Ueber die Transformation dritten Grades und die zugehörigen Modulargleichungen der *Abel*schen Functionen erster Ordnung.

(Von Herrn *Königsberger* zu Greifswald.)

Nachdem ich im 65sten Bande dieses Journals die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Bestehen algebraischer Gleichungen zwischen den oberen Integralgrenzen zweier in einander transformirbarer *Abel*schen Systeme erster Ordnung angegeben, behandelte ich in diesem Bande die rationale Transformation zweiten Grades, wobei sich mir zwei Hauptgattungen von Transformationen, für welche sich das transformirte ϑ entweder durch eine Summe von vier ϑ-Quadraten oder eine Summe von zwei ϑ-Producten darstellen liess, und einfache Ausdrücke für die Zusammensetzung der Integralmoduln des neuen Systems aus denen des ursprünglichen ergaben. Da nun die Transformationen von unpaarem Grade sich wesentlich in der Art, wie sie zu behandeln, von denen paaren Grades unterscheiden, worauf ich in der vorliegenden Arbeit bei verschiedenen Punkten besonders aufmerksam machen werde, so beabsichtige ich den einfachsten Fall derselben, die Transformation dritten Grades, an dieser Stelle durchzuführen, einzelne bei der Behandlung derselben vorkommende Untersuchungen für jeden beliebigen unpaaren Grad anzustellen und endlich die in einfacher Gestalt sich ergebenden Modulargleichungen herzuleiten, welche in homogenen linearen Gleichungen zwischen vier Producten von je zwei ϑ-Functionen bestehen, von denen die eine zu dem ursprünglichen, die andere zu dem transformirten *Abel*schen Systeme gehört.

Setzt man mit Beibehaltung der schon früher vielfach von mir gebrauchten Bezeichnungen:

$$(1.)\quad \begin{cases} \omega_{11} = \varrho_{11} + \sigma_{11}\tau_{11} + \sigma_{21}\tau_{12}, & \omega_{21} = \varrho_{21} + \sigma_{11}\tau_{21} + \sigma_{21}\tau_{22}, \\ \omega_{12} = \varrho_{12} + \sigma_{12}\tau_{11} + \sigma_{22}\tau_{12}, & \omega_{22} = \varrho_{22} + \sigma_{12}\tau_{21} + \sigma_{22}\tau_{22}, \\ \omega'_{11} = \varrho'_{11} + \sigma'_{11}\tau_{11} + \sigma'_{21}\tau_{12}, & \omega'_{21} = \varrho'_{21} + \sigma'_{11}\tau_{21} + \sigma'_{21}\tau_{22}, \\ \omega'_{12} = \varrho'_{12} + \sigma'_{12}\tau_{11} + \sigma'_{22}\tau_{12}, & \omega'_{22} = \varrho'_{22} + \sigma'_{12}\tau_{21} + \sigma'_{22}\tau_{22}, \end{cases}$$

wobei die in diesen Ausdrücken vorkommenden Transformationszahlen

$$\varrho \quad \sigma \quad \varrho' \quad \sigma'$$

den Bedingungsgleichungen genügen müssen

$$(2.)\quad \begin{cases} \sum\limits_\alpha (\varrho_{1\alpha}\varrho'_{2\alpha}-\varrho_{2\alpha}\varrho'_{1\alpha})=0, & \sum\limits_\alpha (\varrho_{2\alpha}\sigma'_{1\alpha}-\sigma_{1\alpha}\varrho'_{2\alpha})=0, \\ \sum\limits_\alpha (\sigma_{1\alpha}\sigma'_{2\alpha}-\sigma_{2\alpha}\sigma'_{1\alpha})=0, & \sum\limits_\alpha (\varrho_{1\alpha}\sigma'_{1\alpha}-\sigma_{1\alpha}\varrho'_{1\alpha})=3, \\ \sum\limits_\alpha (\varrho_{1\alpha}\sigma'_{2\alpha}-\sigma_{2\alpha}\varrho'_{1\alpha})=0, & \sum\limits_\alpha (\varrho_{2\alpha}\sigma'_{2\alpha}-\sigma_{2\alpha}\varrho'_{1\alpha})=3, \end{cases}$$

oder:

$$(3.)\quad \begin{cases} \sum\limits_\alpha (\varrho_{\alpha 1}\sigma_{\alpha 2}-\varrho_{\alpha 2}\sigma_{\alpha 1})=0, & \sum\limits_\alpha (\varrho_{\alpha 2}\sigma'_{\alpha 1}-\sigma_{\alpha 2}\varrho'_{\alpha 1})=0, \\ \sum\limits_\alpha (\varrho'_{\alpha 1}\sigma'_{\alpha 2}-\varrho'_{\alpha 2}\sigma'_{\alpha 1})=0, & \sum\limits_\alpha (\varrho_{\alpha 1}\sigma'_{\alpha 1}-\sigma_{\alpha 1}\varrho'_{\alpha 1})=3, \\ \sum\limits_\alpha (\varrho_{\alpha 1}\sigma'_{\alpha 2}-\sigma_{\alpha 1}\varrho'_{\alpha 2})=0, & \sum\limits_\alpha (\varrho_{\alpha 2}\sigma'_{\alpha 2}-\sigma_{\alpha 2}\varrho'_{\alpha 2})=3, \end{cases}$$

so sind die transformirten Moduln und Argumente durch die Gleichungen bestimmt:

$$(4.)\quad v'_1=\frac{3(\omega_{22}v_1-\omega_{12}v_2)}{\omega_{11}\omega_{22}-\omega_{12}\omega_{21}},\qquad v'_2=\frac{3(\omega_{11}v_2-\omega_{21}v_1)}{\omega_{11}\omega_{22}-\omega_{12}\omega_{21}}.$$

$$(5.)\quad \begin{cases} \tau'_{11}=\dfrac{\omega'_{11}\omega_{22}-\omega'_{21}\omega_{12}}{\omega_{11}\omega_{22}-\omega_{12}\omega_{21}}, & \tau'_{21}=\dfrac{\omega'_{12}\omega_{22}-\omega'_{22}\omega_{12}}{\omega_{11}\omega_{22}-\omega_{12}\omega_{21}}, \\ \tau'_{12}=\dfrac{\omega'_{21}\omega_{11}-\omega'_{11}\omega_{21}}{\omega_{11}\omega_{22}-\omega_{12}\omega_{21}}, & \tau'_{22}=\dfrac{\omega'_{22}\omega_{11}-\omega'_{12}\omega_{21}}{\omega_{11}\omega_{22}-\omega_{12}\omega_{21}}. \end{cases}$$

Sämmtliche Transformationen k^{ter} Ordnung *) lassen sich nun nach den von *Eisenstein* **) und *Hermite* ausgeführten Untersuchungen über die Zusammensetzung linearer Substitutionen, wenn die in den obigen Gleichungen vorkommenden Transformationszahlen in das System

$$(6.)\quad \left\{ \begin{array}{cccc} \sigma'_{11} & \sigma'_{12} & -\sigma_{12} & -\sigma_{11} \\ \sigma'_{21} & \sigma'_{22} & -\sigma_{22} & -\sigma_{21} \\ -\varrho'_{21} & -\varrho'_{22} & \varrho_{22} & \varrho_{21} \\ -\varrho'_{11} & -\varrho'_{12} & \varrho_{12} & \varrho_{11} \end{array} \right.$$

gebracht werden, in eine Zahl von

$$1+k+k^2+k^3$$

nicht äquivalenten Klassen theilen, die so beschaffen sind, dass sämmtliche in einer Klasse befindlichen Systeme durch Transformationen aus einander abgeleitet werden können, deren Determinante die Einheit ist. Unter allen einander äquivalenten Transformationen einer Klasse giebt es eine und nur

*) Ich spreche hier von der allgemeinen Transformation k^{ter} Ordnung, weil die nachfolgende Aenderung der *Hermite*schen Repräsentanten der nicht äquivalenten Klassen sich auf einen beliebigen Grad, insofern dieser ein unpaarer ist, erstreckt. —
**) s. die Monatsberichte der Berliner Akademie vom Jahre 1852.

eine, für welche das Product der Glieder der Diagonalreihe gleich der Substitutionsdeterminante k^2, sämmtliche Glieder zu der einen Seite der Diagonalreihe $= 0$, und die zu der anderen Seite derselben kleiner sind als diejenigen von ihnen, die auf derselben Horizontalreihe der Diagonale angehören, so dass *Hermite* zu folgenden reducirten Systemen gelangt:

$$(7.)\quad \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} k & i & 0 & i' \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & -i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} k & 0 & i & i' \\ 0 & k & i'' & i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right.,$$

in denen die Zahlen i, i', i'' die Werthe $0, 1, 2, \ldots k-1$ annehmen.

