Ueber gewisse partielle Differentialgleichungen, denen hypergeometrische Integrale genügen.

Von

L. Pochhammer in Kiel.

Es sollen im Folgenden für die hypergeometrischen Integrale von der Form

$$y = \int_g^h (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-a_m)^{b_m-1} (u-v)^{\varkappa-1} (u-x)^{\lambda-1} du$$

partielle Differentialgleichungen, in denen x und v die unabhängigen Variablen sind, abgeleitet werden. Für den Fall $m = 2$ sind diese Gleichungen zuerst von Herrn Appell*) angegeben, dann von Herrn E. Picard**) auf anderem Wege gewonnen worden***).

Die nachstehende Rechnung stützt sich auf eine Modification des Taylor'schen Satzes für ganze algebraische Functionen, die in §§ 1—3 bewiesen wird. In §§ 4 und 5 werden zwei specielle Differentialgleichungen, in § 6 die allgemeinere abgeleitet.

§ 1.

Man bezeichne durch $\varphi(u)$ eine beliebige ganze Function m^{ten} Grades von u und durch x und v zwei von einander und von u unabhängige Variable. Der Coefficient von u^m in $\varphi(u)$ heisse β_0, so

*) „Sur les séries hypergéométriques de deux variables etc.", Comptes Rendus, t. XC, pag. 296 und 731, (1880) und Journal de Liouville (Résal) série 2, t. VIII (1882).

**) „Sur une extension aux fonctions de deux variables du problème de Riemann relatif aux fonctions hypergéométriques", Comptes Rendus, t. XC, pag. 1267, und Annales de l'École Normale, Série 2, t. X.

***) Man vergleiche auch die Abhandlung des Herrn E. Goursat „Sur une classe de fonctions représentées par des integrales définies" im Bd. II der Acta mathem. (1883).

dass der m^{te} Differentialquotient $\varphi^{(m)}(u)$ gleich $\beta_0 \cdot 1 \cdot 2 \cdots m$ ist. Nach dem Taylor'schen Satze hat man die Gleichungen

$$(1)\quad \begin{cases} \varphi(u) = \varphi(x) + \varphi'(x)\,\dfrac{u-x}{1} + \cdots + \varphi^{(m-1)}(x)\,\dfrac{(u-x)^{m-1}}{(m-1)!} + \beta_0 (u-x)^m, \\ \varphi(v) = \varphi(x) + \varphi'(x)\,\dfrac{v-x}{1} + \cdots + \varphi^{(m-1)}(x)\,\dfrac{(v-x)^{m-1}}{(m-1)!} + \beta_0 (v-x)^m, \end{cases}$$

in denen $k!$ das Product $1 \cdot 2 \cdots k$ bedeutet. Wird aus denselben die Grösse $\varphi^{(m-1)}(x)$ eliminirt, indem die mit $\left(\frac{u-x}{v-x}\right)^{m-1}$ multiplicirte zweite Gleichung von der ersten abgezogen wird, so ergiebt sich

$$\varphi(u) - \left(\frac{u-x}{v-x}\right)^{m-1} \varphi(v)$$

$$= \left[1 - \left(\frac{u-x}{v-x}\right)^{m-1}\right] \varphi(x) + (u-x)\left[1 - \left(\frac{u-x}{v-x}\right)^{m-2}\right] \frac{\varphi'(x)}{1} + \cdots$$

$$+ (u-x)^{m-2}\left[1 - \frac{u-x}{v-x}\right] \frac{\varphi^{(m-2)}(x)}{(m-2)!} + \beta_0 (u-x)^{m-1}(u-v).$$

Man nennt zur Abkürzung p und q die Quotienten

$$(2)\qquad p = \frac{u-x}{v-x}, \qquad q = \frac{u-v}{x-v}.$$

Durch Anwendung der Formel

$$1 - p^k = (1-p)(1 + p + p^2 + \cdots + p^{k-1})$$

nimmt, da $1 - p = \frac{v-u}{v-x} = q$ ist, die soeben erwähnte Gleichung die Gestalt

$$\varphi(u) - p^{m-1}\varphi(v) =$$

$$= q \begin{Bmatrix} (1 + p + \cdots + p^{m-2})\varphi(x) + (u-x)(1 + p + \cdots + p^{m-3})\dfrac{\varphi'(x)}{1} + \cdots \\ + (u-x)^{m-3}(1+p)\dfrac{\varphi^{(m-3)}(x)}{(m-3)!} + (u-x)^{m-2}\dfrac{\varphi^{(m-2)}(x)}{(m-2)!} \end{Bmatrix}$$

$$+ \beta_0 (u-x)^{m-1}(u-v)$$

an. Definirt man also $X_0, X_1, X_2, \cdots$ als die Ausdrücke

$$(3)\quad \begin{cases} X_0 = \varphi(x), \quad X_1 = \varphi(x) + \varphi'(x)\,\dfrac{u-x}{1}, \cdots \\ X_k = \varphi(x) + \varphi'(x)\dfrac{u-x}{1} + \varphi''(x)\,\dfrac{(u-x)^2}{1\,.\,2} + \cdots + \varphi^{(k)}(x)\,\dfrac{(u-x)^k}{k!}, \end{cases}$$

so entsteht für $\varphi(u)$ die Gleichung

$$(4)\quad \varphi(u) = \beta_0 (u-v)(u-x)^{m-1} + p^{m-1}\varphi(v)$$
$$+ q \begin{Bmatrix} X_{m-2} + p X_{m-3} + p^2 X_{m-4} + \cdots \\ + p^{m-4} X_2 + p^{m-3} X_1 + p^{m-2} X_0 \end{Bmatrix}.$$

Zu den Gleichungen (1) werde nunmehr die entsprechende Entwickelung von $\varphi'(v)$ nach dem Taylor'schen Satze

$$\varphi'(v) = \varphi'(x) + \varphi''(x)\frac{v-x}{1} + \cdots + \varphi^{(m-2)}(x)\frac{(v-x)^{m-3}}{(m-3)!}$$
$$+ \varphi^{(m-1)}(x)\frac{(v-x)^{m-2}}{(m-2)!} + \beta_0 m(v-x)^{m-1}$$

hinzugenommen. Dann lassen sich die Grössen $\varphi^{(m-1)}(x)$ und $\varphi^{(m-2)}(x)$ fortschaffen, so dass $\varphi(u)$ mit Hülfe von $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\cdots \varphi^{(m-3)}(x)$, $\varphi(v)$ und $\varphi'(v)$ ausgedrückt wird. Man eliminirt zunächst $\varphi^{(m-1)}(x)$ aus der zweiten Gleichung (1) und der obigen Gleichung für $\varphi'(v)$, wodurch die Identität

$$(m-1)\varphi(v) - (v-x)\varphi'(v) =$$
$$= (m-1)\varphi(x) + (m-2)\varphi'(x)\frac{v-x}{1} + (m-3)\varphi''(x)\frac{(v-x)^2}{1.2} + \cdots$$
$$+ 2\varphi^{(m-3)}(x)\frac{(v-x)^{m-3}}{(m-3)!} + \varphi^{(m-2)}(x)\frac{(v-x)^{m-2}}{(m-2)!} - \beta_0(v-x)^m$$

erhalten wird. Indem letztere mit $-p^{m-2}q$ multiplicirt und zu (4) addirt wird, ergiebt sich nach Berücksichtigung von (2)

