerseits ist, wenn wir die Drehungswinkel mit  $\varphi$ ,  $\varphi'$  und  $\varphi''$  bezeichnen

$$\varphi'' = \varphi + \varphi'$$

und

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} \varphi'' = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} \varphi + \operatorname{tang} \frac{1}{2} \varphi'}{1 - \operatorname{tang} \frac{1}{2} \varphi \cdot \operatorname{tang} \frac{1}{2} \varphi'}.$$

Die Größe  $\alpha''$ , der Parameter für die aus zwei aufeinanderfolgenden Drehungen um den Punkt  $O$  zusammengesetzte Drehung, setzt sich also aus den Parametern der einzelnen Drehungen genau so zusammen wie die Tangente des halben Drehungswinkels. Da überdies zwischen den Größen  $\alpha$  und  $\operatorname{tang} \frac{1}{2} \varphi$  für  $\varphi = \frac{1}{2} \pi$  und  $\varphi = \pi$  Identität besteht, so gelangen wir zu dem Schluß:

*Die Gleichung*

$$\xi' = \frac{\xi + \alpha}{1 - \alpha\xi}$$

*stellt eine Drehung (um den Punkt  $O$ ) dar, wobei der Drehungswinkel bestimmt ist durch*

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} \varphi = \alpha.$$

Hieraus bekommen wir leicht die allgemeine Formel, die den Winkel  $\varphi$  zweier Geraden  $(\xi_1, \eta_1)$ ,  $(\xi_2, \eta_2)$  durch ihre Enden ausdrückt. Das Doppelverhältnis der Zahlen

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = \alpha, \quad \eta_1 = \infty, \quad \eta_2 = -\frac{1}{\alpha}$$

hat den Wert

$$\frac{0 - \alpha}{\infty - \alpha} : \frac{0 + \frac{1}{\alpha}}{\infty - \frac{1}{\alpha}} = -\alpha^2.$$

Führen wir nun eine beliebige Bewegung (1) aus, wobei die Enden  $(0, \infty, \alpha, -\frac{1}{\alpha})$  übergehen mögen in  $(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)$ , so bleibt einerseits der Winkel

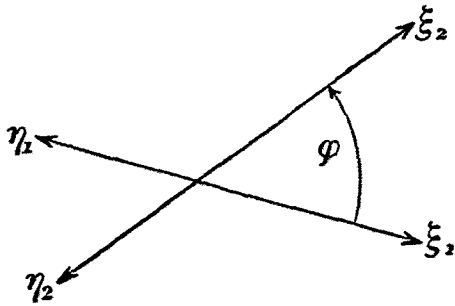


Fig. 7.

$$\varphi = 2 \operatorname{arctg} \alpha$$

ungeändert, und andererseits das Doppelverhältnis, d. h. es bleibt die zwischen diesen beiden Größen bestehende Beziehung erhalten.

Der Winkel  $\varphi$  (Fig. 7), den die beiden Geraden  $(\xi_1, \eta_1)$  und  $(\xi_2, \eta_2)$  miteinander einschließen, ist bestimmt durch

$$(2) \quad \operatorname{tang} \frac{1}{2} \varphi = \sqrt{-1} \sqrt{\frac{\xi_1 - \xi_2}{\xi_1 - \eta_2} \cdot \frac{\eta_1 - \xi_2}{\eta_1 - \eta_2}}.$$

## 2. Punktkoordinaten und ihre Transformation.

Die Gleichung eines Punktes ist

$$a + b \left( \frac{\xi + \eta}{2} \right) + \xi \eta = 0$$

wobei

$$4a - b^2 > 0.$$

Wir erfüllen diese Bedingung, indem wir setzen:

$$a = e^{-2u} + v^2 (= w^2),$$

$$b = -2v$$

und hierin  $u$  und  $v$  alle möglichen reellen Werte erteilen.

Die vorausgeschickte Gleichung verwandelt sich in

$$(3) \quad w^2 - v(\xi + \eta) + \xi \eta = 0$$

und kann dazu dienen, die Gleichung einer Geraden aus zwei auf ihr gelegenen Punkten, oder umgekehrt die Gleichung eines Punktes anzugeben, wenn zwei durch ihn gehende Geraden bekannt sind.

Z. B. wird die Gleichung der Geraden  $(+1, -1)$

$$w = 1,$$

die der Geraden  $(0, \infty)$  wird

$$v = 0.$$

Ferner werden die Koordinaten des Punktes  $O$ :

$$v = 0, (w = 1), u = 0.$$

Man kann die Gleichung aber auch benützen, um die Transformation der Punktkoordinaten bei Bewegungen zu berechnen.