Wenn auch diese die einfachsten Formen sind, die sich für die Repräsentanten der nicht äquivalenten Klassen finden lassen, so habe ich es doch bei meinen Untersuchungen über die Transformation für den Fall, dass k eine ungerade Zahl ist, wegen der Gleichförmigkeit der algebraischen Ausdrücke sowie der Form der Modulargleichungen (worauf ich noch am Ende der vorliegenden Arbeit zurückkomme) als nothwendig erkannt, statt dieser *Hermite*-schen Systeme neue Repräsentanten für die einzelnen Klassen aufzustellen, die beziehungsweise aus den früheren durch die Anwendung der vier Transformationen ersten Grades:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & ai & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ ai & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ ai' & 0 & -ai & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ ai & ai'' & 1 & 0 \\ ai' & ai & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

hergeleitet werden, wenn a eine Lösung der Congruenz:

$$ak \equiv -1 \pmod{8}$$

ist, so dass ich als Repräsentanten der $1+k+k^2+k^3$ nicht äquivalenten Klassen jetzt folgende definire:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & i(ak+1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} k & i(ak+1) & 0 & i'(ak+1) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & -i(ak+1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} k & 0 & i(ak+1) & i'(ak+1) \\ 0 & k & i''(ak+1) & i(ak+1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

welche, wie man sieht, mit den früheren reducirten Systemen die Eigenschaft theilen, dass das Product der Diagonalglieder $= k^2$ und die Glieder zu der einen Seite derselben $= 0$ sind, während die dritte Bedingung, dass die Glieder der andern Seite im Restensystem, dessen Modul das zugehörige Diagonalglied ist, enthalten sein sollen, für diese Repräsentanten nicht mehr erfüllt ist. — Für die Transformation dritten Grades wähle ich also als Repräsentanten der 40 nicht äquivalenten Klassen die folgenden Systeme:

$$(8.)\quad \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -8i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & -8i & 0 & -8i' \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 8i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 0 & -8i & -8i' \\ 0 & 3 & -8i'' & -8i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right. .$$

Setzen wir nun mit *Hermite:*

$$(9.)\quad \left\{ \begin{aligned} \Pi(v_1, v_2)_\lambda &= e^{i\pi[-(\sigma'_{11}v_1+\sigma'_{21}v_2)(\sigma_{11}v_1+\sigma_{21}v_2)-(\sigma'_{12}v_1+\sigma'_{22}v_2)(\sigma_{12}v_1+\sigma_{22}v_2)]} \\ &\quad \times e^{i\pi[\tau'_{11}(\sigma_{11}v_1+\sigma_{21}v_2)^2+2\tau'_{12}(\sigma_{11}v_1+\sigma_{21}v_2)(\sigma_{12}v_1+\sigma_{22}v_2)+\tau'_{22}(\sigma_{12}v_1+\sigma_{22}v_2)^2]} \\ &\quad \times \vartheta(v'_1, v'_2, \tau'_{11}, \tau'_{12}, \tau'_{22})_\lambda, \end{aligned} \right.$$

so gelten die für die Π-Function charakteristischen Gleichungen:

$$(10.)\quad \left\{ \begin{aligned} \Pi(v_1+1, v_2)_\lambda &= (-1)^{\mathfrak{m}}\,\Pi(v_1, v_2)_\lambda, \\ \Pi(v_1, v_2+1)_\lambda &= (-1)^{\mathfrak{n}}\,\Pi(v_1, v_2)_\lambda, \\ \Pi(v_1+\tau_{11}, v_2+\tau_{21})_\lambda &= (-1)^{\mathfrak{q}}\,\Pi(v_1, v_2)_\lambda . e^{-3i\pi(2v_1+\tau_{11})}, \\ \Pi(v_1+\tau_{12}, v_2+\tau_{22})_\lambda &= (-1)^{\mathfrak{p}}\,\Pi(v_1, v_2)_\lambda . e^{-3i\pi(2v_2+\tau_{22})}, \end{aligned} \right.$$

worin die Zahlen $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ durch die Ausdrücke bestimmt sind:

$$(11.)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{m} &= \quad n_1^\lambda\sigma'_{11}+n_2^\lambda\sigma'_{12}-m_2^\lambda\sigma_{12}-m_1^\lambda\sigma_{11}-\sigma_{11}\sigma'_{11}-\sigma_{12}\sigma'_{12}, \\ \mathfrak{n} &= \quad n_1^\lambda\sigma'_{21}+n_2^\lambda\sigma'_{22}-m_2^\lambda\sigma_{22}-m_1^\lambda\sigma_{21}-\sigma_{21}\sigma'_{21}-\sigma_{22}\sigma'_{22}, \\ \mathfrak{p} &= -n_1^\lambda\varrho'_{21}-n_2^\lambda\varrho'_{22}+m_2^\lambda\varrho_{22}+m_1^\lambda\varrho_{21}-\varrho_{21}\varrho'_{21}-\varrho_{22}\varrho'_{22}, \\ \mathfrak{q} &= -n_1^\lambda\varrho'_{11}-n_2^\lambda\varrho'_{12}+m_2^\lambda\varrho_{12}+m_1^\lambda\varrho_{11}-\varrho_{11}\varrho'_{11}-\varrho_{12}\varrho'_{12}. \end{aligned} \right.$$

Bringt man nun die Function Π auf die Form:

$$(12.)\quad \left\{ \begin{aligned} &\Pi(v_1, v_2)_\lambda \\ &= \sum_{m,n}(-1)^{\mathfrak{p}n+\mathfrak{q}m}A_{m,n}\,e^{i\pi[(2m+\mathfrak{m})v_1+(2n+\mathfrak{n})v_2]+\frac{i\pi}{12}[(2m+\mathfrak{m})^2\tau_{11}+2(2m+\mathfrak{m})(2n+\mathfrak{n})\tau_{12}+(2n+\mathfrak{n})^2\tau_{22}]}, \end{aligned} \right.$$

so sind nach *Hermite* die ersten beiden Bedingungsgleichungen von selbst erfüllt, während die beiden anderen folgende Beziehungen zwischen den Coefficienten ergeben:

$$(13.)\quad \left\{ \begin{aligned} &A_{m+3,n} = A_{m,n}, \qquad A_{m,n+3} = A_{m,n}, \\ &\qquad A_{m+3,n+3} = A_{m,n}, \\ &\text{oder} \\ &\qquad A_{3\mu+\alpha,3\nu+\beta} = A_{\alpha,\beta}, \end{aligned} \right.$$

so dass von den Coefficienten der für Π angenommenen Reihenentwickelung (12.), so lange wenigstens nur die Bedingungen (7.) berücksichtigt werden, 9 unbestimmt bleiben, nämlich:

$$A_{00}\quad A_{01}\quad A_{02}\quad A_{10}\quad A_{11}\quad A_{12}\quad A_{20}\quad A_{21}\quad A_{22}.$$

Endlich liefert noch die Bedingung:

$$(14.)\qquad \Pi(-v_1, -v_2)_\lambda = (-1)^{\mathfrak{pn}+\mathfrak{qm}}\Pi(v_1, v_2)_\lambda$$

die Relation:

$$(15.)\qquad A_{-m-\mathfrak{m}, -n-\mathfrak{n}} = A_{m,n},$$

so dass von den 9 Coefficienten nur fünf von einander unabhängig sind und sich also die Function Π in die Form setzen lässt:

$$(16.)\qquad \Pi(v_1, v_2)_\lambda = A_1R_1+A_2R_2+A_3R_3+A_4R_4+A_5R_5,$$

worin $A_1, A_2, \dots A_5$ noch unbestimmte Constanten, die von den anderweitigen Eigenschaften der Function Π abhängen, und $R_1, R_2, \dots R_5$ unendliche Reihen bedeuten, die aus den Gliedern der für die Π-Function angenommenen Reihe (12.) bestehen.