$$\varphi(u) - \beta_0(u-x)^{m-2}(u-v)^2 - p^{m-2}\left\{[(m-2)q+1]\varphi(v) + \varphi'(v)(u-v)\right\} =$$
$$= q\left\{X_{m-2} + pX_{m-3} + p^2X_{m-4} + \cdots + p^{m-3}X_1 + p^{m-2}X_0\right\}$$
$$- p^{m-2}q\left\{(m-1)\varphi(x) + \cdots + (m-k-1)\varphi^{(k)}(x)\frac{(v-x)^k}{k!} + \cdots\right.$$
$$\left. + \varphi^{(m-2)}(x)\frac{(v-x)^{m-2}}{(m-2)!}\right\}.$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung heben sich die mit $\varphi^{(m-2)}(x)$ multiplicirten Summanden gegenseitig fort. Ist $k < m-2$, so hat die Grösse $q\,\varphi^{(k)}(x)\frac{(u-x)^k}{k!}$ daselbst den (für $p=1$ verschwindenden) Factor

$$1 + p + p^2 + \cdots + p^{m-k-2} - (m-k-1)p^{m-k-2},$$

der auf die Form

$$(1-p)\left\{1 + 2p + 3p^2 + 4p^3 + \cdots + (m-k-2)p^{m-k-3}\right\}$$

gebracht werden kann. Substituirt man daher $1-p=q$, so findet man für die rechte Seite der genannten Gleichung den Ausdruck

$$q^2\begin{Bmatrix} X_{m-3} + 2pX_{m-4} + 3p^2X_{m-5} + \cdots \\ + (m-3)p^{m-4}X_1 + (m-2)p^{m-3}X_0 \end{Bmatrix}.$$

In Analogie zu (3) sollen unter V_0, V_1, V_2, $\cdots$ die Functionen

$$(5)\begin{cases} V_0=\varphi(v), \quad V_1=\varphi(v)+\varphi'(v)\dfrac{u-v}{1}, \cdots \\ V_k=\varphi(v)+\varphi'(v)\dfrac{u-v}{1}+\varphi''(v)\dfrac{(u-v)^2}{1.2}+\cdots+\varphi^{(k)}(v)\dfrac{(u-v)^k}{k!} \end{cases}$$

verstanden werden. Dann hat man gemäss der obigen Rechnung die Formel

$$(6)\qquad \varphi(u)=$$
$$=\beta_0(u-v)^?(u-x)^{m-2}+p^{m-2}\{V_1+(m-2)\,q\,V_0\}$$
$$+q^2\{X_{m-3}+2p\,X_{m-4}+3p^2X_{m-5}+\cdots+(m-2)\,p^{m-3}X_0\},$$

in welcher p und q die Quotienten (2) bedeuten.

In ähnlicher Weise lässt sich die Function $\varphi(u)$ mittelst der Werthe $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\cdots$ $\varphi^{(m-l-1)}(x)$, $\varphi(v)$, $\varphi'(v)$, $\cdots$ $\varphi^{(l-1)}(v)$ ausdrücken, während l eine beliebige der Zahlen $1, 2, 3, \cdots m-1$ ist. Der Herleitung dieser allgemeineren Formel sollen einige einfache Rechnungen vorausgeschickt werden.

§ 2.

Man bezeichne durch $(\alpha)_k$ den Binomialcoefficienten

$$(\alpha)_k=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}, \qquad (\alpha)_0=1,$$

durch Ω die Summe

$$(7)\ \Omega=\begin{cases} (m-1)_{l-1}\,\varphi(v)+(m-2)_{l-2}\,\varphi'(v)\,\dfrac{x-v}{1}+\cdots \\ +(m-k-1)_{l-k-1}\,\varphi^{(k)}(v)\,\dfrac{(x-v)^k}{k!}+\cdots \\ +(m-l+1)_1\,\varphi^{(l-2)}(v)\,\dfrac{(x-v)^{l-2}}{(l-2)!}+\varphi^{(l-1)}(v)\,\dfrac{(x-v)^{l-1}}{(l-1)!}, \end{cases}$$

in der die ganze positive Zahl l kleiner als m ist, und setze für $\varphi(v)$ die Entwickelung (1), für die Differentialquotienten $\varphi^{(k)}(v)$ die entsprechenden Ausdrücke

$$\varphi^{(k)}(v)=\varphi^{(k)}(x)+\varphi^{(k+1)}(x)\frac{v-x}{1}+\cdots+\varphi^{(m)}(x)\frac{(v-x)^{m-k}}{(m-k)!}$$

in die Summe Ω ein. Hierdurch entsteht für Ω die Gleichung

$$\Omega=\omega_0\varphi(x)+\omega_1\varphi'(x)(v-x)+\omega_2\varphi''(x)(v-x)^2+\cdots+\omega_m\varphi^{(m)}(x)(v-x)^m,$$

in welcher $\omega_0, \omega_1, \cdots \omega_m$ Constante bedeuten. Während

$$\omega_0=(m-1)_{l-1}$$

ist, nimmt ω_k im Fall $0<k<l$ den Werth

$$\omega_k = \frac{(m-1)_{l-1}}{k!} - \frac{(m-2)_{l-2}}{(k-1)!\,1!} + \cdots + (-1)^i \frac{(m-i-1)_{l-i-1}}{(k-i)!\,i!} + \cdots + (-1)^k \frac{(m-k-1)_{l-k-1}}{k!}$$

und im Fall $k \geq l$ den Werth

$$\omega_k = \frac{(m-1)_{l-1}}{k!} - \cdots + \frac{(-1)^i (m-i-1)_{l-i-1}}{(k-i)!\,i!} + \cdots + \frac{(-1)^{l-2}(m-l+1)_1}{(k-l+2)!\,(l-2)!} + \frac{(-1)^{l-1}}{(k-l+1)!\,(l-1)!}$$

an. Im ersteren Falle kann man ω_k als das Product aus der Grösse

$$\frac{(m-k-1)(m-k-2)\cdots(m-l+1)}{(l-1)!}$$

und der Summe

$$(m-1)_k - (m-2)_{k-1}(l-1)_1 + \cdots + (-1)^i (m-i-1)_{k-i}(l-1)_i + \cdots + (-1)^k (l-1)_k$$

ansehen; für $k \geq l$ schreibt man dagegen

$$\omega_k = \frac{1}{k!}\left\{(m-1)_{l-1} - (m-2)_{l-2}(k_1) + \cdots + (-1)^i (m-i-1)_{l-i-1}(k)_i + \cdots + (-1)^{l-1}(k)_{l-1}\right\}.$$

Nun besteht für beliebige Werthe von β und γ und für ein ganzzahliges positives ν die Gleichung

$$\begin{aligned}(8)\qquad (-1)^\nu (\beta-\gamma+\nu)_\nu &= (\gamma-\beta-1)_\nu \\ &= (\gamma-1)_\nu - (\gamma-2)_{\nu-1}(\beta)_1 + (\gamma-3)_{\nu-2}(\beta)_2 - \cdots \\ &\quad + (-1)^i(\gamma-i-1)_{\nu-i}(\beta)_i + \cdots + (-1)^\nu(\beta)_\nu,\end{aligned}$$

welche aus der bekannten Formel

$$(\alpha+\beta)_\nu = (\alpha)_\nu + (\alpha)_{\nu-1}(\beta)_1 + (\alpha)_{\nu-2}(\beta)_2 + \cdots + (\beta)_\nu$$

für $\alpha = \nu - \gamma$ nach Berücksichtigung der Identität

$$(-\delta)_i = \frac{(-\delta)(-\delta-1)\cdots(-\delta-i+1)}{i!} = (-1)^i(\delta+i-1)_i$$

erhalten wird. Indem man die Gleichung (8) für $\beta = l-1$, $\gamma = m$, $\nu = k$ benutzt, findet man im Falle $0 < k < l$ für ω_k den Werth

$$\omega_k = \frac{(m-k-1)(m-k-2)\cdots(m-l+1)}{(l-1)!}\,\frac{(m-l)\cdots(m-l-k+1)}{k!}$$

