Relazioni tra gl'integrali semplici e gl'integrali multipli di 1.ª specie di una varietà algebrica.

(*Di* FRANCESCO SEVERI, *a Padova.*)

Per quanto LAGRANGE si sia occupato di integrali di differenziali algebrici in una sola Memoria (*), che ha per iscopo principale la rettificazione dell'ellisse e dell'iperbole, non parrà fuor di luogo la pubblicazione in questo Volume, dedicato al sommo Analista (**), di un lavoro sugl'integrali appartenenti ad una superficie o varietà algebrica, tanto più che il concetto medesimo di forma differenziale *integrabile*, che giuoca in modo più o meno esplicito nella mia ricerca, potendosi esprimere mediante una condizione al contorno, si riattacca anche alle celebri Memorie di LAGRANGE sul calcolo delle variazioni.

Allorchè si conoscono sopra una superficie algebrica, due integrali semplici di 1.ª specie, funzionalmente indipendenti, si può formare, con NOETHER (***), un ben determinato integrale doppio di 1.ª specie, che deriva razionalmente da quelli.

(*) *Sur une nouvelle méthode de calcul intégral pour les différentielles affectées d'un radical carré sous lequel la variable ne passe pas le quatrième degré* (Mémoires de l'Ac. royale de Turin, t. II, 1784-85; *Oeuvres,* t. II, p. 253).

(**) Un aneddoto, forse poco noto, che riconferma la grande considerazione in cui LAGRANGE era tenuto anche da'suoi contemporanei, è raccontato dal BRUNACCI. «Napoleone, essendo in Milano, volle sostenere al Brunacci, che la Francia primeggiava sopra l'Italia in forza di matematiche. Il Brunacci rispose francamente: *che se gli rendeva Lagrange — Italiano — si sarebbe battuto*». (Ved. MORENA, *Vittorio Fossombroni economista*, Arezzo, tipografia Bellotti, 1896.)

(***) *Ueber die totalen algebraischen Differentialausdrücke*, Math. Ann., Bd. 29 (1886). — Vedi pure: PICARD et SIMART, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, Paris, Gauthier-Villars, t. I (1897), p. 139.

Nei più recenti sviluppi di geometria sopra una superficie, tale relazione tra integrali semplici e doppi, ha costituito spesso il punto di partenza di notevoli applicazioni.

In questo lavoro mi propongo di mostrare l'esistenza di legami analoghi tra gl'integrali semplici e gl'integrali multipli di 1.ª specie — doppi, tripli,..., k-pli — di una varietà algebrica W_k, a k dimensioni: legami che permettono appunto di costruire razionalmente, in modo immediato, un integrale s-plo di 1.ª specie, appena sieno noti s integrali semplici di 1.ª specie, funzionalmente indipendenti.

La via che si segue per stabilire la relazione di Noether sulle superficie, si può senza dubbio estendere, senza troppe difficoltà; e conduce ad un legame tra gl'integrali semplici e gl'integrali k-pli. Ma nei casi intermedi degli integrali doppi, tripli,..., $(k-1)$-pli, la via stessa è, per ora almeno, addirittura impraticabile, se non altro perchè non si sanno assegnare le *forme normali* di questi integrali intermedi.

Io dunque ho creduto opportuno di riprendere *ex-novo* la questione anche per le superficie, cercando di riattaccare la relazione di Noether a proprietà geometriche della superficie, piuttosto che a proprietà algoritmiche di certi polinomi, come nella trattazione consueta. Ed in tal modo ho ottenuto un procedimento estensibile agl'integrali multipli, di ogni rango, appartenenti ad una varietà.

Dimostro in primo luogo, per via sintetica, che una superficie F d'irregolarità $p > 0$, può sempre considerarsi come la trasformata razionale di una superficie Φ, *di eguale irregolarità*, appartenente alla varietà di Picard V_p, annessa ad F. Va eccettuato soltanto il caso in cui F possegga un fascio irrazionale di genere p: in tal caso F è la trasformata razionale di una curva di genere p, tracciata su V_p, e tutti gl'integrali semplici di 1.ª specie di F son funzioni di uno tra essi.

Indicando con u_1, u_2 due dei p integrali semplici di 1.ª specie di V_p, gli integrali doppi di 1.ª specie della varietà (che è abeliana) saran del tipo $\iint d u_1 \, d u_2$; e gli uni e gli altri subordineranno su Φ integrali semplici e doppi, i quali alla lor volta si trasformano in integrali analoghi di F. Anzi, dal momento che Φ, F hanno la stessa irregolarità, *tutti* gl'integrali semplici di 1.ª specie di F, si ottengono nel modo indicato dagl'integrali semplici u di V_p (mentre lo stesso non potrebbe dirsi degl'integrali doppi).

Eseguendo la sostituzione razionale che fa passare da Φ ad F, ne segue subito che il determinante jacobiano di due integrali semplici di 1.ª specie della F — supposta immersa in S_3 e di equazione $F(x, y, z) = 0$ — rispetto alle due variabili indipendenti x, y, è la funzione integranda di un integrale doppio di 1.ª specie. Ed è questo appunto il legame scoperto da NOETHER.