Es kommt nun nach der von *Hermite* vorgezeichneten Methode darauf an, diese unendlichen Reihen mittelst des Prinzipes zu bestimmen, dass jede synektische Function von v_1, v_2, welche den Bedingungen (10.) und (14.) genügt, sich bis auf die Coefficienten A in der Form (16.) muss darstellen lassen.

Bildet man das folgende Product:

$$(17.)\qquad \vartheta(v_1, v_2)_{\mu_1^r\mu_2^r\nu_1^r\nu_2^r}\,.\,\vartheta(v_1, v_2)_{\mu_1^s\mu_2^s\nu_1^s\nu_2^s}\,.\,\vartheta(v_1, v_2)_{\mu_1^t\mu_2^t\nu_1^t\nu_2^t},$$

in welchem die Indices der Bedingung unterworfen werden:

$$(18.)\qquad \begin{cases}\mu_1^r+\mu_1^s+\mu_1^t\equiv\mathfrak{q}, & \nu_1^r+\nu_1^s+\nu_1^t\equiv\mathfrak{m},\\ \mu_2^r+\mu_2^s+\mu_2^t\equiv\mathfrak{p}, & \nu_2^r+\nu_2^s+\nu_2^t\equiv\mathfrak{n},\end{cases}\qquad (\text{mod. } 2)$$

so erkennt man unmittelbar, dass dieses Product den Bedingungsgleichungen (10.) Genüge leistet, und fügt man noch die beschränkende Congruenz hinzu:

$$(19.)\qquad \mu_1^r\nu_1^r+\mu_2^r\nu_2^r+\mu_1^s\nu_1^s+\mu_2^s\nu_2^s+\mu_1^t\nu_1^t+\mu_2^t\nu_2^t\equiv\mathfrak{pn}+\mathfrak{qm}\quad(\text{mod. } 2),$$

so wird das ϑ-Product (17.) den fünf für die Π-Function geltenden Bedingungsgleichungen (10.) und (14.) genügen und sich also auf die Form:

$$(20.)\qquad \vartheta(v_1, v_2)_r\vartheta(v_1, v_2)_s\vartheta(v_1, v_2)_t = A_1'R_1+A_2'R_2+A_3'R_3+A_4'R_4+A_5'R_5$$

bringen lassen.

Da sich nun die Indices

$$\mu_\alpha^r\quad \nu_\alpha^r\quad \mu_\alpha^s\quad \nu_\alpha^s\quad \mu_\alpha^t\quad \nu_\alpha^t$$

auf mannigfache Art so bestimmen lassen, dass den Bedingungscongruenzen (18.) und (19.) genügt wird, so wollen wir fünf ϑ-Producte auswählen, in welche eine möglichst geringe Zahl von ϑ-Functionen eintritt, ohne dass eine lineare Abhängigkeit unter ihnen besteht, um dann aus fünf der Gleichung (20.) analogen und in $R_1, R_2, \dots R_5$ linearen Gleichungen diese Reihen bestimmen zu können.

Für die Annahme:

$$(21.)\quad \begin{cases} \mu_1^r \equiv \mu_1^s \equiv \mu_1^t \equiv \mathfrak{q}, & \nu_1^r \equiv \nu_1^s \equiv \nu_1^t \equiv \mathfrak{m}, \\ \mu_2^r \equiv \mu_2^s \equiv \mu_2^t \equiv \mathfrak{p}, & \nu_2^r \equiv \nu_2^s \equiv \nu_2^t \equiv \mathfrak{n}, \end{cases} \quad (\text{mod. } 2),$$

erhalte ich als erstes ϑ-Product, welches den oben aufgestellten Congruenzen Genüge leistet:

$$(22.)\qquad \vartheta(v_1, v_2)^3_{\mathfrak{qpmn}}.$$

Wähle ich sodann die Indices r und s beliebig, nur der einen Bedingung unterworfen, dass:

$$(23.)\quad \begin{cases} \mu_1^r\nu_1^r + \mu_2^r\nu_2^r + \mu_1^s\nu_1^s + \mu_2^s\nu_2^s + (\mathfrak{q}-\mu_1^r-\mu_1^s)(\mathfrak{m}-\nu_1^r-\nu_1^s) + (\mathfrak{p}-\mu_2^r-\mu_2^s)(\mathfrak{n}-\nu_2^r-\nu_2^s) \\ \qquad\qquad \equiv \mathfrak{pn}+\mathfrak{qm}, \quad (\text{mod. } 2) \end{cases}$$

oder

$$(24.)\quad \begin{cases} \mu_1^s\nu_1^r + \mu_1^r\nu_1^s + \mu_2^s\nu_2^r + \mu_2^r\nu_2^s \\ +\mathfrak{q}(\nu_1^r+\nu_1^s)+\mathfrak{p}(\nu_2^r+\nu_2^s)+\mathfrak{m}(\mu_1^r+\mu_1^s)+\mathfrak{n}(\mu_2^r+\mu_2^s) \equiv 0 \quad (\text{mod. } 2) \end{cases}$$

und bestimme dann:

$$(25.)\quad \begin{cases} \mu_1^t \equiv \mathfrak{q}-\mu_1^r-\mu_1^s, & \nu_1^t \equiv \mathfrak{m}-\nu_1^r-\nu_1^s, \\ \mu_2^t \equiv \mathfrak{p}-\mu_2^r-\mu_2^s, & \nu_2^t \equiv \mathfrak{n}-\nu_2^r-\nu_2^s, \end{cases} \quad (\text{mod. } 2),$$

so genügt das Product:

$$(26.)\qquad \vartheta(v_1, v_2)_{\mu_1^r\mu_2^r\nu_1^r\nu_2^r} \cdot \vartheta(v_1, v_2)_{\mu_1^s\mu_2^s\nu_1^s\nu_2^s} \cdot \vartheta(v_1, v_2)_{\mu_1^t\mu_2^t\nu_1^t\nu_2^t}$$

ebenfalls den Bedingungscongruenzen (18.) und (19.).

Da endlich die Function:

$$\vartheta(v_1, v_2)_{\mathfrak{qpmn}}$$

wenn man von der bei der Vermehrung der Argumente um ganze Perioden hinzutretenden Exponentialgrösse absieht, ebenfalls die Relationen (10.) und (14.) befriedigt, so werden auch die drei ϑ-Producte:

$$(27.)\quad \begin{cases} \vartheta(v_1, v_2)_{\mathfrak{qpmn}} \cdot \vartheta(v_1, v_2)^2_{\mu_1^r\mu_2^r\nu_1^r\nu_2^r}, \\ \vartheta(v_1, v_2)_{\mathfrak{qpmn}} \cdot \vartheta(v_1, v_2)^2_{\mu_1^s\mu_2^s\nu_1^s\nu_2^s}, \\ \vartheta(v_1, v_2)_{\mathfrak{qpmn}} \cdot \vartheta(v_1, v_2)^2_{\mu_1^t\mu_2^t\nu_1^t\nu_2^t} \end{cases}$$

den vorgeschriebenen Bedingungen Genüge leisten.

Wir haben somit fünf Producte von je drei ϑ-Functionen gefunden, in denen nur die vier von einander verschiedenen ϑ:

$$\vartheta(v_1, v_2)_{\mathfrak{q}\mathfrak{p}\mathfrak{m}\mathfrak{n}}, \quad \vartheta(v_1, v_2)_{\mu_1^r \mu_2^r \nu_1^r \nu_2^r}, \quad \vartheta(v_1, v_2)_{\mu_1^s \mu_2^s \nu_1^s \nu_2^s}, \quad \vartheta(v_1, v_2)_{\mu_1^t \mu_2^t \nu_1^t \nu_2^t}$$

vorkommen und die sämmtlich den durch die Gleichungen (10.) und (14.) ausgedrückten Bedingungen Genüge leisten, sich also auch in eine der Gleichung (20.) analoge Form setzen lassen.