oder

$$\omega_k = \frac{1}{k!}(m-k-1)_{l-1}.$$

Die letztere Gleichung gilt auch im Fall $k \geq l$. Denn die Anwendung der Formel (8) für die Zahlen $\beta = k$, $\gamma = m$, $\nu = l-1$ zeigt, dass für $k \geq l$

$$\omega_k = \frac{(-1)^{l-1}}{k!}(k-m+l-1)_{l-1} = \frac{1}{k!}(m-k-1)_{l-1}$$

ist. Hieraus folgt $\omega_m = \frac{(-1)^{l-1}}{m!}$, so dass das Product $\omega_m\,\varphi^{(m)}(x)$ den Werth $(-1)^{l-1}\beta_0$ hat. Für $m-l<k<m$ ist $\omega_k = 0$, da der Zähler des Binomialcoefficienten $(m-k-1)_{l-1}$,

$$(m-k-1)(m-k-2)\cdots(m-k-l+1),$$

dann einen Factor Null enthält. Auf diese Weise gewinnt man für die in (7) angegebene Summe Ω den Ausdruck

$$(9)\quad \Omega = \begin{cases} (m-1)_{l-1}\,\varphi(x) + (m-2)_{l-1}\,\varphi'(x)\,\frac{v-x}{1} \\ + (m-3)_{l-1}\varphi''(x)\frac{(v-x)^2}{1.2} + \cdots + (m-k-1)_{l-1}\varphi^{(k)}(x)\frac{(v-x)^k}{k!} + \cdots \\ + \varphi^{(m-l)}(x)\,\frac{(v-x)^{m-l}}{(m-l)!} + (-1)^{l-1}\beta_0(v-x)^m. \end{cases}$$

Es sollen noch zwei weitere Hülfsgleichungen hergestellt werden, die sich in einfacher Weise aus der Formel

$$(10)\qquad (\beta)_\nu = (\beta-1)_\nu + (\beta-1)_{\nu-1}$$

und der hieraus folgenden Gleichung

$$(11)\quad (\beta+\nu)_\nu = 1 + (\beta)_1 + (\beta+1)_2 + (\beta+2)_3 + \cdots + (\beta+\nu-1)_\nu$$

ergeben. Man substituire in die Summe

$$1 + (\beta+1)_1\,q + (\beta+2)_2\,q^2 + \cdots + (\beta+\mu)_\mu\,q^\mu$$

an Stelle von $(\beta+1)_1$, $(\beta+2)_2$, $\cdots (\beta+\mu)_\mu$ die aus (11) folgenden Werthe. Dann kommen in derselben keine anderen Binomialcoefficienten vor als $(\beta)_1$, $(\beta+1)_2$, $(\beta+2)_3$, $\cdots (\beta+\mu-1)_\mu$, und der Factor von $(\beta+i-1)_i$ lautet (für $i = 1, 2, \cdots \mu$)

$$q^i(1+q+q^2+\cdots+q^{\mu-i}) = \frac{q^i(1-q^{\mu-i+1})}{1-q}.$$

Mithin besteht die Beziehung

$$\sum_{i=0}^{i=\mu}(\beta+i)_i q^i = \frac{1}{1-q}\sum_{i=0}^{i=\mu}(\beta+i-1)_i\,q^i - \frac{q^{\mu+1}}{1-q}\sum_{i=0}^{i=\mu}(\beta+i-1)_i.$$

Für die zweite der rechts stehenden Summen kann nach (11) und (10) die Grösse

$$\sum_{i=0}^{i=\mu}(\beta+i-1)_i = (\beta+\mu)_\mu = (\beta+\mu+1)_{\mu+1} - (\beta+\mu)_{\mu+1}$$

gesetzt werden, wodurch die Identität

$$(12)\qquad \sum_{i=0}^{i=\mu} (\beta+i)_i\, q^i + (\beta+\mu+1)_{\mu+1}\frac{q^{\mu+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}\sum_{i=0}^{i=\mu+1}(\beta+i-1)_i\, q^i$$

erhalten wird. Hierin sind β und q beliebig, μ irgend eine positive ganze Zahl.

Man betrachte ferner den Ausdruck

$$1+(\mu)_{\mu-1}\,p+(\mu+1)_{\mu-1}\,p^2+(\mu+2)_{\mu-1}\,p^3+\cdots$$
$$+(\mu+i-1)_{\mu-1}\,p^i+\cdots+(\nu-2)_{\mu-1}\,p^{\nu-\mu-1}+(\nu-1)_{\mu-1}\,p^{\nu-\mu},$$

in welchem p einen beliebigen Werth, μ und ν positive ganze Zahlen bedeuten, und $\nu>\mu$ ist. Indem man nach (10)

$$(\mu+i-1)_{\mu-1}=(\mu+i)_\mu-(\mu+i-1)_\mu$$

setzt, ergiebt sich die Relation

$$\sum_{i=0}^{i=\nu-\mu}(\mu+i-1)_{\mu-1}p^i = 1+\sum_{i=1}^{i=\nu-\mu}(\mu+i)_\mu p^i - \sum_{i=1}^{i=\nu-\mu}(\mu+i-1)_\mu p^i$$
$$=\sum_{i=0}^{i=\nu-\mu}(\mu+i)_\mu p^i - p\sum_{i'=0}^{i'=\nu-\mu-1}(\mu+i')_\mu p^{i'}.$$

In der ersten rechts stehenden Summe werde der zu $i=\nu-\mu$ gehörige Term $(\nu)_\mu\, p^{\nu-\mu}$ abgetrennt und auf die linke Seite gebracht. Dann wird die rechte Seite durch $1-p$ theilbar, und es entsteht die Gleichung:

$$(13)\qquad \sum_{i=0}^{i=\nu-\mu}(\mu+i-1)_{\mu-1}p^i-(\nu)_\mu p^{\nu-\mu}=(1-p)\sum_{i=0}^{i=\nu-\mu-1}(\mu+i)_\mu p^i.$$

§ 3.

Es soll nun gezeigt werden, dass für die beliebige ganze Function m^{ten} Grades $\varphi(u)$ der Variablen u die Formel

$$(14)\qquad \varphi(u)-\beta_0(u-v)^l(u-x)^{m-l}$$
$$=p^{m-l}\left\{\begin{array}{l} V_{l-1}+(m-l)_1 q\; V_{l-2}+(m-l+1)_2 q^2\; V_{l-3}+\cdots \\ +(m-k-2)_{l-k-1}q^{l-k-1}\; V_k+\cdots+(m-2)_{l-1}q^{l-1}\; V_0\end{array}\right\}$$
$$+q^l\left\{\begin{array}{l} X_{m-l-1}+(l)_{l-1}p\; X_{m-l-2}+(l+1)_{l-1}p^2\; X_{m-l-3}+\cdots \\ +(m-k-2)_{l-1}p^{m-l-k-1}\; X_k+\cdots+(m-2)_{l-1}p^{m-l-1}\; X_0\end{array}\right\}$$

gilt, in welcher l irgend eine der Zahlen $1, 2, \cdots m-1$ bedeutet, und $p, q, X_0, X_1, \cdots V_0, V_1, \cdots$ die in (2), (3), (5) definirten Grössen sind. Durch β_0 wird wiederum der Factor von u^m in $\varphi(u)$

bezeichnet. Die Gleichung (14) geht für $l=1$ in (4), für $l=2$ in (6) über.

Der Beweis der Formel (14) wird mittelst Induction geführt. Diejenige Gleichung, die aus (14) entsteht, wenn man l durch $l-1$ ersetzt,

$$(15)\qquad \varphi(u)-\beta_0(u-v)^{l-1}(u-x)^{m-l+1}=$$
$$p^{m-l+1}\sum_{k=0}^{k=l-2}(m-k-2)_{l-k-2}\,q^{l-k-2}\,V_k+q^{l-1}\sum_{k=0}^{k=m-l}(m-k-2)_{l-2}\,p^{m-l-k}X_k,$$

wird als gültig angenommen. Dann lässt sich mit Hülfe der Identitäten (9), (12), (13) die Gleichung (14) ohne Schwierigkeit aus (15) ableiten.