Bei der Transformation

$$\xi' = \xi + a, \quad \eta' = \eta + a$$

(d. h. bei der „Drehung um den Punkt  $\infty$ “) verwandelt sich die Gleichung

$$w^2 - v(\xi + \eta) + \xi\eta = 0$$

in

$$w^2 - v(\xi' + \eta' - 2a) + (\xi' - a)(\eta' - a) = 0.$$

Schreiben wir diese Gleichung wieder in der Form

$$w'^2 - v'(\xi' + \eta') + \xi'\eta' = 0,$$

so erhalten wir

$$u' = u,$$

$$v' = v + a,$$

$$w'^2 = w^2 + 2va + a^2.$$

Ebenso kommt zur Transformation

$$\xi' = a\xi, \quad \eta' = a\eta$$

(d. h. der „Schiebung längs der Achse  $(0, \infty)$ “) das weitere Formelsystem

$$u' = u - \log a,$$

$$v' = av,$$

$$w' = aw$$

und zur „Spiegelung am Punkte 0“, gegeben durch

$$\xi' = -\frac{1}{\xi}, \quad \eta' = -\frac{1}{\eta}$$

kommt

$$u' = u + 2 \log w,$$

$$v' = -\frac{v}{w^2},$$

$$w' = \frac{1}{w}.$$

### 3. Die Entfernung zweier Punkte.

Die Entfernung zweier Punkte  $P_1P_2$  ist eine Funktion ihrer Koordinaten, die bei Bewegung ungeändert bleibt, und die die Eigenschaft hat, daß für drei Punkte auf einer Geraden die Beziehung besteht

$$P_1P_2 + P_2P_3 = P_1P_3.$$

Betrachten wir jetzt die Funktion

$$f(u_1, u_2, v_1, v_2) = \frac{1}{2} e^{u_1 + u_2} (w_1^2 + w_2^2 - 2v_1v_2)$$

so verwandelt sie sich bei der ersten Transformation in

$$\begin{aligned} f'(u_1', u_2', v_1', v_2') &= \frac{1}{2} e^{u_1' + u_2'} (w_1'^2 w_2'^2 + 2a(v_1' + v_2') + 2a^2 - 2(v_1' - a)(v_2' - a)) \\ &= \frac{1}{2} e^{u_1' + u_2'} (w_1'^2 + w_2'^2 - 2v_1' v_2'), \end{aligned}$$

d. h., sie bleibt ungeändert.

Bei der zweiten Transformation hat man:

$$f(u_1, u_2, v_1, v_2) = \frac{1}{2} a^2 e^{u_1' + u_2'} \left( \frac{w_1'^2}{a^2} + \frac{w_2'^2}{a^2} - \frac{2v_1'}{a} \cdot \frac{v_2'}{a} \right);$$

und auch hierbei ändert sich die Ausdrucksform nicht.

Endlich entsprechend für die dritte Transformation:

$$\begin{aligned} f(u_1, u_2, v_1, v_2) &= \frac{1}{2} e^{u_1' + u_2'} w_1'^2 w_2'^2 \cdot \left( \frac{1}{w_1'^2} + \frac{1}{w_2'^2} - \frac{2v_1' v_2'}{w_1'^2 w_2'^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} e^{u_1' + u_2'} (w_1'^2 + w_2'^2 - 2v_1' v_2'). \end{aligned}$$

Die Größe bleibt also bei allen Bewegungen ungeändert, d. h. sie ist eine Funktion der Entfernung der beiden Punkte

$$P_1(u_1, v_1, w_1) \quad \text{und} \quad P_2(u_2, v_2, w_2).$$

Um zu sehen, welche Funktion es ist, führen wir zwei Schiebungen längs der Achse ( $v, \infty$ ) nacheinander aus. Ein Punkt dieser Achse ( $v=0$ ) erhält bei der ersten „Schiebung“ die  $u$ -Koordinate

$$u' = u - \log a$$

bei der zweiten

$$u'' = u' - \log a' = u - (\log a + \log a').$$

Die Größen ( $\log a$ ) addieren sich also einfach, genau wie die Strecken, um welche die Punkte verschoben werden, sie sind ihnen also proportional.