Estendo poi alle varietà il procedimento sviluppato per le superficie, provando prima che la data W_k, d'irregolarità superficiale $p > 0$, può considerarsi come la trasformata razionale di una varietà Φ'_k, di eguale irregolarità superficiale, tracciata sulla varietà di PICARD V_p, relativa a W_k; a meno che non accada che W_k contenga un sistema ∞^{k-i} $(1 \leq i \leq k-1)$ d'indice 1, di varietà M_i, avente la stessa irregolarità bidimensionale p. Nel qual caso W_k è la trasformata razionale di una Φ_{k-i}, d'irregolarità superficiale p, tracciata su V_p e $k - i + 1$ integrali semplici di 1.ª specie di W_k son sempre funzionalmente dipendenti.

Da ciò, tenendo conto che gl'integrali doppi, tripli, ..., di 1.ª specie di V_p, son del tipo:

$$\int\!\!\int d\,u_1\, d\,u_2, \quad \int\!\!\int\!\!\int d\,u_1\, d\,u_2\, d\,u_3, \ldots,$$

ove u_1, u_2, ..., sono i p integrali semplici di 1.ª specie, deduco la costruzione razionale di integrali doppi, tripli, ..., di 1.ª specie della W_k, a partire da' suoi integrali semplici.

Il teorema geometrico che pongo a fondamento della ricerca, è già di per sè interessante, in quanto da esso possono trarsi varie conseguenze, tra le quali cito, a titolo d'esempio, questa: una superficie irregolare non può possedere un'infinità (neanche discontinua) di curve razionali, senza essere trasformabile birazionalmente in una rigata (irrazionale). La proprietà analoga non sussiste per le superficie regolari.

1. **Caratterizzazione d'una superficie F d'irregolarità $p > 0$, che contenga un fascio di genere p, mediante i sistemi continui ∞^1 di curve tracciate su F.** Supponiamo anzitutto che sulla F esista un sistema algebrico ∞^1, Σ, di curve algebriche A non equivalenti, tale che fra le ∞^2 curve B costituite dalle A passanti pei singoli punti di F, ve ne sieno ∞^1 equivalenti ad una prefissata B, che provenga da un punto generico P di F. Allora i punti P relativi alle ∞^1 B equivalenti tra loro, riempiono una curva algebrica C, variabile in un fascio, necessariamente irrazionale, perchè altrimenti (*) le B, e quindi le A, sarebbero a due a due equivalenti.

(*) Cfr. SEVERI, a) *Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche.* Questi Annali, (3), t. XII, (1905), n.i 1, 6, ed anche: b) *Osservazioni varie di geometria sopra una superficie algebrica e sopra una varietà.* Atti del R. Istituto veneto di scienze, lettere ed arti, t. LXV (1906).

Prendiamo ora su F un sistema continuo completo $\{A\}$, di curve A, costituito da ∞^p sistemi lineari distinti, e supponiamo che, scelto *comunque* entro $\{A\}$ un sistema algebrico ∞^1, Σ, esso goda *sempre* della proprietà sopra indicata. Esisterà allora un fascio irrazionale $\{C\}$, tale che le curve di Σ passanti per un punto P di una C, segheranno ivi un gruppo, il quale, al variare di P su C, si muoverà entro una serie lineare. Donde segue (*) che le A di Σ tagliano su una C qualunque gruppi equivalenti, cioè (**) che esse differiscono per curve C.

Nulla ci vieta di supporre che il sistema Σ possa variare entro $\{A\}$ in una serie algebrica di sistemi analoghi, che invadano complessivamente tutto $\{A\}$, e che contengano una curva fissa A_0. Ciò invero equivale ad affermare che la varietà irriducibile V_p, i cui punti rappresentano gli ∞^p sistemi lineari $\{A\}$, può descriversi tutta mediante una famiglia algebrica di curve (algebriche) passanti per un punto di V_p. In realtà ad ognuna delle curve di quella famiglia, risponderebbe su F non un sistema ∞^1 di curve A, ma una serie ∞^1 di sistemi lineari completi $|A|$. Poichè i sistemi generici $|A|$ hanno la stessa dimensione r, fissati su F r punti generici, si staccherà da ogni $|A|$ una curva e così ci ridurremo a sistemi ∞^1, Σ, di curve A.

Quando Σ descrive il sistema continuo $\{A\}$, il fascio irrazionale $\{C\}$ non può variare, perchè altrimenti descriverebbe un sistema continuo più ampio, mentre $\{C\}$ è già completo. Sopra ogni C le curve di un sistema Σ segano una serie di gruppi equivalenti al gruppo fisso $(A_0\,C)$; cioè tutte le curve di $\{A\}$ staccano sopra una C gruppi equivalenti, ed esse, pertanto, differiscono a due a due per curve C.

Ciò significa insomma che i sistemi $\{A\}$ si ottengono tutti da uno generico di essi, e sia $|A_0|$, aggiungendo e togliendo gruppi di un egual numero ν di curve C.