Man bemerke, dass auf der rechten Seite der Gleichung (14) der Factor von $\varphi^{(k)}(x)\frac{(u-x)^k}{k!}$ für $k=1,2,\cdots m-l-1$ gleich dem Ausdruck

$$(16)\qquad q^l\left\{1+(l)_{l-1}p+(l+1)_{l-1}p^2+\cdots+(m-k-2)_{l-1}p^{m-l-k-1}\right\},$$

der Factor von $\varphi^{(k)}(v)\frac{(u-v)^k}{k!}$ für $k=1,2,\cdots l-1$ gleich

$$(17)\qquad p^{m-l}\left\{1+(m-l)_1q+(m-l+1)_2q^2+\cdots+(m-k-2)_{l-k-1}q^{l-k-1}\right\}$$

ist, und dass die Coefficienten von $\varphi(x)$ und von $\varphi(v)$ aus (16) und (17) für $k=0$ erhalten werden.

Da die Grösse X_{m-l} in (15) vorkommt, in (14) dagegen fehlt, so soll der Differentialquotient $\varphi^{(m-l)}(x)$, welcher in X_{m-l}, aber nicht in $X_0, X_1, \cdots X_{m-l-1}$ enthalten ist, aus (15) und (9) eliminirt werden. Man subtrahirt zu diesem Behufe die Gleichung (9) von (15), nachdem man dieselbe mit dem Factor $q^{l-1}\left(\frac{u-x}{v-x}\right)^{m-l}$, $=q^{l-1}p^{m-l}$, versehen hat. Hierdurch entsteht die Gleichung

$$(18)\qquad \varphi(u)-\beta_0(u-v)^{l-1}(u-x)^{m-l+1}+(-1)^{l-1}\beta_0(v-x)^m p^{m-l}q^{l-1}=$$
$$\begin{aligned}
&=p^{m-l+1}\sum_{k=0}^{k=l-2}(m-k-2)_{l-k-2}\,q^{l-k-2}\,V_k\\
&+q^{l-1}\sum_{k=0}^{k=m-l}(m-k-2)_{l-2}\,p^{m-l-k}\,X_k\\
&+p^{m-l}q^{l-1}\sum_{k=0}^{k=l-1}(m-k-1)_{l-k-1}\,\varphi^{(k)}(v)\frac{(x-v)^k}{k!}\\
&-p^{m-l}q^{l-1}\sum_{k=0}^{k=m-l}(m-k-1)_{l-1}\,\varphi^{(k)}(x)\frac{(v-x)^k}{k!},
\end{aligned}$$

woselbst die Werthe $\frac{\varphi^{(k)}(v)}{k!}$ und $\frac{\varphi^{(k)}(x)}{k!}$ für $k = 0$ durch $\varphi(v)$ und $\varphi(x)$ zu ersetzen sind.

Werden auf der rechten Seite von (18) die Summen (3) und (5) für $X_0, X_1, \cdots, V_0, V_1, \cdots$ substituirt, so ist daselbst die Grösse $\varphi^{(k)}(x)\frac{(u-x)^k}{k!}$ mit dem Coefficienten

$$(19)\quad q^{l-1}[1+(l-1)_{l-2}\,p+(l)_{l-2}\,p^2+\cdots+(m-k-2)_{l-2}\,p^{m-l-k} \\ -(m-k-1)_{l-1}\,p^{m-l-k}]$$

und die Grösse $\varphi^{(k)}(v)\frac{(u-v)^k}{k!}$ mit dem Coefficienten

$$(20)\quad p^{m-l+1}\Big[1+(m-l+1)_1\,q+(m-l+2)_2\,q^2+\cdots+(m-k-2)_{l-k-2}\,q^{l-k-2} \\ +(m-k-1)_{l-k-1}\frac{q^{l-k-1}}{p}\Big]$$

multiplicirt. Indem man nun die Formel (13) für $\mu = l-1$, $\nu = m-k-1$ benutzt, transformirt man den Coefficienten (19) in das Product

$$q^{l-1}(1-p)\,[1+(l)_{l-1}\,p+(l+1)_{l-1}\,p^2+\cdots+(m-k-2)_{l-1}\,p^{m-l-k-1}],$$

welches wegen der Relation $p+q=1$ mit dem Ausdruck (16) gleichlautend ist.

Ebenso folgt aus der Formel (12), wenn daselbst $\beta = m-l$, $\mu = l-k-2$ genommen, und die Gleichung $1-q=p$ angewendet wird, die Identität der Grössen (17) und (20). Diese Umformungen bleiben im Falle $k=0$ gültig, so dass auch die Coefficienten von $\varphi(x)$, resp. $\varphi(v)$, in (18) und (14) dieselben sind.

Endlich stimmen die linken Seiten der Gleichungen (18) und (14) überein, da nach (2)

$$\beta_0\{(u-v)^{l-1}(u-x)^{m-l+1}-(-1)^{l-1}(v-x)^m\,p^{m-l}\,q^{l-1}\} = \\ \beta_0(u-v)^{l-1}\,(u-x)^{m-l}\,[u-x-(v-x)] = \beta_0(u-v)^l\,(u-x)^{m-l}$$

gefunden wird. Hiermit ist die Formel (14) bewiesen.

Man bringt mit Rücksicht auf das Folgende die Gleichungen (4), (6), (14) noch auf eine andere Form. Die Grösse X_k lautet, wenn nach (2) für $u-x$ das Product $(v-x)\,p$ substituirt wird,

$$X_k = \varphi(x)+\varphi'(x)\frac{v-x}{1}\,p+\varphi''(x)\frac{(v-x)^2}{1\,.\,2}\,p^2+\cdots \\ +\varphi^{(k)}(x)\frac{(v-x)^k}{k!}\,p^k.$$

Daher geht die in der Gleichung (4) vorkommende Summe

$$X_{m-2}+p\,X_{m-3}+p^2\,X_{m-4}+\cdots+p^{m-2}\,X_0,$$

falls sie nach Potenzen von p geordnet wird, in den Ausdruck

$$\varphi(x) + p\left[\varphi(x) + \varphi'(x)\frac{v-x}{1}\right]$$
$$+ p^2\left[\varphi(x) + \varphi'(x)\,\frac{v-x}{1} + \varphi''(x)\,\frac{(v-x)^2}{1\,.\,2}\right] + \cdots$$
$$+ p^{m-2}\left[\varphi(x) + \varphi'(x)\,\frac{v-x}{1} + \cdots + \varphi^{(m-2)}(x)\,\frac{(v-x)^{m-2}}{(m-2)!}\right]$$