Es bleibt nun noch zu beweisen übrig, dass die fünf ϑ-Producte (22.), (26.), (27.) nicht in einer linearen Beziehung zu einander stehen, wobei zu berücksichtigen, dass die ϑ-Function mit dem Index $\mathfrak{q}\mathfrak{p}\mathfrak{m}\mathfrak{n}$ durch die Gleichungen (10.) bestimmt ist, von den beiden anderen mit dem Index r und s nur eine beliebig angenommen werden darf, wodurch aber dann der Index der vierten ϑ-Function gegeben ist. Setzt man nämlich die für die Indices aufgestellten Bedingungscongruenzen (18.) und (19.) in die Form:

$$(28.) \quad \begin{cases} \mu_1^r + \mu_1^s + \mu_1^t + \mathfrak{q} \equiv 0, \quad \mu_2^r + \mu_2^s + \mu_2^t + \mathfrak{p} \equiv 0, \\ \nu_1^r + \nu_1^s + \nu_1^t + \mathfrak{m} \equiv 0, \quad \nu_2^r + \nu_2^s + \nu_2^t + \mathfrak{n} \equiv 0, \\ \mu_1^r \nu_1^r + \mu_2^r \nu_2^r + \mu_1^s \nu_1^s + \mu_2^s \nu_2^s + \mu_1^t \nu_1^t + \mu_2^t \nu_2^t + \mathfrak{q}\mathfrak{m} + \mathfrak{p}\mathfrak{n} \equiv 0, \end{cases} \pmod{2}$$

so sind dies bekanntlich die Bedingungen, denen die Indices von vier ϑ-Functionen genügen, zwischen denen eine homogene algebraische Gleichung vierten Grades besteht. Es ergiebt sich somit unmittelbar, dass, wenn die Bestimmung der fünf ϑ-Producte, so wie wir sie oben getroffen, auf die einfachste Art aus vier ϑ-Functionen hergestellt wird, dies solche Functionen sein müssen, zwischen denen eine homogene algebraische Gleichung vierten Grades besteht. Nun könnte zweierlei eintreten. Entweder bestehen die oben angenommene homogene Gleichung dritten Grades und die hier besprochene Gleichung vierten Grades zugleich, oder die biquadratische Gleichung reducirt sich auf eine vom dritten Grade, die mit jener identisch ist. Dass die erste Annahme unstatthaft ist, folgt einfach daraus, dass zwei von einander unabhängige homogene algebraische Gleichungen zwischen denselben vier ϑ-Functionen eine Relation zwischen zwei *Abel*schen Functionen des Systems liefern würden, was nicht angeht. Aber ebenso unmöglich ist die Reduction der Gleichung vierten Grades auf eine von niedrigerem Grade *). Denn, wenn wir die vier ϑ-Functionen, zwischen denen eine biquadratische Gleichung be-

*) Ich wähle diese Beweisart, statt unmittelbar die folgende Substitution auf die angenommene kubische Gleichung anzuwenden, um nachzuweisen, dass keine der biquadratischen Relationen im Grade erniedrigt werden kann.

steht, der Kürze halber mit

$$\vartheta_\alpha \quad \vartheta_\beta \quad \vartheta_\gamma \quad \vartheta_\delta$$

bezeichnen, so hat die Gleichung die Form:

$$\begin{gathered} A\vartheta_\alpha^4+B\vartheta_\beta^4+C\vartheta_\gamma^4+D\vartheta_\delta^4+E\vartheta_\alpha^2\vartheta_\beta^2+F\vartheta_\alpha^2\vartheta_\gamma^2+G\vartheta_\alpha^2\vartheta_\delta^2 \\ +H\vartheta_\beta^2\vartheta_\gamma^2+K\vartheta_\beta^2\vartheta_\delta^2+L\vartheta_\gamma^2\vartheta_\delta^2+M\vartheta_\alpha\vartheta_\beta\vartheta_\gamma\vartheta_\delta = 0 \end{gathered}$$

und bei der als möglich angenommenen Reduction auf eine kubische Gleichung würde diese z. B. in:

$$A\vartheta_\alpha^3+E\vartheta_\alpha\vartheta_\beta^2+F\vartheta_\alpha\vartheta_\gamma^2+G\vartheta_\alpha\vartheta_\delta^2+M\vartheta_\beta\vartheta_\gamma\vartheta_\delta = 0$$

übergehen. Wendet man nun hierauf die Substitution $\alpha\beta$ an, so erhält man, wie unmittelbar zu sehen, die Gleichung:

$$A'.\vartheta_\beta^3+E'.\vartheta_\beta\vartheta_\alpha^2+F'.\vartheta_\beta\vartheta_\delta^2+G'.\vartheta_\beta\vartheta_\gamma^2+M'.\vartheta_\alpha\vartheta_\delta\vartheta_\gamma = 0,$$

welche, von der vorhergehenden verschieden, mit dieser verbunden wieder eine Relation zwischen zwei *Abel*schen Functionen ergeben würde. Es ist somit gezeigt, dass zwischen den vier ϑ-Functionen, welche den Congruenzen (28.) genügen, keine algebraische Gleichung dritten Grades bestehen kann, und dass also die oben aufgestellten in den Reihen R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 linearen Gleichungen, welche zur Bestimmung dieser Grössen dienen sollten, als von einander unabhängig für die Function $\Pi(v_1, v_2)_\lambda$ die Form liefern werden:

$$(29.)\left\{\begin{aligned} \Pi(v_1,v_2)_\lambda &= (1)\vartheta(v_1,v_2)^3_{\mathfrak{qpmn}}+(2)\vartheta(v_1,v_2)_{\mathfrak{qpmn}}\vartheta(v_1,v_2)^2_{\mu_1^r\mu_2^r\nu_1^r\nu_2^r} \\ &\quad+(3)\vartheta(v_1,v_2)_{\mathfrak{qpmn}}\vartheta(v_1,v_2)^2_{\mu_1^s\mu_2^s\nu_1^s\nu_2^s}+(4)\vartheta(v_1,v_2)_{\mathfrak{qpmn}}\vartheta(v_1,v_2)^2_{\mu_1^t\mu_2^t\nu_1^t\nu_2^t} \\ &\quad+(5)\vartheta(v_1,v_2)_{\mu_1^r\mu_2^r\nu_1^r\nu_2^r}\vartheta(v_1,v_2)_{\mu_1^s\mu_2^s\nu_1^s\nu_2^s}\vartheta(v_1,v_2)_{\mu_1^t\mu_2^t\nu_1^t\nu_2^t}, \end{aligned}\right.$$

worin die Zahlen $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ durch die Gleichungen (10.) bestimmt, μ_1^r, μ_2^r, ν_1^r, ν_2^r, μ_1^s, μ_2^s, ν_1^s, ν_2^s bis auf die Congruenzen (23.) oder (24.) beliebig, und μ_1^t, μ_2^t, ν_1^t, ν_2^t durch die Congruenzen (25.) gegeben sind.

Ich füge die Bemerkung hinzu, dass, wenn $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, welche durch die Gleichungen (11.) bestimmt werden, sämmtlich gerade Zahlen sind, die Function

$$\vartheta(v_1, v_2)_{\mathfrak{qpmn}}$$

in das Fundamentaltheta übergeht, während die Indices der anderen durch die Congruenzen bestimmt sind

$$(30.)\quad\left\{\begin{aligned} &\mu_1^r\nu_1^s+\mu_1^s\nu_1^r+\mu_2^r\nu_2^s+\mu_2^s\nu_2^r \equiv 0, \\ &\mu_1^t\equiv\mu_1^r+\mu_1^s, \qquad \nu_1^t\equiv\nu_1^r+\nu_1^s, \qquad (\text{mod. } 2). \\ &\mu_2^t\equiv\mu_2^r+\mu_2^s, \qquad \nu_2^t\equiv\nu_2^r+\nu_2^s, \end{aligned}\right.$$

Für sämmtliche Repräsentanten der nicht äquivalenten Klassen, wie ich sie oben aufgestellt, liefert das Fundamentaltheta des transformirten Systems gerade Transformationszahlen $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, so dass für alle diese die Congruenzen (30.) die zugehörige Darstellung liefern werden.

Unsere nächste Aufgabe ist die Bestimmung der Constanten (1), (2), (3), (4), (5).

Bevor ich jedoch zur Lösung derselben übergehe, sind einige Bemerkungen vorauszuschicken, die für alle Transformationen von unpaarem Grade gültig bleiben.