Osserviamo ora che se si sostituisce ad uno di questi due gruppi di ν curve C, un gruppo equivalente (entro l'ente $\infty^1\{C\}$), il sistema $|A|$, che si ottiene da $|A_0|$, non s'altera, per guisa che i sistemi distinti $|A|$ risultano tanti quante le serie lineari distinte d'ordine ν, entro l'ente $\infty^1\{C\}$. Sia π il genere del fascio. Se fosse $\nu < \pi$, le suddette serie d'ordine ν sarebbero ∞^ν,

(*) Loc. cit. a pag. 203 *a*) n. 1. Vedi pure la dimostrazione geometrica di CASTELNUOVO, *Sulle serie algebriche di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica* [Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, (5), t. XV, (1906)].

(**) Loc. cit. a pag. 203 *a*) n. 6.

cioè sarebbe $p < \pi$, il che è assurdo. È dunque $\nu \geq \pi$ e le serie d'ordine ν, sono ∞^{π}. Ne segue $p = \pi$.

La proprietà s'inverte subito. Presa infatti sulla F d'irregolarità p, una curva A d'ordine maggiore delle eventuali curve canoniche di F (non depurate dalle curve eccezionali) e di dimensione virtuale non negativa, potrà sempre considerarsi il sistema lineare $|A + H - K|$ (*), ove H, K siano due qualunque gruppi di p curve C di un fascio di genere p, esistente su F. Tenendo fisso H e facendo variare K, si otterranno così tutti gli ∞^p sistemi lineari costituenti il sistema continuo completo $\{A\}$, il che significa che le A tagliano gruppi a due a due equivalenti sopra ogni C. Ne deriva che, preso entro $\{A\}$ un sistema ∞^1, Σ, di curve non equivalenti, se si chiamano omologhi un punto di una fissata C ed una curva di Σ, quando si appartengono, la corrispondenza tra i due enti ∞^1 C, Σ, è a valenza zero in un senso e quindi (**) anche nel senso opposto; cioè i gruppi di curve A passanti pei singoli punti di C sono equivalenti entro l'ente Σ, e sono perciò equivalenti, anche come curve di F.

Possiamo pertanto enunciare:

I. *Sopra una superficie F d'irregolarità $p > 0$, le due proprietà:*

1) *Ogni sistema ∞^1 di curve A, non equivalenti, tolte da un sistema continuo completo di ∞^p sistemi lineari, è tale che la curva composta dalle A per un punto generico di F, è equivalente ad ∞^1 curve analoghe;*

2) *La superficie contiene un fascio irrazionale di genere p;*

sono l'una conseguenza dell'altra.

2. **Trasformazione di una superficie irregolare F in un'altra appartenente alla varietà picardiana di F.** Sia ora una superficie d'irregolarità $p > 1$, non contenente un fascio di genere p (***). Allora considerando su F un sistema completo $\{A\}$ di ∞^p sistemi lineari (non composti con un'involuzione di F), un generico sistema $\Sigma\,\infty^1$, formato da curve A, non equivalenti, ***non*** godrà della proprietà 1) dell'enunciato precedente; e poichè neppur può darsi che sieno equivalenti a due a due le ∞^2 curve B formate colle $m\,(> 1)$ A uscenti dai punti di F (****), accadrà che ogni B sarà equivalente ad un numero finito $n \geq 1$ di curve analoghe. Indicheremo con Σ' il sistema delle ∞^2 B.

(*) Severi, *Sulle curve algebriche virtuali appartenenti ad una superficie algebrica.* Rend. del R. Ist. Lombardo, (2), t. XXXVIII (1905), p. 864.

(**) *Il teorema d'Abel*, ecc. (citato), n. 2.

(***) L'ipotesi $p = 1$ rientra nell'analisi del numero precedente, perchè in tal caso F possiede sempre un fascio ellittico di curve.

(****) *Il teorema d'Abel,* ecc., n. 9, *c*).

Se la dimensione virtuale di un sistema lineare $|A|$ non è negativa, risulterà *a fortiori* non negativa la dimensione virtuale di un sistema lineare $|B|$, perchè essa uguaglia quella di $|mA|$, onde (*) i $|B|$ apparterranno ad un sistema continuo completo contenente ∞^p sistemi lineari distinti.

Consideriamo la varietà V_p di PICARD, i cui punti rappresentano i sistemi $|B|$. Alle curve B di Σ' o meglio ai sistemi $|B|$ da esse individuati, risponde in V una *superficie* Φ, la quale risulta riferita razionalmente ad F, ad ogni punto di F rispondendo una B di Σ' e quindi un punto di Φ, mentre ogni punto di Φ proviene dagli n punti di F relativi a curve B equivalenti tra loro. Si conclude che:

II. *Una superficie F d'irregolarità $p > 0$ o contiene un fascio di genere p, oppure può considerarsi come la trasformata razionale di una superficie, di eguale irregolarità, appartenente alla varietà picardiana di F* (**).

L'affermazione, inclusa in quest'enunciato, che la Φ abbia la stessa irregolarità di F, verrà subito giustificata nelle linee seguenti.

3. **Deduzione dell'identità di Noether.** Conserviamo ancora le ipotesi e le notazioni del numero precedente, e osserviamo, in primo luogo, che gli integrali semplici di 1.ª specie, $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_p$, appartenenti a V, staccano su Φ altrettanti integrali di 1.ª specie linearmente *indipendenti*, perchè in caso contrario Φ apparterrebbe ad una varietà invariante per un sottogruppo (algebrico) del gruppo abeliano formato dalle ∞^p trasformazioni birazionali che mutano in sè V_p, e quindi il sistema Σ di curve A, dal quale siamo partiti, sarebbe particolare entro $|A|$ (***).