über. Man bezeichnet nun (für $l = 1, 2, \cdots m-1$) durch $R_0^{(l)}$, $R_1^{(l)}$, $R_2^{(l)}$, $\cdots$ die Functionen

$$(21)\quad \begin{cases} R_0^{(l)} = \varphi(x), \quad R_1^{(l)} = \varphi'(x)\,\dfrac{v-x}{1} + (l)_1\,\varphi(x), \\ R_2^{(l)} = \varphi''(x)\,\dfrac{(v-x)^2}{1\,.\,2} + (l)_1\,\varphi'(x)\,\dfrac{v-x}{1} + (l+1)_2\,\varphi(x), \cdots \\ R_k^{(l)} = \varphi^{(k)}(x)\,\dfrac{(v-x)^k}{k!} + (l)_1\,\varphi^{(k-1)}(x)\,\dfrac{(v-x)^{k-1}}{(k-1)!} \\ \qquad + (l+1)_2\,\varphi^{(k-2)}(x)\,\dfrac{(v-x)^{k-2}}{(k-2)!} \\ \qquad + (l+2)_3\,\varphi^{(k-3)}(x)\,\dfrac{(v-x)^{k-3}}{(k-3)!} + \cdots + (l+k-1)_k\,\varphi(x), \end{cases}$$

in denen $(l)_1$, $(l+1)_2$, $\cdots$ Binomialcoefficienten bedeuten. Ferner sei $S_k^{(n)}$ diejenige Function, die aus $R_k^{(n)}$ entsteht, wenn die Variablen x und v mit einander vertauscht werden; also man setzt

$$(22)\quad \begin{cases} S_0^{(n)} = \varphi(v), \quad S_1^{(n)} = \varphi'(v)\,\dfrac{x-v}{1} + (n)_1\,\varphi(v), \\ S_2^{(n)} = \varphi''(v)\,\dfrac{(x-v)^2}{1\,.\,2} + (n)_1\,\varphi'(v)\,\dfrac{x-v}{1} + (n+1)_2\,\varphi(v), \cdots \\ S_k^{(n)} = \varphi^{(k)}(v)\,\dfrac{(x-v)^k}{k!} + (n)_1\,\varphi^{(k-1)}(v)\,\dfrac{(x-v)^{k-1}}{(k-1)!} \\ \qquad + (n+1)_2\,\varphi^{(k-2)}(v)\,\dfrac{(x-v)^{k-2}}{(k-2)!} \\ \qquad + (n+2)_3\,\varphi^{(k-3)}(v)\,\dfrac{(x-v)^{k-3}}{(k-3)!} + \cdots + (n+k-1)_k\,\varphi(v) \end{cases}$$

Dann ist

$$X_{m-2} + p\,X_{m-3} + p^2\,X_{m-4} + \cdots + p^{m-2}\,X_0$$
$$= R_0^{(1)} + p\,R_1^{(1)} + p^2\,R_2^{(1)} + \cdots + p^{m-2}\,R_{m-2}^{(1)},$$

so dass aus (4) die Gleichung

$$(23)\quad \varphi(u) = \begin{cases} q\left[R_0^{(1)} + p\,R_1^{(1)} + p^2\,R_2^{(1)} + \cdots + p^{m-2}\,R_{m-2}^{(1)}\right] \\ + p^{m-1}\varphi(v) + \beta_0(u-v)\,(u-x)^{m-1} \end{cases}$$

erhalten wird. In analoger Weise leitet man aus (6) die Formel

$$(24)\quad \varphi(u) = \begin{cases} q^2\left[R_0^{(2)} + p\,R_1^{(2)} + p^2\,R_2^{(2)} + \cdots + p^{m-3}\,R_{m-3}^{(2)}\right] \\ + p^{m-2}\left[S_0^{(m-2)} + q\,S_1^{(m-2)}\right] + \beta_0(u-v)^2\,(u-x)^{m-2} \end{cases}$$

ab. Endlich bestehen die Identitäten

$$X_{m-l-1}+(l)_{l-1}\,p\,X_{m-l-2}+(l+1)_{l-1}\,p^2 X_{m-l-3}+\cdots+(m-2)_{l-1}\,p^{m-l-1}X_0$$
$$= R_0^{(l)}+pR_1^{(l)}+p^2R_2^{(l)}+\cdots+p^{m-l-1}R_{m-l-1}^{(l)}$$

und

$$V_{l-1}+(m-l)_1\,q\,V_{l-2}+(m-l+1)_2\,q^2V_{l-3}+\cdots+(m-2)_{l-1}\,q^{l-1}V_0$$
$$= S_0^{(m-l)}+qS_1^{(m-l)}+q^2S_2^{(m-l)}+\cdots+q^{l-1}S_{l-1}^{(m-l)},$$

zu denen man unmittelbar gelangt, wenn man in X_k die Differenz $u-x$ durch $(v-x)\,p$ und in V_k die Differenz $u-v$ durch $(x-v)\,q$ ersetzt und die Formel $(n)_i=(n)_{n-i}$ beachtet. Auf diese Weise nimmt die Gleichung (14) durch Einführung der Functionen (21) und (22) die Gestalt

$$(25)\quad \varphi(u)=\begin{cases} q^l\left[R_0^{(l)}+pR_1^{(l)}+p^2R_2^{(l)}+\cdots+p^{m-l-1}R_{m-l-1}^{(l)}\right] \\ +p^{m-l}\left[S_0^{(m-l)}+qS_1^{(m-l)}+q^2S_2^{(m-l)}+\cdots+q^{l-1}S_{l-1}^{(m-l)}\right] \\ +\beta_0(u-v)^l(u-x)^{m-l}\end{cases}$$

an, woselbst für l eine beliebige der Zahlen $1, 2, \cdots m-1$ gewählt werden kann. Im Folgenden wird neben der Gleichung (25) auch diejenige angewendet, die sich aus (25) ergiebt, wenn man l durch $l-1$ ersetzt. Diese Gleichung lautet

$$(26)\quad \varphi(u)=\begin{cases} q^{l-1}\left[R_0^{(l-1)}+pR_1^{(l-1)}+p^2R_2^{(l-1)}+\cdots+p^{m-l}R_{m-l}^{(l-1)}\right] \\ +p^{m-l+1}\left[S_0^{(m-l+1)}+qS_1^{(m-l+1)}+\cdots+q^{l-2}S_{l-2}^{(m-l+1)}\right] \\ +\beta_0(u-v)^{l-1}(u-x)^{m-l+1}\end{cases}$$

und gilt für $l=2, 3, \cdots m$.

§ 4.

Die gewonnenen Formeln (23) bis (26) sollen dazu benutzt werden, eine Reihe von partiellen Differentialgleichungen, denen das hypergeometrische Integral

$$(27)\quad y=\int_g^h (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}\cdots(u-a_m)^{b_m-1}(u-v)^{\varkappa-1}(u-x)^{\lambda-1}\,du$$

genügt, abzuleiten. Unter v und x werden zwei von einander unabhängige Veränderliche, unter $a_1, a_2, \cdots a_m$ Constante, die im Uebrigen beliebig, aber sämmtlich von einander verschieden sind, verstanden. Als Grenzen g, h des Integrals (27) sind zwei der $m+3$ Werthe $a_1, a_2, \cdots a_m, \infty, v, x$ zu nehmen. Die Grössen $b_1, b_2, \cdots b_m, \varkappa, \lambda$ sind constant.

Fasst man das obige bestimmte Integral y als Function von x allein auf, so hat man für dasselbe eine gewöhnliche Differentialgleichung $(m+1)^{\text{ter}}$ Ordnung*); ebenso ist y mit $\frac{dy}{dv}, \frac{d^2y}{dv^2}, \dots \frac{d^{m+1}y}{dv^{m+1}}$ durch eine lineare Gleichung verbunden. Die Differentialgleichungen, zu denen die nachstehenden Rechnungen führen, enthalten gleichzeitig Differentialquotienten aus den zwei Reihen $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots$ und $\frac{dy}{dv}, \frac{d^2y}{dv^2}, \cdots$; und zwar ist die Gesammtzahl der in jeder einzelnen Gleichung auftretenden Differentialquotienten wieder gleich $m+1$. Es soll zunächst diejenige Differentialgleichung hergestellt werden, in welcher neben $\frac{dy}{dx}, \cdots \frac{d^m y}{dx^m}$ die Grösse $\frac{dy}{dv}$ vorkommt.