Da die oben (4.) für die transformirten Argumente v_1', v_2' gegebenen Ausdrücke auch auf die folgende Gestalt gebracht werden können:

$$(31.)\quad \begin{cases} v_1' = \sigma_{11}'v_1+\sigma_{21}'v_2-\tau_{11}'(\sigma_{11}v_1+\sigma_{21}v_2)-\tau_{12}'(\sigma_{12}v_1+\sigma_{22}v_2), \\ v_2' = \sigma_{12}'v_1+\sigma_{22}'v_2-\tau_{21}'(\sigma_{11}v_1+\sigma_{21}v_2)-\tau_{22}'(\sigma_{12}v_1+\sigma_{22}v_2), \end{cases}$$

so folgt leicht mit Benutzung der für die transformirten ϑ-Moduln aufgestellten Formeln (5.), dass den auf die ursprünglichen Argumente v_1, v_2 gemachten Substitutionen von halben Perioden für die neuen Argumente ebenfalls Substitutionen in halben Perioden des transformirten Systems entsprechen. Für $v_1:\frac{1}{2}$, $v_2:0$ und $v_1:0$, $v_2:\frac{1}{2}$ liefern die Ausdrücke (31.) unmittelbar resp.:

$$v_1' : \tfrac{1}{2}\sigma_{11}'-\tfrac{1}{2}\sigma_{11}\tau_{11}'-\tfrac{1}{2}\sigma_{12}\tau_{12}', \qquad v_2' : \tfrac{1}{2}\sigma_{12}'-\tfrac{1}{2}\sigma_{11}\tau_{21}'-\tfrac{1}{2}\sigma_{12}\tau_{22}',$$
$$v_1' : \tfrac{1}{2}\sigma_{21}'-\tfrac{1}{2}\sigma_{21}\tau_{11}'-\tfrac{1}{2}\sigma_{22}\tau_{12}', \qquad v_2' : \tfrac{1}{2}\sigma_{22}'-\tfrac{1}{2}\sigma_{21}\tau_{21}'-\tfrac{1}{2}\sigma_{22}\tau_{22}',$$

während man für die Substitutionen:

$$v_1 : \tfrac{1}{2}\tau_{11} \quad v_2 : \tfrac{1}{2}\tau_{21} \quad \text{und} \quad v_1 : \tfrac{1}{2}\tau_{12} \quad v_2 : \tfrac{1}{2}\tau_{22},$$

wenn man die von *Brioschi* *) gemachte Bemerkung benutzt, dass das Product der Nenner in den Ausdrücken für die transformirten ϑ-Moduln durch die ursprünglichen und umgekehrt $= k^2$ ist, folgende Veränderungen der transformirten Argumente erhält:

$$v_1' : -\tfrac{1}{2}\varrho_{11}'+\tfrac{1}{2}\varrho_{11}\tau_{11}'+\tfrac{1}{2}\varrho_{12}\tau_{12}', \quad v_2' : -\tfrac{1}{2}\varrho_{12}'+\tfrac{1}{2}\varrho_{11}\tau_{21}'+\tfrac{1}{2}\varrho_{12}\tau_{22}',$$
$$v_1' : -\tfrac{1}{2}\varrho_{21}'+\tfrac{1}{2}\varrho_{21}\tau_{11}'+\tfrac{1}{2}\varrho_{22}\tau_{12}', \quad v_2' : -\tfrac{1}{2}\varrho_{22}'+\tfrac{1}{2}\varrho_{21}\tau_{21}'+\tfrac{1}{2}\varrho_{22}\tau_{22}'.$$

Ich will nun untersuchen, welche Veränderung durch eine Substitution von der Form:

$$v_1 : \tfrac{1}{2}m_1+\tfrac{1}{2}n_1\tau_{11}+\tfrac{1}{2}n_2\tau_{12}, \qquad v_2 : \tfrac{1}{2}m_2+\tfrac{1}{2}n_1\tau_{21}+\tfrac{1}{2}n_2\tau_{22}$$

auf der rechten Seite der Gleichung (29.) die Π-Function auf der linken Seite

*) *Brioschi,* sur la théorie de la transformation des fonctions abéliennes, comptes rendus 1858.

derselben erfährt. Aus den für die Π-Function bei beliebigem ungeradem Transformationsgrade k geltenden Bedingungsgleichungen folgt leicht die Relation:

$$(32.)\quad \left\{\begin{aligned} &\Pi(v_1+m_1+n_1\tau_{11}+n_2\tau_{12},\, v_2+m_2+n_1\tau_{21}+n_2\tau_{22})_\lambda \\ &= (-1)^{\mathfrak{m}m_1+\mathfrak{n}m_2+\mathfrak{q}n_1+\mathfrak{p}n_2} e^{-k\pi i[2n_1v_1+2n_2v_2+n_1^2\tau_{11}+2n_1n_2\tau_{12}+n_2^2\tau_{22}]}.\, \Pi(v_1, v_2)_\lambda . \end{aligned}\right.$$

Da sich nun nach dem vorher Bemerkten die transformirten Argumente bei der Substitution der für v_1, v_2 angenommenen Ausdrücke nur um halbe Perioden ändern, so ergiebt sich offenbar, wenn der Exponent der in dem Ausdrucke für $\Pi(v_1, v_2)_\lambda$ enthaltenen Exponentialgrösse mit $f(v_1, v_2)$ bezeichnet wird:

$$(33.)\quad \left\{\begin{aligned} &\Pi(v_1+\tfrac{1}{2}m_1+\tfrac{1}{2}n_1\tau_{11}+\tfrac{1}{2}n_2\tau_{12},\, v_2+\tfrac{1}{2}m_2+\tfrac{1}{2}n_1\tau_{21}+\tfrac{1}{2}n_2\tau_{22})_\lambda \\ &= e^{f(v_1, v_2)}\vartheta(v_1'+\tfrac{1}{2}\mu_1+\tfrac{1}{2}\nu_1\tau_{11}'+\tfrac{1}{2}\nu_2\tau_{12}',\, v_2'+\tfrac{1}{2}\mu_2+\tfrac{1}{2}\nu_1\tau_{21}'+\tfrac{1}{2}\nu_2\tau_{22}')_\lambda e^{i\pi(Av_1+Bv_2+C)}, \end{aligned}\right.$$

worin A, B, C noch zu bestimmende Constanten und die Zahlen μ_1, μ_2, ν_1, ν_2 durch die Gleichungen gegeben sind:

$$(34.)\quad \left\{\begin{aligned} \mu_1 &= m_1\sigma_{11}'+m_2\sigma_{21}'-n_1\varrho_{11}'-n_2\varrho_{21}', & \nu_1 &= -m_1\sigma_{11}-m_2\sigma_{21}+n_1\varrho_{11}+n_2\varrho_{21}, \\ \mu_2 &= m_1\sigma_{12}'+m_2\sigma_{22}'-n_1\varrho_{12}'-n_2\varrho_{22}', & \nu_2 &= -m_1\sigma_{12}-m_2\sigma_{22}+n_1\varrho_{12}+n_2\varrho_{22}. \end{aligned}\right.$$

Substituirt man in (33.) für v_1, v_2:

$$v_1+\tfrac{1}{2}m_1+\tfrac{1}{2}n_1\tau_{11}+\tfrac{1}{2}n_2\tau_{12}, \qquad v_2+\tfrac{1}{2}m_2+\tfrac{1}{2}n_1\tau_{21}+\tfrac{1}{2}n_2\tau_{22},$$

so ergiebt sich:

$$\begin{aligned} &\Pi(v_1+m_1+n_1\tau_{11}+n_2\tau_{12},\, v_2+m_2+n_1\tau_{21}+n_2\tau_{22})_\lambda \\ &= e^{f(v_1, v_2)}\vartheta(v_1'+\mu_1+\nu_1\tau_{11}'+\nu_2\tau_{12}',\, v_2'+\mu_2+\nu_1\tau_{21}'+\nu_2\tau_{22}')_\lambda \times \\ &\times e^{i\pi[A(2v_1+\frac{1}{2}m_1+\frac{1}{2}n_1\tau_{11}+\frac{1}{2}n_2\tau_{12})+B(2v_2+\frac{1}{2}m_2+\frac{1}{2}n_1\tau_{21}+\frac{1}{2}n_2\tau_{22})+2C]}, \end{aligned}$$

woraus sich durch Vergleichung mit (32.) die Constanten A, B, C bestimmen lassen.