I p integrali che così s'ottengono su Φ, mediante la sostituzione razionale tra Φ, F, si mutano nei p integrali distinti di 1.ª specie della $F: I_1, I_2, \ldots, I_p$. Alla lor volta i $\binom{p}{2}$ integrali doppi di 1.ª specie appartenenti a V, che son del tipo (****)

$$\int\int d\,u_1\,d\,u_2, \tag{1}$$

(*) SEVERI, *Sul teorema di Riemann-Roch e sulle serie continue di curve appartenenti ad una superficie algebrica* (Atti della R. Acc. di Torino, t. XL (1905), n. 6.

(**) Pel caso $p=2$, cfr. CASTELNUOVO, *Sugli integrali semplici appartenenti ad una superficie irregolare*. Rend. della R. Acc. dei Lincei, (5), t. XIV (1905), p. 661.

(***) È questa un'affermazione pressochè intuitiva, la quale del resto trovasi completamente giustificata, sotto altra forma, in CASTELNUOVO, *Sugli integrali semplici*, ecc., n. 12, p. 657.

(****) Cfr., p. es., SEVERI, *Sulle superficie che rappresentano le coppie dei punti di una curva algebrica*. Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, t. XXXVIII (1903), n. 9.

staccano su Φ degli integrali doppi di 1.ª specie, che però posson ridursi a costanti o essere linearmente dipendenti. Comunque sia gl'integrali doppi che così s'ottengono su Φ, si trasformano razionalmente in altrettanti integrali di F, ciascuno dei quali, appunto perchè proviene, mediante una sostituzione razionale, da un integrale del tipo (1), avrà la forma:

$$\int\int \frac{D(I_1, I_2)}{D(x, y)} dx\, dy,$$

ove si supponga che

$$F(x, y, z) = 0$$

sia l'equazione della F (in S_3) e $\frac{D(I_1, I_2)}{D(x, y)}$ denoti il determinante funzionale di I_1, I_2 rispetto alle variabili indipendenti x, y.

Scrivendo gl'integrali I_1, I_2 sotto la forma

$$I_1 = \int \frac{A_1\, dx + B_1\, dy}{F'_z}, \quad I_2 = \int \frac{A_2\, dx + B_2\, dy}{F'_z},$$

ove $A_1 = 0$, $B_1 = 0$, $A_2 = 0$, $B_2 = 0$ son superficie d'ordine $n - 2$, aggiunte alla F, d'ordine n, e soddisfacenti alle debite condizioni (*), perveniamo dunque alla relazione

$$A_1 B_2 - A_2 B_1 = F'_z\, Q,$$

ove $Q = 0$ è una superficie d'ordine $n - 4$ aggiunta ad F.

Resta così dimostrata, in modo sintetico, la ben nota relazione di Noether.

È appena necessario d'avvertire che questa relazione vale anche nel caso escluso dal ragionamento precedente, cioè quando F contiene un fascio di genere p, poichè in tal caso gl'integrali semplici di F son funzioni l'uno dell'altro e si ha identicamente:

$$A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0,$$

che è un caso particolare della precedente relazione (Q è identicamente nullo).

4. Alcune conseguenze del teorema II. Prima di passare ad estendere la relazione stessa alle varietà superiori, rileviamo in modo esplicito qualche interessante conseguenza del teorema II.

(*) Severi, *Sur les intégrales simples de première espèce attachées à une surface algébrique.* Comptes rendus, t. 152 (1911), p. 1079.

Poichè una varietà di PICARD non contiene curve razionali, neppur la Φ, di cui si parla al n. 2, potrà possedere curve razionali e quindi F potrà contenere al più un numero finito di curve razionali provenienti dagli eventuali punti fondamentali della trasformazione tra Φ, F.

Che se poi F possiede un fascio di genere p, è evidente che ogni curva razionale di F è fondamentale pel fascio.

Consideriamo ora una F, d'irregolarità $p>0$, possedente un'infinità (anche discontinua) di curve razionali. Non potendo allora esistere la superficie Φ, di cui sopra, F dovrà contenere un fascio di genere p. La generica curva C di questo fascio potrà supporsi irriducibile, perchè altrimenti le C sarebbero composte colle curve di un fascio di genere π, e da un lato, per la formola di ZEUTHEN, non potrebbe essere $p>\pi$, e d'altro lato, pel fatto che p è l'irregolarità di F, non potrebbe essere $\pi>p$. Cosicchè risulterebbe $\pi=p=1$ e, ad ogni modo, la superficie F, d'irregolarità 1, conterrebbe un fascio irriducibile di genere uguale all'irregolarità.

Ciò premesso, suppongasi, se è possibile, che il genere delle C sia $\rho>0$. Allora nel fascio vi saranno infinite curve riducibili, contenenti come parti le curve razionali di F. Ma ciò è assurdo, perchè un fascio irriducibile possiede soltanto un numero finito ($\geqq 0$) di curve riducibili.