Führt man erst eine Schiebung aus, die den Punkt ( $u_1, 0$ ) mit dem Punkt ( $u_2, 0$ ) zur Deckung bringt, dann eine zweite, die ( $u_2, 0$ ) mit ( $u_3, 0$ ) zur Deckung bringt, so lassen sie sich durch eine einzige ersetzen. Die Parameter ( $\log a, \log a', \log a''$ ) haben die Werte

$$u_2 - u_1, \quad u_3 - u_2, \quad u_3 - u_1.$$

Hieraus folgt: Die *Entfernung* zweier Punkte ( $u_1, u_2$ ) der Geraden  $v=0$  ist (bis auf einen Faktor, dem wir den Wert 1 erteilen wollen) *gleich*  $u_2 - u_1$ .

Für zwei Punkte dieser Achse nimmt überdies die aufgestellte Invariante den Wert an

$$\begin{aligned} f(u_1, u_2, 0, 0) &= \frac{1}{2} e^{u_1 + u_2} (e^{-2u_1} + e^{-2u_2}) \\ &= \frac{1}{2} (e^{u_2 - u_1} + e^{u_1 - u_2}) = \cos \text{hyp. } (u_2 - u_1). \end{aligned}$$

Damit ist die Beziehung der Invariante und der Entfernung festgelegt, und wir haben den Satz:

*Legt man die Maßbestimmung für den Abstand zweier Punkte so fest, daß man den (konstanten) Faktor, der für zwei Punkte ( $u_2$  und  $u_1$ ) der Achse  $v = 0$  den wirklichen Wert der Entfernung von  $u_2 - u_1$  unterscheidet, gleich 1 setzt, so wird die Entfernung  $r$  zweier beliebig gelegener Punkte bestimmt durch*

$$(4) \quad \text{ch } r = \frac{1}{2} e^{u_1 + u_2} (w_1^2 + w_2^2 - 2v_1 v_2).$$

§ 4.

**Die hyperbolische Trigonometrie.**

Nachdem einmal die Formel für den Winkel zweier Geraden und die Entfernung zweier Punkte aufgestellt ist, macht der weitere Aufbau der Trigonometrie keine besonderen Schwierigkeiten. Wir wollen uns damit begnügen, die Beziehung zwischen Lot und Parallelwinkel (1), einige Formeln für das rechtwinklige Dreieck (2) und die Formeln abzuleiten (3), welche die in § 1 unerledigt gebliebene Konstruktion des Parallelwinkels zum Lot, d. h. das Parallelenziehen überhaupt ermöglichen.

1. Der Parallelwinkel.

Tragen wir (Fig. 8) auf der Achse  $(-1, +1)$  von  $O$  aus nach dem Ende  $+1$  hin die Strecke  $OP = p$  ab und ziehen die Gerade mit dem Ende  $\infty$  durch diesen Punkt, so wollen wir nun den Wert  $\xi$  des andern Endes dieser Geraden berechnen.

Die Gleichung der Geraden wird, wie aus (3) folgt

$$\xi = v.$$

Der Punkt  $P(w=1)$  hat also die Koordinaten

$$v = \xi, \quad u = -\frac{1}{2} \log(1 - \xi^2), \quad w = 1$$

und seine Entfernung  $p$  vom Punkte  $O$  ist bestimmt durch

$$\text{ch } p = \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}},$$

d. h. es ist

$$\xi = \frac{e^p - e^{-p}}{e^p + e^{-p}} = \text{th } p.$$

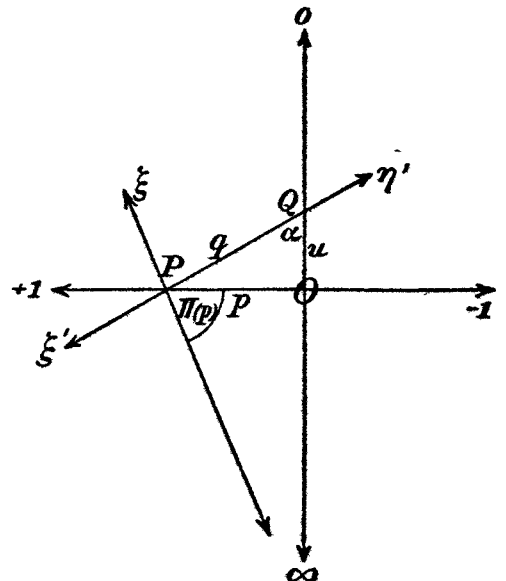


Fig. 8.