Setzt man nämlich:

$$(35.)\quad \left\{\begin{aligned} \mu_1 &= 2\mu_1'+\mu_1'', & \nu_1 &= 2\nu_1'+\nu_1'', \\ \mu_2 &= 2\mu_2'+\mu_2'', & \nu_2 &= 2\nu_2'+\nu_2'', \end{aligned}\right.$$

so ergiebt sich leicht, wenn man die bei der Vermehrung der Argumente v_1, v_2 um die oben angegebene Grösse zur k^{ten} Potenz der ursprünglichen ϑ-Function hinzukommende Exponentialgrösse kurz mit E bezeichnet, für die veränderte Π-Function der Ausdruck:

$$(36.)\quad \left\{\begin{aligned} &\Pi(v_1+\tfrac{1}{2}m_1+\tfrac{1}{2}n_1\tau_{11}+\tfrac{1}{2}n_2\tau_{12},\, v_2+\tfrac{1}{2}m_2+\tfrac{1}{2}n_1\tau_{21}+\tfrac{1}{2}n_2\tau_{22})_\lambda \\ &\qquad = E.\, e^{ci\pi}.\, e^{f(v_1, v_2)}\vartheta(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')_\nu, \end{aligned}\right.$$

worin die Indices der ϑ-Function durch die Congruenzen definirt sind:

$$(37.)\quad \begin{cases} m_1^\nu \equiv m_1^\lambda + \mu_1'', & n^\nu \equiv n_1^\lambda + \nu_1'', \\ m_2^\nu \equiv m_2^\lambda + \mu_2'', & n_2^\nu \equiv n_2^\lambda + \nu_2'', \end{cases} \quad (\text{mod. } 2)$$

und die Grösse c durch folgenden Ausdruck bestimmt wird:

$$(38.)\quad \begin{cases} c = -\tfrac{1}{2}(\mu_1 n_1^\lambda + \mu_2 n_2^\lambda + \nu_1 m_1^\lambda + \nu_2 m_2^\lambda) + \tfrac{1}{4}k(m_1 n_1 + m_2 n_2) \\ \quad + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{m} m_1 + \mathfrak{n} m_2 + \mathfrak{q} n_1 + \mathfrak{p} n_2) + \tfrac{1}{2}n_1^\nu(m_1^\lambda + \mu_1'' - m_1^\nu) + \tfrac{1}{2}n_2^\nu(m_2^\lambda + \mu_2'' - m_2^\nu) \\ \quad - \tfrac{1}{2}\nu_1''(m_1^\lambda + \mu_1'') - \tfrac{1}{2}\nu_2''(m_2^\lambda + \mu_2'') - \tfrac{1}{4}(\mu_1\nu_1 + \mu_2\nu_2) \\ \quad + \mu_1' n_1^\lambda + \mu_2' n_2^\lambda + \nu_1' m_1^\nu + \nu_2' m_2^\nu. \end{cases}$$

Da bekanntlich die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11}' & \sigma_{12}' & -\sigma_{12} & -\sigma_{11} \\ \sigma_{21}' & \sigma_{22}' & -\sigma_{22} & -\sigma_{21} \\ -\varrho_{21}' & -\varrho_{22}' & \varrho_{22} & \varrho_{21} \\ -\varrho_{11}' & -\varrho_{12}' & \varrho_{12} & \varrho_{11} \end{vmatrix} = k^2$$

ist, so folgt aus den Gleichungen (34.):

$$m_\alpha = \frac{A_\alpha \mu_1 + B_\alpha \mu_2 + C_\alpha \nu_1 + D_\alpha \nu_2}{k^2},$$

$$n_\alpha = \frac{A_\alpha' \mu_1 + B_\alpha' \mu_2 + C_\alpha' \nu_1 + D_\alpha' \nu_2}{k^2},$$

woraus zu ersehen, dass, wenn k ungerade ist, für verschiedene Werthe von m_α, n_α nicht nach dem Modul 2 congruente Werthe von μ_1, μ_2, ν_1, ν_2 folgen können, dass somit verschiedenen Substitutionen auch verschiedene Indices der transformirten ϑ-Function entsprechen. Ich will es nicht unterlassen, hier den wesentlichen Unterschied, der zwischen der geradzahligen und ungeradzahligen Transformation besteht, hervorzuheben. Während wir nämlich bei jener fanden, dass nur vier Substitutionen existiren, welche die linke Seite der Transformationsgleichung veränderten, während vier andere sie unverändert liessen *), ergiebt sich für die Transformation von unpaarem Grade, dass man aus dem Ausdrucke eines transformirten ϑ alle anderen durch Substitution von halben Perioden für die ursprünglichen Argumente ableiten kann, so dass also die Coefficienten (1), (2), (3), (4), (5) in der Transformationsgleichung (29.) nur für *ein* solches ϑ zu berechnen sind.

---

*) worauf wesentlich die von mir angegebene Methode zur Bestimmung der Constanten in der Transformationsgleichung zweiten Grades beruhte.

Der Satz von *Hermite*, dass es vier transformirte Π-Functionen giebt, welche durch dieselben vier ϑ des ursprünglichen Systems ausdrückbar sind, folgt aus der einfachen Ueberlegung, dass, wenn diese vier Functionen mit

$$\vartheta_\alpha \quad \vartheta_\beta \quad \vartheta_\gamma \quad \vartheta_{\alpha\beta\gamma}$$

bezeichnet werden (soll nämlich eine homogene algebraische Relation vierten Grades zwischen ihnen stattfinden, so geht der eine Index aus der Zusammensetzung aller anderen hervor), die folgenden durch die Indices

$$\alpha\beta \quad \alpha\gamma \quad \beta\gamma$$

charakterisirten Substitutionen wieder nur ϑ-Functionen mit den Indices α, β, γ, $\alpha\beta\gamma$ liefern, und ebenso ergiebt sich die von *Brioschi* in dem oben erwähnten Briefe an *Hermite* gemachte Bemerkung, dass für diese vier transformirten Π-Functionen die Werthe der Coefficienten dieselben bleiben, während sie selbst nur ihre Stelle ändern.

Nach diesen Auseinandersetzungen kehre ich nun zur Bestimmung der in der Gleichung (29.) noch unbekannt gebliebenen Coefficienten zurück.

Sucht man Substitutionen für v_1, v_2 welche die rechte Seite der Transformationsgleichung ändern, während sie die linke unverändert lassen, so findet man hier nicht wie bei der Transformation zweiten Grades Substitutionen in halben Perioden, welche nur eine Veränderung der Indices der ϑ-Functionen hervorbringen, sondern erhält folgende aus den durch die Zahl 3 getheilten Perioden zusammengesetzte Ausdrücke:

$$(39.)\quad \begin{cases} \qquad\qquad v_1 & \qquad\qquad v_2 \\ \frac{1}{3}\omega_{11} = \frac{1}{3}(\varrho_{11}+\sigma_{11}\tau_{11}+\sigma_{21}\tau_{12}) & \frac{1}{3}\omega_{21} = \frac{1}{3}(\varrho_{21}+\sigma_{11}\tau_{21}+\sigma_{21}\tau_{22}) \\ \frac{1}{3}\omega_{12} = \frac{1}{3}(\varrho_{12}+\sigma_{12}\tau_{11}+\sigma_{22}\tau_{12}) & \frac{1}{3}\omega_{22} = \frac{1}{3}(\varrho_{22}+\sigma_{12}\tau_{21}+\sigma_{22}\tau_{22}) \\ \frac{1}{3}\omega'_{11} = \frac{1}{3}(\varrho'_{11}+\sigma'_{11}\tau_{11}+\sigma'_{21}\tau_{12}) & \frac{1}{3}\omega'_{21} = \frac{1}{3}(\varrho'_{21}+\sigma'_{11}\tau_{21}+\sigma'_{21}\tau_{22}) \\ \frac{1}{3}\omega'_{12} = \frac{1}{3}(\varrho'_{12}+\sigma'_{12}\tau_{11}+\sigma'_{22}\tau_{12}) & \frac{1}{3}\omega'_{22} = \frac{1}{3}(\varrho'_{22}+\sigma'_{12}\tau_{21}+\sigma'_{22}\tau_{22}) \end{cases}$$