Si conclude pertanto che, nel caso in esame, F contiene un fascio di genere p di curve razionali, e quindi (*) ch'essa è birazionalmente identica ad una rigata. Riassumendo:

Una superficie d'irregolarità $p>0$ che contenga una curva razionale (non eccezionale) o possiede un'involuzione d'irregolarità p o un fascio di genere p.

Una superficie d'irregolarità $p>0$, che contenga una infinità (anche discontinua) di curve razionali, è trasformabile birazionalmente in una rigata (**).

(*) ENRIQUES, *Sulle superficie algebriche che contengono un fascio di curve razionali.* Math. Annalen, Bd. 52 (1899), p. 449.

(**) Nel caso in cui le curve razionali formino un sistema continuo, la cosa era nota. Vedi CASTELNUOVO-ENRIQUES, *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche.* Questi Annali (3), t. VI (1901), n. 17. Dal teorema del testo segue in particolare il teorema di CASTELNUOVO-ENRIQUES, che *una superficie con infinite curve eccezionali, appartiene alla classe delle rigate* (razionali o no). Basta infatti presupporre il teorema di CASTELNUOVO, circa le condizioni di razionalità d'una superficie ($p_a=P_2=0$) per dedurre subito il teorema riferito, anche per le superficie regolari (il teorema del testo risolvendo la questione soltanto per le superficie irregolari). E invero una superficie regolare con infinite curve eccezionali ha necessariamente tutti i generi nulli.

Per una superficie regolare il fatto analogo non si verifica, se non quando le infinite curve razionali sieno eccezionali. Per es. una superficie del 4.° ordine possedente una conica, possiede in conseguenza infinite curve razionali, e non è trasformabile in una rigata.

Osserviamo inoltre che se F, cioè la varietà di PICARD V_p e quindi anche la superficie Φ, non posseggono integrali riducibili, sulla Φ non possono esistere curve in cui i p integrali semplici di 1.ª specie sieno linearmente dipendenti (*): donde segue che F non potrà contenere curve di genere $\pi < p$, all'infuori delle eventuali curve isolate fondamentali per l'involuzione J_n, i cui punti rispondono a quelli di Φ. E ciò perchè ad una curva di genere $\pi < p$ di F, che non fosse fondamentale per J_n, risponderebbe su Φ una curva di genere $\rho \leq \pi$, e sulla curva stessa i p integrali semplici di Φ non potrebbero esser indipendenti.

Nel caso poi in cui F possegga un fascio di genere p, è ben chiaro che ogni curva di genere $\pi < p$, tracciata su F, è fondamentale pel fascio e quindi isolata. Si conclude che:

Sopra una superficie F d'irregolarità $p > 0$, che non possegga sistemi d'integrali semplici di 1.ª specie riducibili, il genere di una curva tracciata su F e variabile in un sistema continuo, non può scendere al disotto di p. E qualora esistano curve (isolate e non eccezionali) di genere $\pi < p$, la superficie contiene in conseguenza o un'involuzione d'irregolarità p o un fascio di genere p.

5. **Caratterizzazione d'una varietà irregolare che contenga un sistema d'indice 1, della stessa irregolarità, di varietà subordinate.** Il ragionamento del n. 1 si estende facilmente. Se sopra una varietà irriducibile W_k, a k dimensioni, d'irregolarità superficiale $p > 0$, esiste un sistema algebrico ∞^1, Σ, di varietà a $k-1$ dimensioni, A, tale che fra le ∞^k varietà B formate dalle A passanti pei singoli punti di W, ve ne sieno ∞^i $(1 \leq i \leq k-1)$ equivalenti ad una di esse, che provenga da un punto P di W, i punti P relativi alle B equivalenti, riempiono una varietà C ad i dimensioni, variabile in un sistema ∞^{k-i} d'indice 1.

Supponiamo che la proprietà stessa sia verificata allorquando Σ sia scelto comunque entro un sistema algebrico $\{A\}$, formato da ∞^p sistemi lineari distinti. Allora, ripetendo un ragionamento che ho già esposto altrove (**), si vede

(*) CASTELNUOVO, *Sugli integrali semplici*, ecc. (citato), p. 594.

(**) *Sulle superficie e varietà algebriche irregolari di genere geometrico nullo*, Rend. della R. Acc. dei Lincei, (5), t. XX (1911), n. 6.

che le varietà A segano varietà equivalenti sopra le ∞^{k-i} varietà C, di dimensione i, di un sistema Γ d'indice 1, talchè esse differiscono per varietà composte mediante le C (*). E si conclude, come nella mia Nota lincea citata, che il sistema Γ, considerato come varietà di elementi C, ha la stessa irregolarità p di W_k (si dovrà dire che p è il genere di Γ, quando $i = k - 1$).

La proprietà s'inverte come al n. 1, con pochi cambiamenti. Basta prendere sulla W_k, d'irregolarità p, un sistema continuo $\{A\}$ costituito da ∞^p sistemi lineari e contenente parzialmente tutto un sistema $\{H\}$ composto mediante le C e costituito pure da ∞^p sistemi lineari. A tal uopo si potrà scegliere p. es. come sistema $\{A\}$ quello determinato dalle sezioni di W_k colle forme d'un ordine abbastanza alto, rispetto all'ordine delle H prefissate. Dette allora H_0, H_1 due particolari H, esisterà il sistema lineare $|A + H_0 - H_1|$ e, al variare di $|H_1|$ in $\{H\}$, questo sistema lineare descriverà tutto il sistema $\{A\}$, le cui varietà verranno pertanto a segare sulle C varietà equivalenti.