Andrerseits ist (nach § 3, 1)

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} \Pi(p) = \sqrt{(-1) \cdot \frac{\infty + 1}{\infty - 1} : \frac{\xi + 1}{\xi - 1}} = \sqrt{\frac{1 - \xi}{1 + \xi}} = e^{-p}.$$

Also wird\*)

$$(5) \quad \operatorname{tang} \frac{1}{2} \Pi(p) = e^{-p}.$$

## 2. Das rechtwinklige Dreieck.

Verbinden wir (Fig. 8) den Punkt  $Q(u, 0)$  der Achse  $(0, \infty)$  mit dem Punkte  $P$ , so ist die Entfernung der Punkte  $PQ(=q)$  gegeben durch

$$\operatorname{ch} q = \frac{1}{2} \frac{e^u}{\sqrt{1 - \xi^2}} (e^{-2u} + 1) = \operatorname{ch} u \operatorname{ch} p.$$

Also sieht man, daß im rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten  $a$  und  $b$  und der Hypotenuse  $c$  die Relation besteht

$$(6) \quad \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b = \operatorname{ch} c.$$

Die Enden der Verbindungslinie der beiden Punkte

$$(P) \quad w = 1, \quad v = \operatorname{th} p (= \xi)$$

und

$$(Q) \quad w = e^{-2u}, \quad v = 0$$

bestimmen sich aus

$$\xi' \eta' = -e^{-2u},$$

$$\xi' + \eta' = \frac{1 - e^{-2u}}{\operatorname{th} p} = 2e^{-u} \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{sh} p} \operatorname{ch} p$$

d. h. es wird (mit Benützung von (6))

$$\xi' = \frac{2e^{-u}}{\operatorname{sh} p} (\operatorname{sh} u \operatorname{ch} p + \operatorname{sh} q),$$

$$\eta' = \frac{2e^{-u}}{\operatorname{sh} p} (\operatorname{sh} u \operatorname{ch} p - \operatorname{sh} q),$$

also

$$\begin{aligned} \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} \alpha &= - \left( \frac{\xi' - \infty}{\xi' - 0} : \frac{\eta' - \infty}{\eta' - 0} \right) = - \left( \frac{\eta'}{\xi'} \right) \\ &= \frac{\operatorname{sh} q - \operatorname{sh} u \operatorname{ch} p}{\operatorname{sh} u \operatorname{ch} p + \operatorname{sh} q} \end{aligned}$$

und

$$\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} \alpha}{1 + \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} \alpha} = \frac{\operatorname{sh} u \operatorname{ch} p}{\operatorname{sh} q} = \frac{\operatorname{th} u}{\operatorname{th} q}.$$

\*) Vgl. Lobatschefskij-Engel S. 18 und S. 212—214.



Zufolge der Gleichung (5) ist nun noch

$$\sin \Pi(d) = \frac{2 \operatorname{tang} \frac{1}{2} \Pi(d)}{1 + \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} \Pi(d)} = \frac{2}{e^d + e^{-d}} = \frac{1}{\operatorname{ch} d},$$

also

$$(8') \quad \sin \Pi(d) = \frac{\operatorname{th} a}{\operatorname{th} c}.$$

Aus dem Vergleich der Formeln (7) und (8') ergibt sich der Satz:

*Zieht man durch den Punkt O (der dem spitzen Winkel APB gegenüberliegt) im Viereck mit drei rechten Winkeln die Parallele zur Seite AP und bringt sie mit OB zum Schnitt, so ist die Hypotenuse OQ des rechtwinkligen Dreiecks OBQ gleich AP.*

Daraus ergibt sich die bekannte Parallelenkonstruktion\*): Um von dem Punkte O des auf PA in A errichteten Lotes aus die Parallele zu AP zu ziehen, fälle man das Lot PB von P auf OB ( $BO \perp OA$ ) und mache  $OQ = AP$ , dann ist OQ diese Parallele.

Leipzig, den 1. März 1904.

---

\*) Alle Lösungen der Aufgabe, die Parallele zu ziehen, beruhen auf Beziehungen zwischen dem Viereck PAOB und dem Dreieck QOB. (Vergl. Bolyai, Appendix § 34. Lobatschewskij-Engel a. a. O. S. 256; Schur a. a. O. S. 292). Es ist bisher noch nicht gelungen einen einwandfreien rein geometrischen, weder auf Stetigkeitsbetrachtungen noch auf Benützung räumlicher Hilfsmittel beruhenden Beweis dieser Beziehungen zu erbringen. Vielleicht geben passend gewählte Spezialfälle der in § 1 genannten Sätze einen Weg hierzu.

---