welche, wie unmittelbar aus den zwischen den transformirten und ursprünglichen Argumenten bestehenden Relationen (4.) zu erkennen ist, die Argumente der transformirten ϑ nur um ganze Perioden verändern. Was nun die Repräsentanten der nicht äquivalenten Klassen betrifft, so geben offenbar, da in der Diagonalreihe zwei der Transformationszahlen der Einheit gleich sind, die Substitutionen (39.) zwei von einander verschiedene Ausdrücke, welche den angegebenen Bedingungen genügen, und wenn man deren Summe und Differenz als neue auf die Transformationsgleichung anzuwendende Substitutionen bestimmt, so erhält man, indem man die Argumente verschwinden lässt, fünf von einander unabhängige zur Bestimmung der Coefficienten ausreichende lineare Gleichungen. Dass dasselbe auch für die übrigen Transformationen einer jeden Klasse gilt, folgt aus der Bemerkung, dass das durch eine lineare Transformation aus dem Repräsentanten der Klasse abgeleitete ϑ gleich einem mit einer Exponentialgrösse multiplicirten ϑ des ursprünglichen Systems ist. Es ist wohl kaum nöthig hinzuzufügen, dass wenn man den Transformationsausdruck für ein ungerades ϑ finden will, die eben angegebene Methode die Verhältnisse der zu bestimmenden Coefficienten liefert, während wenn das transformirte ϑ ein gerades ist, dasselbe für die Nullwerthe der Argumente als Factor in den für die Coefficienten sich ergebenden Ausdrücken auftritt. Zur Durchführung der Transformation braucht man jedoch nur eine dieser Relationen herzuleiten, da, wie wir oben gezeigt haben, nach der Bestimmung eines transformirten ϑ alle anderen durch Substitution halber Perioden für die ursprünglichen Argumente erhalten werden, ohne dass die Constanten eine Aenderung erleiden *).

Es sind somit die algebraischen Ausdrücke für die transformirten ϑ-Functionen als homogene Functionen dritten Grades der ursprünglichen ϑ gefunden und die Coefficienten derselben rational aus den ϑ-Functionen mit den ursprünglichen Moduln und Argumenten von der Form:

$$\frac{m_1+n_1\tau_{11}+n_2\tau_{12}}{3}, \quad \frac{m_2+n_1\tau_{21}+n_2\tau_{22}}{3}$$

zusammengesetzt. Durch Substitution von halben Perioden und Division der so entstehenden Gleichungen erhalten wir die algebraischen Transformationsformeln für die *Abel*schen Functionen. Was endlich die Berechnung der in den Coefficienten der Transformationsgleichung vorkommenden Grössen:

---

*) Ich bemerke, dass die von *Brioschi* in dem oben erwähnten Briefe an *Hermite* gegebene Constantenbestimmung unvollständig ist; sie ist auf alle die Fälle nicht anwendbar, in denen alle Glieder einer Verticalreihe der Substitutionsdeterminante

$$\begin{vmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{12} & -\sigma_{12} & -\sigma_{11} \\ \sigma'_{21} & \sigma'_{22} & -\sigma_{22} & -\sigma_{21} \\ -\varrho'_{21} & -\varrho'_{22} & \varrho_{22} & \varrho_{21} \\ -\varrho'_{11} & -\varrho'_{12} & \varrho_{12} & \varrho_{11} \end{vmatrix}$$

$\equiv 0$ (mod. k) sind, was unter den 40 Repräsentanten der nicht äquivalenten Klassen nur bei einer nicht der Fall ist. Es muss ausser den dort in Betracht gezogenen Veränderungen der Argumente der transformirten Functionen um ganze Vielfache der neuen Moduln, auch die Vermehrung derselben um ganze Zahlen, wie es oben von mir geschehen ist, zu Hülfe genommen werden.

$$(a.)\quad \frac{\vartheta\left(\frac{m_1+n_1\tau_{11}+n_2\tau_{12}}{k},\ \frac{m_2+n_1\tau_{21}+n_2\tau_{22}}{k}\right)_\alpha}{\vartheta\left(\frac{m_1+n_1\tau_{11}+n_2\tau_{12}}{k},\ \frac{m_2+n_1\tau_{21}+n_2\tau_{22}}{k}\right)_5}$$

angeht, so weiss man*), dass sie von der Auflösung einer Gleichung vom Grade

$$1+k+k^2+k^3$$

abhängen, von der man, um die Grössen $(a.)$ zu finden, nur eine Lösung zu kennen nöthig hat. —

Nachdem ich zur Bestimmung der Coefficienten der Transformationsgleichung die Methode auseinandergesetzt, die ich früher bei der Transformation zweiten Grades angewandt, füge ich eine zweite hinzu, der ich vor der ersten den Vorzug gebe, weil sie uns unmittelbar zur Aufstellung der Modulargleichungen der Transformation dritten Grades führen und für die Coefficienten mit Hülfe der für die Nullwerthe der Argumente genommenen ursprünglichen und transformirten ϑ-Functionen ziemlich einfache Ausdrücke liefern wird.

Da es nach den früher angestellten Betrachtungen gleichgültig ist, für welches transformirte ϑ man den aus den ϑ-Functionen des gegebenen Systems algebraisch homogen zusammengesetzten Ausdruck herstellt, da man ohne Aenderung der Coefficienten durch Substitution von halben Perioden jedes andere ϑ desselben Transformationssystems daraus herleiten kann, so will ich die Transformationsgleichung für ein ϑ suchen, dessen Indices die Transformationszahlen $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{p}$ sämmtlich geradzahlig machen. Dass es in jedem Transformationssystem ein solches giebt, ist an sich klar, da für die oben aufgestellten Repräsentanten der nicht äquivalenten Klassen das Fundamentaltheta diese Eigenschaft besitzt, während es für die anderen Systeme daraus folgt, dass deren ϑ gleich der mit einer Exponentialgrösse multiplicirten ϑ-Function des zugehörigen Repräsentanten ist. Sind nun $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{p}$ sämmtlich geradzahlig, so wird die in der Transformationsgleichung (29.) zuerst vorkommende Function

$$\vartheta(v_1, v_2)_{\mathfrak{q}\mathfrak{p}\mathfrak{m}\mathfrak{n}}$$

das Fundamentaltheta des gegebenen Systems; für die beiden anderen ϑ-Functionen:

$$\vartheta(v_1, v_2)_{\mu_1^r\mu_2^r\nu_1^r\nu_2^r} \quad \text{und} \quad \vartheta(v_1, v_2)_{\mu_1^s\mu_2^s\nu_1^s\nu_2^s}$$

wähle ich zwei ungerade, deren Indices jedoch der Bedingungscongruenz:

$$\mu_1^r\nu_1^s+\mu_1^s\nu_1^r+\mu_2^r\nu_2^s+\mu_2^s\nu_2^r \equiv 0 \pmod{2}$$

*) *Hermite,* sur la division des fonctions abéliennes.

genügen, also z. B. die Functionen

$$\vartheta(v_1, v_2)_1 \quad \text{und} \quad \vartheta(v_1, v_2)_{02},$$

so dass die Congruenzen (30.) als Index der vierten ϑ-Function 34 ergeben und die Transformationsgleichung somit die Gestalt erhält:

$$(40.)\quad \begin{cases} \Pi(v_1,v_2)_\lambda = (1)\vartheta(v_1,v_2)_5^3+(2)\vartheta(v_1,v_2)_5\vartheta(v_1,v_2)_1^2+(3)\vartheta(v_1,v_2)_5\vartheta(v_1,v_2)_{02}^2 \\ \qquad +(4)\vartheta(v_1,v_2)_5\vartheta(v_1,v_2)_{34}^2+(5)\vartheta(v_1,v_2)_1\vartheta(v_1,v_2)_{02}\vartheta(v_1,v_2)_{34}, \end{cases}$$

die, um es noch einmal hervorzuheben, in jedem Transformationssystem für irgend ein λ besteht.