Si conclude che:

III. *Per una varietà W_k d'irregolarità bidimensionale $p > 0$, le due proprietà:*

1) *Ogni sistema ∞^1 di varietà A, a $k-1$ dimensioni, non equivalenti, tolto da un sistema continuo completo di ∞^p sistemi lineari, tracciati su W, è tale che la varietà costituita dalla A per un punto generico, è equivalente ad ∞^i $(1 \leq i \leq k-1)$ varietà analoghe.*

2) *La W contiene un sistema ∞^{k-i} d'indice 1 di varietà ad i dimensioni, avente anch'esso l'irregolarità bidimensionale p;*

sono conseguenza l'una dell'altra.

6. **Trasformazione razionale d'una varietà irregolare W_k in un'altra appartenente alla varietà picardiana di W_k.** Escludiamo che la W, di irregolarità $p \geq k$, contenga un sistema come quello indicato in III 2) (**). Si potrà allora estendere parola per parola il ragionamento del n. 2, con questa sola avvertenza: che per concludere, com'è necessario, che il sistema completo $\{B\}$ contiene ∞^p sistemi lineari distinti, basterà prendere come sistema $\{A\}$ quello che contiene totalmente le sezioni di W colle forme di un ordine così alto, che i sistemi continui determinati da esse e dalle sezioni colle forme degli ordini successivi, sieno tutti costituiti da ∞^p sistemi lineari.

(*) Severi, *Alcune relazioni di equivalenza tra gruppi di punti di una curva algebrica o tra curve di una superficie.* Atti del R. Ist. Veneto, t. LXX (1911), n. 6.

(**) Se $p < k$, si ha necessariamente una W_k soddisfacente alle proprietà 1) 2) del teor. III. Cfr. *Sulle superficie e varietà algebriche irregolari*, ecc. (citato), n. 6.

Si potrà pertanto enunciare:

IV. *Una varietà W_k d'irregolarità bidimensionale $p > 0$ o contiene un sistema ∞^{k-i}, d'indice 1, di varietà ad i dimensioni, avente anch'esso l'irregolarità bidimensionale p $(1 \leq i \leq k-1)$, oppure può considerarsi come trasformata razionale di una varietà Φ, della stessa irregolarità superficiale, e appartenente alla varietà picardiana di W. Si verifica sempre la prima parte dell'alternativa, quando $p < k$.*

7. **Relazioni tra integrali semplici e multipli di 1.ª specie di una varietà.** Quando W è birazionalmente identica ad una varietà Φ, a k dimensioni, tracciata sulla varietà di Picard V_p, relativa a W, ogni integrale t-plo $(t \leq k)$ di 1.ª specie di V_p, che è del tipo

$$\int d\,u_1\, d\,u_2 \ldots d\,u_t, \tag{2}$$

ove $u_1, u_2, \ldots, u_p$ sono i p integrali semplici di 1.ª specie appartenente a V, stacca su Φ un integrale di 1.ª specie (in particolare costante). Per cui se

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}) = 0$$

è l'equazione di W_k (nello S_{k+1}) e si prendono come variabili indipendenti $x_1, x_2, \ldots, x_k$, mediante la sostituzione razionale tra Φ e W, da (2) ricaveremo un integrale t-plo di 1.ª specie di W:

$$J = \int \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_t} \frac{D(I_1, I_2, \ldots, I_t)}{D(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_t})}\, d\,x_{\lambda_1}\, d\,x_{\lambda_2} \ldots d\,x_{\lambda_t},$$

ove $I_1, I_2, \ldots, I_p$ sono i p integrali semplici di 1.ª specie di W — che corrispondono agli integrali $u_1, u_2, \ldots, u_p$ di V_p — $\lambda_1\,\lambda_2 \ldots \lambda_t$ rappresenta una disposizione semplice degli indici $1, 2, \ldots, k$ e $\dfrac{D(I_1, I_2, \ldots, I_t)}{D(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_t})}$ è il determinante funzionale delle $I_1, \ldots, I_t$ rispetto alle variabili indipendenti $x_{\lambda_1}, \ldots, x_{\lambda_t}$.

Ponendo:

$$I_h = \int \sum_{j=1}^{k} A_{hj}\, d\,x_j \quad (h = 1, 2, \ldots, p),$$

verrà:

$$J = \int \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_t} \begin{vmatrix} A_{1\lambda_1} & A_{1\lambda_2} & \ldots & A_{1\lambda_t} \\ A_{2\lambda_1} & A_{2\lambda_2} & \ldots & A_{2\lambda_t} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{t\lambda_1} & A_{t\lambda_2} & \ldots & A_{t\lambda_t} \end{vmatrix} d\,x_{\lambda_1}\, d\,x_{\lambda_2} \ldots d\,x_{\lambda_t}. \tag{3}$$

Agl'integrali semplici di 1.ª specie appartenenti a W, restano pertanto associati degli integrali doppi, tripli, ..., k-pli di 1.ª specie, che si costruiscono razionalmente, in modo ben determinato, a partire dagl'integrali semplici. Un integrale del tipo (3) riducesi ad una costante allora e solo allora che i t integrali $I_1, I_2, \ldots I_t$, considerati come funzioni delle $x_1, x_2, \ldots, x_k$, son fra loro funzionalmente dipendenti.