Der Zähler des Binomialcoefficienten $(\gamma)_\nu$ möge (im Anschluss an eine von Vandermonde angewendete Bezeichnung) kurz $[\gamma]_\nu$ genannt werden; man setzt also für ein beliebiges γ und für ein positives ganzzahliges ν

$$[\gamma]_\nu = \gamma(\gamma-1)\cdots(\gamma-\nu+1), \quad [\gamma]_0 = 1. \tag{28}$$

Dann ist

$$\frac{d^i y}{dx^i} = (-1)^i [\lambda-1]_i \int_g^h (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-a_m)^{b_m-1} (u-v)^{\varkappa-1} (u-x)^{\lambda-i-1}\, du,$$

$$\frac{d^i y}{dv^i} = (-1)^i [\varkappa-1]_i \int_g^h (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-a_m)^{b_m-1} (u-v)^{\varkappa-i-1} (u-x)^{\lambda-1}\, du.$$

Die letzteren Gleichungen bleiben bekanntlich auch in dem Falle gültig, dass g oder h gleich x oder v ist; nur muss dann $\lambda - i > 0$, resp. $\varkappa - i > 0$ sein.

Man bezeichne nun durch $\varphi(u)$ die ganze Function m^{ten} Grades

$$\varphi(u) = (u-a_1)(u-a_2)\cdots(u-a_m) \tag{29}$$

und definire die ganze Function $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades $\psi(u)$ durch die Gleichung

$$\frac{\psi(u)}{\varphi(u)} = \frac{b_1}{u-a_1} + \frac{b_2}{u-a_2} + \cdots + \frac{b_m}{u-a_m}. \tag{30}$$

Ferner seien Π_1 und Θ_1 die Producte

$$\Pi_1 = (u-a_1)^{b_1} (u-a_2)^{b_2} \cdots (u-a_m)^{b_m} (u-v)^{\varkappa-1} (u-x)^{\lambda-m},$$
$$\Theta_1 = (u-a_1)^{b_1-1} (u-a_2)^{b_2-1} \cdots (u-a_m)^{b_m-1} (u-v)^{\varkappa-2} (u-x)^{\lambda-m-1},$$

*) Cfr. die Arbeit des Verfassers im 71^{ten} Bande des Crelle'schen Journals, sowie die Abhandlung des Herrn Hossenfelder „Ueber die Integration einer linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung" im 4^{ten} Bande dieser Annalen.

so dass y, $\frac{d^i y}{dx^i}$ und $\frac{dy}{dv}$ in der Form

$$(31)\quad \begin{cases} y = \int_g^h \Theta_1(u-v)\,(u-x)^m du, \\ \frac{d^i y}{dx^i} = (-1)^i [\lambda-1]_i \int_g^h \Theta_1(u-v)(u-x)^{m-i} du, \\ \frac{dy}{dv} = -(\varkappa-1)\int_g^h \Theta_1 (u-x)^m du \end{cases}$$

geschrieben werden können. Es wird vorausgesetzt, dass Π_1 für $u=g$ und für $u=h$ verschwinde. Ist g oder h gleich a_ν, so muss, damit das Integral (27) überhaupt einen bestimmten Sinn habe, der reelle Theil von b_ν positiv sein; dann ist aber auch $\Pi_1 = 0$ für $u = a_\nu$. Hat g oder h einen der Werthe v, x, ∞, so wird, der obigen Voraussetzung gemäss, der reelle Theil der respectiven Zahlen

$$\varkappa - 1,\quad \lambda - m,\quad m + 1 - b_1 - b_2 - \cdots - b_m - \varkappa - \lambda$$

als positiv angenommen, womit gleichzeitig die Convergenz des Integrales (27) ausgesprochen ist. Indem man Π_1 nach u differenzirt, während u für unabhängig von v und x gilt, findet man

$$\frac{d\Pi_1}{du} = \Theta_1 \begin{Bmatrix} (u-v)\,(u-x)\,\psi(u) \\ +(\varkappa-1)\,(u-x)\,\varphi(u) \\ +(\lambda-m)(u-v)\,\varphi(u) \end{Bmatrix}$$

oder

$$\frac{1}{(u-v)\,\Theta_1}\,\frac{d\Pi_1}{du}$$

$$= (u-x)\,\psi(u) + (\varkappa-1)\,\frac{u-x}{u-v}\,\varphi(u) + (\lambda-m)\,\varphi(u).$$

Auf der rechten Seite der letzteren Gleichung substituirt man für die mit $(\varkappa-1)\,\frac{u-x}{u-v}$ multiplicirte Function $\varphi(u)$ den Ausdruck (23), dagegen für die im letzten Summandus der Gleichung enthaltene Function $\varphi(u)$ und für die Function $\psi(u)$ die respectiven Entwickelungen nach dem Taylor'schen Satze

$$\varphi(u) = \varphi(x) + \varphi'(x)\,\frac{u-x}{1} + \cdots + \varphi^{(m)}(x)\,\frac{(u-x)^m}{m!},$$

$$\psi(u) = \psi(x) + \psi'(x)\,\frac{u-x}{1} + \cdots + \psi^{(m-1)}(x)\,\frac{(u-x)^{m-1}}{(m-1)!}.$$

Hierdurch entsteht, wenn man berücksichtigt, dass

$$\frac{u-x}{u-v}q=-p,\quad \frac{\varphi^{(m)}(x)}{m!}=\beta_0=1,\quad \frac{\psi^{(m-1)}(x)}{(m-1)!}=b_1+b_2+\cdots+b_m$$

ist, die Gleichung

$$(32)\qquad \frac{1}{(u-v)\Theta_1}\frac{d\Pi_1}{du}$$
$$=A_0+A_1(u-x)+A_2(u-x)^2+\cdots+A_{m-1}(u-x)^{m-1}-$$
$$-(\varkappa-1)\frac{\varphi(v)}{(v-x)^{m-1}}\frac{(u-x)^m}{u-v}+s(u-x)^m,$$

in welcher durch A_0 die Function $(\lambda-m)\,\varphi(x)$, durch A_i für

$$i=1,2,\ldots,m-1$$

die Function

$$(33)\qquad A_i=(\lambda-m)\frac{\varphi^{(i)}(x)}{i!}+\frac{\psi^{(i-1)}(x)}{(i-1)!}-\frac{(\varkappa-1)R_{i-1}^{(1)}}{(v-x)^i},$$

und durch s die Constante

$$(34)\qquad s=b_1+b_2+\cdots+b_m+\varkappa+\lambda-m-1$$

bezeichnet wird. Die in (33) vorkommende Grösse $R_{i-1}^{(1)}$ ist nach (21) gleich der Summe

$$\varphi^{(i-1)}(x)\frac{(v-x)^{i-1}}{(i-1)!}+\varphi^{(i-2)}(x)\frac{(v-x)^{i-2}}{(i-2)!}+\cdots+\varphi'(x)\frac{v-x}{1}+\varphi(x).$$

Multiplicirt man nun die Gleichung (32) mit $(-1)^m(u-v)\Theta_1$ und integrirt dieselbe nach u zwischen den Grenzen g und h, so treten auf der rechten Seite die in (31) angegebenen bestimmten Integrale auf; die linke Seite verschwindet, da Π_1 für $u=g$ und für $u=h$ den Werth 0 annimmt. Auf diese Weise findet man für das Integral (27) die Differentialgleichung

$$(35)\qquad \frac{A_0}{[\lambda-1]_m}\frac{d^my}{dx^m}-\frac{A_1}{[\lambda-1]_{m-1}}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\frac{A_2}{[\lambda-1]_{m-2}}\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}}$$
$$-\cdots+\frac{(-1)^{m-1}A_{m-1}}{[\lambda-1]_1}\frac{dy}{dx}+\frac{\varphi(v)}{(x-v)^{m-1}}\frac{dy}{dv}+(-1)^msy=0,$$

woselbst $[\lambda-1]_i$ nach (28) das Product $(\lambda-1)(\lambda-2)\cdots(\lambda-i)$ bedeutet.

§ 5.