Multiplicirt man die Gleichung (40.) mit $\vartheta(v_1, v_2)_5$ und wendet sodann die drei Substitutionen in halben Perioden auf dieselbe an, welche von den beiden Functionen:

$$\vartheta(v_1, v_2)_5 \quad \text{und} \quad \vartheta(v_1, v_2)_1$$

die erste zu einer geraden, die zweite zu einer ungeraden Function machen, so erhält man, wenn man die Argumente verschwinden lässt und mit θ die transformirte, mit ϑ die ursprüngliche ϑ-Function, mit ε_α achte Einheitswurzeln bezeichnet, die folgenden Gleichungen:

$$(41.)\quad \begin{cases} \theta_\lambda\vartheta_5 = (1)\vartheta_5^4+(4)\vartheta_5^2\,\vartheta_{34}^2, \\ \varepsilon_\mu\theta_\mu\vartheta_{03} = (1)\vartheta_{03}^4+(3)\vartheta_{03}^2\vartheta_{23}^2, \\ \varepsilon_\nu\theta_\nu\vartheta_{23} = (1)\vartheta_{23}^4-(3)\vartheta_{23}^2\vartheta_{03}^2, \\ \varepsilon_\varrho\theta_\varrho\vartheta_{34} = (1)\vartheta_{34}^4+(4)\vartheta_{34}^2\vartheta_5^2, \end{cases}$$

welche mit Berücksichtigung der bekannten Relation:

$$(42.)\quad \vartheta_{03}^4+\vartheta_{23}^4 = \vartheta_5^4-\vartheta_{34}^4$$

die Modulargleichung:

$$(43.)\quad \varepsilon_\mu\theta_\mu\vartheta_{03}+\varepsilon_\nu\theta_\nu\vartheta_{23}+\varepsilon_\varrho\theta_\varrho\vartheta_{34} = \theta_\lambda\vartheta_5$$

und für die Coefficienten (1), (3), (4) die Werthe liefern;

$$(44.)\quad \begin{cases} (1) = \dfrac{\varepsilon_\varrho\theta_\varrho\vartheta_{34}-\theta_\lambda\vartheta_5}{\vartheta_{34}^4-\vartheta_5^4}, \quad (3) = \dfrac{\varepsilon_\mu\theta_\mu\vartheta_{23}-\varepsilon_\nu\theta_\nu\vartheta_{03}}{\vartheta_{03}\vartheta_{23}(\vartheta_{23}^4+\vartheta_{03}^4)}, \\ \qquad (4) = \dfrac{\theta_\lambda\vartheta_{34}^3-\varepsilon_\varrho\theta_\varrho\vartheta_5^3}{\vartheta_5\vartheta_{34}(\vartheta_{34}^4-\vartheta_5^4)}. \end{cases}$$

Wendet man ebenso auf Gleichung (40.) für v_1, v_2 die durch die Indices 4, 14 bezeichneten Substitutionen an, welche von den Functionen

$$\vartheta(v_1, v_2)_5 \quad \text{und} \quad \vartheta(v_1, v_2)_{02}$$

die erste zu einer geraden, die zweite zu einer ungeraden Function machen, so erhält man:

$$(45.)\quad \begin{cases} \varepsilon_\sigma \theta_\sigma \vartheta_4 = (1)\vartheta_4^4 - (2)\vartheta_4^2\,\vartheta_{14}^2, \\ \varepsilon_\tau \theta_\tau \vartheta_{14} = (1)\vartheta_{14}^4 + (2)\vartheta_{14}^2\,\vartheta_4^2, \end{cases}$$

woraus in Verbindung mit den Gleichungen (41.) und mit Benutzung der Relation:

$$(46.)\qquad \vartheta_4^4 + \vartheta_{14}^4 = \vartheta_5^4 - \vartheta_{34}^4$$

die zweite Modulargleichung:

$$(47.)\qquad \varepsilon_\sigma \theta_\sigma \vartheta_4 + \varepsilon_\tau \theta_\tau \vartheta_{14} + \varepsilon_\varrho \theta_\varrho \vartheta_{34} = \theta_\lambda \vartheta_5$$

folgt und sich der Coefficient (2.) in der Form ergiebt:

$$(48.)\qquad (2) = \frac{\varepsilon_\tau \theta_\tau \vartheta_4^3 - \varepsilon_\sigma \theta_\sigma \vartheta_{14}^3}{\vartheta_4 \vartheta_{14}(\vartheta_4^4 + \vartheta_{14}^4)}.$$

Der Coefficient (5) folgt jetzt aus der Gleichung (40.), wenn man auf dieselbe eine beliebige Substitution in halben Perioden anwendet, welche der Index eines geraden ϑ ist. Man findet endlich leicht durch Benutzung der Relation:

$$\vartheta_{01}^4 + \vartheta_{14}^4 = \vartheta_5^4 - \vartheta_{12}^4$$

eine dritte Modulargleichung in der Form:

$$(49.)\qquad \varepsilon_\alpha \theta_\alpha \vartheta_{01} + \varepsilon_\beta \theta_\beta \vartheta_{12} + \varepsilon_\tau \theta_\tau \vartheta_{14} = \theta_5 \vartheta_5.$$

Ueberträgt man die eben gefundenen Resultate auf die Repräsentanten der nicht äquivalenten Klassen und beachtet, dass mit Ausnahme der Glieder in der Diagonalreihe des die Transformation darstellenden Schema's sämmtliche Transformationszahlen $\equiv 0 \pmod{8}$, dass die Grössen $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ für das transformirte Fundamentaltheta geradzahlig, dass endlich für dieses letztere

$$\mu_1 \equiv m_1, \quad \mu_2 \equiv m_2, \quad \nu_1 \equiv n_1, \quad \nu_2 \equiv n_2$$

sind, so erhält man die folgenden für alle 40 Repräsentanten gültigen Relationen, von denen je drei die zur Transformation gehörigen Modulargleichungen vorstellen:

$$(50.)\quad \begin{cases} \theta_{34}\vartheta_{34} + \theta_{03}\vartheta_{03} + \theta_{23}\vartheta_{23} = \theta_5\vartheta_5, & \theta_2\vartheta_2 + \theta_4\,\vartheta_4 + \theta_0\,\vartheta_0 = \theta_5\vartheta_5, \\ \theta_4\,\vartheta_4 \pm \theta_{14}\vartheta_{14} + \theta_{34}\vartheta_{34} = \theta_5\vartheta_5, & \theta_0\vartheta_0 + \theta_{03}\vartheta_{03} + \theta_{01}\vartheta_{01} = \theta_5\vartheta_5, \\ \theta_{01}\vartheta_{01} \pm \theta_{14}\vartheta_{14} + \theta_{12}\vartheta_{12} = \theta_5\vartheta_5, & \theta_2\vartheta_2 + \theta_{12}\vartheta_{12} + \theta_{23}\vartheta_{23} = \theta_5\vartheta_5, \end{cases}$$

wobei zu bemerken, dass das positive Vorzeichen der Grösse $\theta_{14}\vartheta_{14}$ für die durch das zweite und dritte Schema von (8.), das negative für die durch das erste und vierte dargestellten Transformationen gültig ist. Aus den für diejenigen Transformationen geltenden Modulargleichungen, für welche sowohl die Argumente als auch die Moduln der transformirten ϑ-Functionen die dreifachen der ursprünglichen sind, ersieht man, dass die in meiner ersten Abhandlung über die Transformation der *Abel*schen Functionen (Bd. 64 dieses Journals) mit Hülfe des Additionstheoremes der ϑ-Functionen hergeleiteten Relationen zwischen den *Abel*schen Functionen mit dreifachem und einfachem Modul (für die Nullwerthe der Argumente) aus den durch die Ausdrücke (50.) gegebenen Modulargleichungen zusammengesetzt sind. — Somit wären für die Transformation dritten Grades die Modulargleichungen, sowie mit Hülfe derselben die algebraischen Ausdrücke der transformirten ϑ-Functionen hergeleitet und zugleich die Behandlungsweise für eine beliebige Transformation von unpaarem Grade vorgezeichnet. Verbindet man die in dieser Abhandlung gefundenen Resultate mit denen, die sich bei der Untersuchung der Transformation zweiten Grades ergaben, so erhält man ohne Schwierigkeit die algebraischen Gleichungen zwischen den ϑ-Functionen der in einander zu transformirenden *Abel*schen Systeme für einen beliebigen Grad der Transformation.

Greifswald, im November 1866.