8. Lo stesso modo di costruzione indicato per gl'integrali multipli di 1.ª specie vale anche nel caso, che ora vogliamo esaminare, in cui W contenga un sistema $\Gamma \infty^l$ $(l = k - i,\ 1 \leq i \leq k-1)$, d'indice 1, d'irregolarità bidimensionale p, costituito da varietà C ad i dimensioni.

Anzitutto in quest'ipotesi si vede agevolmente, come ho mostrato al n. 8 della mia Nota lincea citata, che $l+1$ integrali semplici di 1.ª specie di W son sempre funzionalmente dipendenti, eccettuato il caso ovvio in cui, essendo $p < k$, W contiene un sistema $\Gamma \infty^p$ $(l = p)$, d'irregolarità bidimensionale p, formato da varietà a $k-p$ dimensioni. Nel caso generale si può dire senz'altro che l'integrale (3), per $t \geq l+1$, è di 1.ª specie (è anzi una costante); nel caso eccezionale d'altra parte è sempre $t \leq l$. Cosicchè, per dimostrare in ogni caso che un integrale del tipo (3) è sempre di 1.ª specie, basterà che ci limitiamo all'ipotesi $t \leq l$.

Diciamo V_l una varietà i cui punti rappresentino birazionalmente le varietà C di Γ e supponiamo d'avere stabilito la relazione in questione per tutte le varietà irregolari di dimensione $< k$, e quindi in particolare per V_l.

Sieno

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}) = 0, \quad \varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{l+1}) = 0$$

le equazioni di W_k, V_l, che supponiamo rispettivamente immerse in S_{k+1} e in S_{l+1}. Gl'integrali semplici di 1.ª specie di W_k proverranno *tutti* dagl'integrali semplici

$$\int \sum_{j=1}^{l} B_{sj}\, d\xi_j \quad (s = 1, 2, \ldots, p) \tag{4}$$

di 1.ª specie di V_l, mediante la sostituzione razionale:

$$\xi_1 = \xi_1(x_1, \ldots, x_{k+1}), \ldots, \xi_{l+1} = \xi_{l+1}(x_1, \ldots, x_{k+1}), \tag{5}$$

che lega W e V. E similmente dagl'integrali doppi di 1.ª specie di V si otterranno integrali doppi di 1.ª specie (ma non necessariamente tutti quelli di W_k); e così per gli altri integrali multipli.

Consideriamo l'integrale t-plo ($t \leq l$) di 1.ª specie di V_l:

$$\int \sum_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_t} \begin{vmatrix} B_{1\mu_1} B_{1\mu_2} \ldots B_{1\mu_t} \\ \ldots\ldots\ldots \\ B_{t\mu_1} \ldots\ldots B_{t\mu_t} \end{vmatrix} d\,\xi_{\mu_1}\, d\,\xi_{\mu_2} \ldots d\,\xi_{\mu_t}. \tag{6}$$

Operando colla sostituzione (5), questo si trasformerà nell'integrale di W_k:

$$J = \int \sum_{\mu_1 \ldots \mu_t} \begin{vmatrix} B_{1\mu_1} \ldots B_{1\mu_t} \\ \ldots\ldots \\ B_{t\mu_1} \ldots B_{t\mu_t} \end{vmatrix} \sum_{\lambda_1 \ldots \lambda_t} \frac{D(\xi_{\mu_1}, \xi_{\mu_2}, \ldots, \xi_{\mu_t})}{D(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_t})} d\,x_{\lambda_1}\, d\,x_{\lambda_2} \ldots d\,x_{\lambda_t} =$$

$$= \int \sum_{\lambda_1 \ldots \lambda_t} \left\| \begin{matrix} B_{11}\, B_{12} \ldots B_{1l} \\ \ldots\ldots\ldots \\ B_{t1}\, B_{t2} \ldots B_{tl} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \frac{d\,\xi_1}{d\,x_{\lambda_1}} \ldots \frac{d\,\xi_l}{d\,x_{\lambda_1}} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \frac{d\,\xi_1}{d\,x_{\lambda_t}} \ldots \frac{d\,\xi_l}{d\,x_{\lambda_t}} \end{matrix} \right\| d\,x_{\lambda_1}\, d\,x_{\lambda_2}\, d\,x_{\lambda_t}.$$

Facendo il prodotto per orizzontali delle due matrici, verrà:

$$J = \int \sum_{\lambda_1 \ldots \lambda_t} \begin{vmatrix} A_{1\lambda_1} A_{1\lambda_2} \ldots A_{1\lambda_t} \\ \ldots\ldots\ldots \\ A_{t\lambda_1} A_{t\lambda_2} \ldots A_{t\lambda_t} \end{vmatrix} d\,x_{\lambda_1}\, d\,x_{\lambda_2}\, d\,x_{\lambda_t},$$

ove si è posto:

$$A_{hr} = \sum_{s=1}^{l} B_{hs} \frac{d\,\xi_s}{d\,x_r}.$$

E poichè gl'integrali semplici

$$\int \sum_{j=1}^{k} A_{hj}\, d\,x_j \quad (h = 1, 2, \ldots, p)$$

sono, come si è detto, tutti gl'integrali semplici di 1.ª specie di W_k, possiamo infine enunciare il teorema generale:

V. *Sieno*

$$\int \sum_{j=1}^{k} A_{hj}\, d\,x_j \quad (h = 1, 2, \ldots, p)$$

gl'integrali semplici di 1.ª specie, appartenenti ad una varietà W a k dimensioni, d'irregolarità superficiale $p > 0$. Allora a W appartengono in conseguenza alcuni integrali doppi, tripli,..., k-pli di 1.ª specie, che si formano razio-

nalmente a partire dagl'integrali suddetti. Quest'integrali multipli son del tipo:

$$\int \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_t} \begin{vmatrix} A_{1\lambda_1} \ldots A_{1\lambda_t} \\ \cdots\cdots \\ A_{t\lambda_1} \ldots A_{t\lambda_t} \end{vmatrix} d\,x_{\lambda_1}\, d\,x_{\lambda_2} \ldots d\,x_{\lambda_t} \quad (t = 2, \ldots, k),$$

ove $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_t$ *è una disposizione semplice degli indici* $1, 2, \ldots, k$.

9. **Verificazione diretta delle condizioni d'integrabilità.** Il fatto che gl'integrali multipli costruiti secondo il teor. V, soddisfacciano alle condizioni d'integrabilità assegnate da POINCARÉ (*), è senz'altro implicitamente racchiuso nel teorema dimostrato. Ma val la pena di osservare che questo fatto è indipendente dall'algebricità della questione. Si può cioè stabilire in generale che:

Se le p forme differenziali lineari, linearmente indipendenti

$$d\,u_1 = \sum_{r=1}^{k} A_{1r}\, d\,x_r, \ldots, d\,u_p = \sum_{r=1}^{k} A_{pr}\, d\,x_r,$$

ove le A son funzioni analitiche qualunque delle variabili indipendenti $x_1, x_2, \ldots, x_k$, *soddisfanno alle condizioni d'integrabilità, lo stesso accade per le forme del tipo*

$$\sum_{r,s} \frac{D(u_1, u_2)}{D(x_r, x_s)}\, d\,x_r\, d\,x_s, \quad \sum_{r,s,t} \frac{D(u_1, u_2, u_3)}{D(x_r, x_s, x_t)}\, d\,x_r\, d\,x_s\, d\,x_t, \text{ ecc.}$$

Per brevità espongo la dimostrazione nel caso della forma quadratica

$$\sum_{r,s} \frac{D(u_1, u_2)}{D(x_r, x_s)}\, d\,x_r\, d\,x_s, \tag{7}$$

giacchè anche in generale il ragionamento corre allo stesso modo.

Osserviamo anzitutto che le condizioni d'integrabilità sono invarianti di fronte ad un cangiamento di variabili. Per convincersene basta p. es. riflettere ch'esse equivalgono ad affermare che il valore dell'integrale

$$\int\int \sum_{r,s} \frac{D(u_1, u_2)}{D(x_r, x_s)}\, d\,x_r\, d\,x_s \tag{8}$$

si conserva immutato per una variazione continua della superficie d'integrazione (per modo da non traversare punti singolari delle A), fermo restando il contorno della superficie stessa.

(*) *Acta mathematica*, t. IX.

Possiamo supporre che le u_1, u_2 sieno funzionalmente indipendenti, giacchè altrimenti si cadrebbe nel caso ovvio in cui l'integrale (8) riducesi ad una costante. Sarà dunque p. es. non identicamente nullo:

$$\frac{D(u_1, u_2)}{D(x_1, x_2)} = \frac{D(u_1, u_2, x_3, \dots, x_k)}{D(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k)},$$

e quindi si potrà passare dalle variabili $x_1, x_2, \dots, x_k$ alle $u_1, u_2, x_3, \dots, x_k$. Con ciò la forma quadratica (7) si muta nella $d u_1 \, d u_2$, per cui sono evidentemente soddisfatte le condizioni d'integrabilità (*).

In forza dell'invarianza di queste condizioni di fronte ai cangiamenti di variabili, risultano soddisfatte le condizioni stesse anche per la forma (7).

Osservazione. Ciò vale nell'intorno di un punto generico del campo di esistenza delle A. Quando le A — come nel caso del teor. V — son funzioni razionali del punto corrente sopra una varietà algebrica irriducibile W, a k dimensioni, ne segue agevolmente che le condizioni d'integrabilità son soddisfatte in ogni punto di W. Infatti esse si esprimono uguagliando a zero certe funzioni razionali, delle quali, per quanto precede, si sa già che posseggono ∞^k zeri (complessi) intorno ad un punto generico di W. Le dette funzioni razionali risultano perciò identicamente nulle su tutta la varietà.

Padova, 15 dicembre 1912.

(*) Non occorre neppure di scrivere in modo esplicito queste condizioni. Basta osservare soltanto ch'esse s'ottengono uguagliando a zero certe espressioni composte linearmente mediante le derivate dei coefficienti della forma.