Die Function (27) genügt ferner einer Differentialgleichung, in welcher die beiden ersten Differentialquotienten derselben nach v und die $m-1$ ersten Differentialquotienten nach x enthalten sind. Nennt man Π_2 und Θ_2 die Producte

$$\Pi_2 = (u-a_1)^{b_1}\ (u-a_2)^{b_2}\ \cdots (u-a_m)^{b_m}\ (u-v)^{\varkappa-2}(u-x)^{\lambda-m+1},$$
$$\Theta_2 = (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}\cdots(u-a_m)^{b_m-1}(u-v)^{\varkappa-3}(u-x)^{\lambda-m},$$

so nehmen durch Einführung von Θ_2 die oben erwähnten Ausdrücke für y, $\frac{d^i y}{dx^i}$, $\frac{d^i y}{dv^i}$ die Gestalt

$$(36)\qquad \begin{cases} y = \int\limits_g^h \Theta_2 (u-v)^2 (u-x)^{m-1} du, \\ \frac{d^i y}{dx^i} = (-1)^i [\lambda-1]_i \int\limits_g^h \Theta_2 (u-v)^2 (u-x)^{m-i-1} du, \\ \frac{d^i y}{dv^i} = (-1)^i [\varkappa-1]_i \int\limits_g^h \Theta_2 (u-v)^{2-i} (u-x)^{m-1} du \end{cases}$$

an. Die Functionen Π_2 und Θ_2 sind durch die Gleichung

$$(37)\qquad \frac{1}{\Theta_2}\,\frac{d\Pi_2}{du}$$
$$=(u-v)(u-x)\psi(u)+(\varkappa-2)(u-x)\varphi(u)+(\lambda-m+1)(u-v)\varphi(u)$$

mit einander verbunden, in der $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ die in (29) und (30) angegebenen Functionen sind. Für den Factor $\varphi(u)$ des mittleren Summandus der rechten Seite von (37) werde der Ausdruck (24), für die im letzten Summandus enthaltene Function $\varphi(u)$ der Ausdruck (23) eingesetzt. Auf die Function $\psi(u)$, die im ersten Summandus der obigen rechten Seite vorkommt, wird ebenfalls die Formel (23) angewendet, unter Berücksichtigung des Umstandes, dass $\psi(u)$ eine ganze Function $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades bedeutet. Man bezeichne durch

$$\mathfrak{R}_0^{(n)},\ \mathfrak{R}_1^{(n)},\ \ldots\ \mathfrak{S}_0^{(n)},\ \mathfrak{S}_1^{(n)},\ \ldots$$

die zu (21) und (22) analogen Functionen

$$(38)\qquad \begin{cases} \mathfrak{R}_0^{(n)} = \psi(x),\ \mathfrak{R}_1^{(n)} = \psi'(x)\,\frac{v-x}{1} + (n)_1\,\psi(x),\ \ldots \\ \mathfrak{R}_k^{(n)} = \psi^{(k)}(x)\,\frac{(v-x)^k}{k!} + (n)_1\,\psi^{(k-1)}(x)\,\frac{(v-x)^{k-1}}{(k-1)!} + \\ \qquad + \cdots + (n+k-1)_k\,\psi(x), \end{cases}$$

$$(39)\qquad \begin{cases} \mathfrak{S}_0^{(n)} = \psi(v),\ \mathfrak{S}_1^{(n)} = \psi'(v)\,\frac{x-v}{1} + (n)_1\,\psi(v),\ \ldots \\ \mathfrak{S}_k^{(n)} = \psi^{(k)}(v)\,\frac{(x-v)^k}{k!} + (n)_1\,\psi^{(k-1)}(v)\,\frac{(x-v)^{k-1}}{(k-1)!} + \\ \qquad + \cdots + (n+k-1)_k\,\psi(v). \end{cases}$$

Ferner werde die Constante $b_1 + b_2 + \cdots + b_m$, welche den Coefficienten von u^{m-1} in $\psi(u)$ bildet, kurz γ_0 genannt. Dann bestehen für $\psi(u)$ die aus (23) und (26) folgende Formeln

$$(40)\ \psi(u) = \begin{cases} q\,[\mathfrak{R}_0^{(1)} + p\,\mathfrak{R}_1^{(1)} + p^2\,\mathfrak{R}_2^{(1)} + \cdots + p^{m-3}\,\mathfrak{R}_{m-3}^{(1)}] \\ + p^{m-2}\,\psi(v) + \gamma_0(u-v)(u-x)^{m-2}, \end{cases}$$

$$(41)\ \psi(u) = \begin{cases} q^{l-1}\,[\mathfrak{R}_0^{(l-1)} + p\,\mathfrak{R}_1^{(l-1)} + p^2\,\mathfrak{R}_2^{(l-1)} + \cdots + p^{m-l-1}\,\mathfrak{R}_{m-l-1}^{(l-1)}] \\ + p^{m-l}[\mathfrak{S}_0^{(m-l)} + q\,\mathfrak{S}_1^{(m-l)} + q^2\,\mathfrak{S}_2^{(m-l)} + \cdots + q^{l-2}\,\mathfrak{S}_{l-2}^{(m-l)}] \\ + \gamma_0(u-v)^{l-1}(u-x)^{m-l}, \end{cases}$$

von denen die erstere für die Gleichung (37) benutzt wird. Es ergiebt sich auf diese Weise

$$\frac{1}{\Theta_2}\,\frac{d\Pi_2}{du} =$$

$$= -(u-v)^2[B_0 + B_1(u-x) + B_2(u-x)^2 + \cdots + B_{m-2}(u-x)^{m-2}]$$

$$+ (u-v)(u-x)^{m-1}\left\{ \begin{array}{l} s(u-v) + \dfrac{(\varkappa-2)\,S_0^{(m-2)}}{(u-v)\,(v-x)^{m-2}} \\ + \dfrac{\psi(v)}{(v-x)^{m-2}} + \dfrac{(\lambda-m+1)\,\varphi(v) - (\varkappa-2)\,S_1^{(m-2)}}{(v-x)^{m-1}} \end{array} \right\},$$

wo s die Constante (34), und $B_0, B_1, \ldots, B_{m-2}$ die Functionen

$$(42)\quad \begin{cases} B_0 = \dfrac{\lambda-m+1}{v-x}\,R_0^{(1)} = \dfrac{\lambda-m+1}{v-x}\,\varphi(x), \\ B_i = \dfrac{(\lambda-m+1)\,R_i^{(1)} - (\varkappa-2)\,R_{i-1}^{(2)}}{(v-x)^{i+1}} + \dfrac{\mathfrak{R}_{i-1}^{(1)}}{(v-x)^i} \qquad (i>0) \end{cases}$$

bedeuten. Wird die obige Gleichung nach Multiplication mit $(-1)^m\,\Theta_2$ in Bezug auf u zwischen g und h integrirt, so erhält man, da

$$(\Pi_2)_{u=g} = (\Pi_2)_{u=h} = 0$$

vorausgesetzt wird, nach Berücksichtigung von (36) die Differentialgleichung

$$(43)\quad \frac{B_0}{[\lambda-1]_{m-1}}\,\frac{d^{m-1}y}{\partial x^{m-1}} - \frac{B_1}{[\lambda-1]_{m-2}}\,\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \cdots + \frac{(-1)^{m-2}B_{m-2}}{[\lambda-1]_1}\,\frac{dy}{dx}$$

$$+ \frac{\varphi(v)}{(\varkappa-1)\,(x-v)^{m-2}}\,\frac{d^2y}{dv^2} - \frac{\mathfrak{B}_1}{\varkappa-1}\,\frac{dy}{dv} + (-1)^m s y = 0,$$

in der $\mathfrak{B}_1$ die Function

$$\frac{(\varkappa-2)\,S_1^{(m-2)} - (\lambda-m+1)\,\varphi(v)}{(x-v)^{m-1}} + \frac{\psi(v)}{(x-v)^{m-2}}$$

bezeichnet.

§ 6.

Um für die in (27) definirte Function y eine Differentialgleichung abzuleiten, in welcher die Differentialquotienten

$$\frac{d^{m-l+1}y}{dx^{m-l+1}},\ \frac{d^{m-l}y}{dx^{m-l}},\ldots,\frac{dy}{dx},\ \frac{d^l y}{dv^l},\ \frac{d^{l-1}y}{dv^{l-1}},\ldots,\frac{dy}{dv},$$

jedoch nur diese, vorkommen, während l eine beliebige der Zahlen $1, 2, \ldots, m$ bedeutet, geht man von den Producten

$$\Pi_l = (u-a_1)^{b_1}\ (u-a_2)^{b_2}\ \cdots(u-a_m)^{b_m}\ (u-v)^{\varkappa-l}\ (u-x)^{\lambda-m+l-1},$$

$$\Theta_l = (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}\cdots(u-a_m)^{b_m-1}(u-v)^{\varkappa-l-1}(u-x)^{\lambda-m+l-2}$$

aus, zwischen denen die Relation

$$\text{(44)}\qquad \frac{1}{\Theta_l}\frac{d\Pi_l}{du} =$$

$$=(u-v)(u-x)\psi(u)+(\varkappa-l)(u-x)\varphi(u)+(\lambda-m+l-1)(u-v)\varphi(u)$$

besteht. Die Grössen y, $\frac{d^i y}{dx^i}$, $\frac{d^i y}{dv^i}$ können als die Integrale

$$\text{(45)}\qquad \begin{cases} y = \displaystyle\int_g^h \Theta_l(u-v)^l(u-x)^{m-l+1}\,du, \\[2ex] \dfrac{d^i y}{dx^i} = (-1)^i[\lambda-1]_i \displaystyle\int_g^h \Theta_l(u-v)^l(u-x)^{m-l-i+1}\,du, \\[2ex] \dfrac{d^i y}{dv^i} = (-1)^i[\varkappa-1]_i \displaystyle\int_g^h \Theta_l(u-v)^{l-i}(u-x)^{m-l+1}\,du \end{cases}$$

dargestellt werden. Man nimmt an, dass das Product Π_l für $u=g$ und für $u=h$ den Werth Null habe.

Auf der rechten Seite der Gleichung (44) werde für die mit $(\varkappa-l)(u-x)$ multiplicirte Function $\varphi(u)$ der Ausdruck (25), für die mit $(\lambda-m+l-1)(u-v)$ multiplicirte Function $\varphi(u)$ der Ausdruck (26) und für $\psi(u)$ der Ausdruck (41) substituirt. Dann findet man die Gleichung

$$\text{(46)}\qquad \frac{1}{\Theta_l}\frac{d\Pi_l}{du} =$$

$$=(-1)^{l-1}(u-v)^l[L_0+L_1(u-x)+L_2(u-x)^2+\cdots+L_{m-l}(u-x)^{m-l}]$$
$$+(-1)^{m-l}(u-x)^{m-l+1}[\Lambda_0+\Lambda_1(u-v)+\Lambda_2(u-v)^2+\cdots+\Lambda_{l-1}(u-v)^{l-1}]$$
$$+s(u-v)^l(u-x)^{m-l+1},$$

in welcher zur Abkürzung

$$(47)\quad \begin{cases} L_0 = \dfrac{\lambda - m + l - 1}{(v-x)^{l-1}}\, R_0^{(l-1)} = \dfrac{\lambda - m + l - 1}{(v-x)^{l-1}}\, \varphi(x), \\ \Lambda_0 = \dfrac{\varkappa - l}{(x-v)^{m-l}}\, S_0^{(m-l)} = \dfrac{\varkappa - l}{(x-v)^{m-l}}\, \varphi(v), \end{cases}$$

und für $i > 0$

$$(48)\quad \begin{cases} L_i = \dfrac{(\lambda-m+l-1)\, R_i^{(l-1)} - (\varkappa-l)\, R_{i-1}^{(l)}}{(v-x)^{l+i-1}} + \dfrac{\mathfrak{R}_{i-1}^{(l-1)}}{(v-x)^{l+i-2}}, \\ \Lambda_i = \dfrac{(\varkappa-l)\, S_i^{(m-l)} - (\lambda-m+l-1)\, S_{i-1}^{(m-l+1)}}{(x-v)^{m-l+i}} + \dfrac{\mathfrak{S}_{i-1}^{(m-l)}}{(x-v)^{m-l+i-1}} \end{cases}$$

gesetzt ist. Die Grössen $R_k^{(n)}$, $S_k^{(n)}$, $\mathfrak{R}_k^{(n)}$, $\mathfrak{S}_k^{(n)}$ sind die in (21), (22), (38), (39) definirten Summen, s die Constante (34). Man integrirt die Gleichung (46), nachdem man sie mit $(-1)^m \Theta_l$ multiplicirt hat, in Bezug auf die Variable u zwischen den Grenzen g und h und benutzt die Gleichungen (45), um die Functionen y, $\dfrac{d^i y}{dx^i}$, $\dfrac{d^i y}{dv^i}$ einzuführen. Hierdurch ergiebt sich für y die Differentialgleichung

$$(49)\quad \sum_{\nu=l}^{\nu=m} \frac{(-1)^{l-\nu} L_{l-\nu}}{[\lambda-1]_{m-\nu+1}}\, \frac{d^{m-\nu+1} y}{dx^{m-\nu+1}} + \\ + \sum_{\nu=0}^{\nu=l-1} \frac{(-1)^{\nu} \Lambda_\nu}{[\varkappa-1]_{l-\nu}}\, \frac{d^{l-\nu} y}{dv^{l-\nu}} + (-1)^m s y = 0,$$

welche die $m-l+1$ ersten Ableitungen von y nach x und die l ersten nach v enthält. Durch $[\varkappa-1]_i$, $[\lambda-1]_i$ werden die in (28) angegebenen Producte bezeichnet. Die Gleichung (49) geht für $l=1$ in (35), für $l=2$ in (43) über. Im Fall $l=m$ liefert die Gleichung (49) die zu (35) analoge Differentialgleichung, welche aus letzterer entsteht, wenn v und x, sowie $\varkappa$ und λ mit einander vertauscht werden.

Ausser diesen Differentialgleichungen bestehen für y noch andere, in denen Ableitungen von der Form $\dfrac{d^{i+k} y}{dv^i dx^k}$ vorkommen. Aus der Gleichung

$$\frac{d^2 y}{dv\,dx} = (\varkappa-1)(\lambda-1)\int_g^h (u-a_1)^{b_1-1} \cdots (u-a_m)^{b_m-1} (u-v)^{\varkappa-2} (u-x)^{\lambda-2}\, du$$

folgt, wenn man dieselbe mit $x-v$, $= u-v-(u-x)$, multiplicirt, die Beziehung

$$(x-v)\,\frac{d^2y}{dv\,dx} = (\lambda-1)\,\frac{dy}{dv} - (\varkappa-1)\,\frac{dy}{dx},$$

und analog ist

$$(x-v)\,\frac{d^3y}{dv\,dx^2} = (\lambda-2)\,\frac{d^2y}{dv\,dx} - (\varkappa-1)\,\frac{d^2y}{dx^2}, \quad \text{u. s. w.}$$

Daher lassen sich, wenn man die letzteren Gleichungen anwendet, aus (49) unmittelbar weitere Differentialgleichungen gewinnen, welche die Differentialquotienten $\frac{d^2y}{dv\,dx}$, $\frac{d^3y}{dv\,dx^2}$ etc. enthalten.

Kiel, im August 1888.