

Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetze anziehen.

Erste Abhandlung.

Homogene Flüssigkeiten. Allgemeine Existenzsätze.

Von

Leon Lichtenstein in Berlin.

Betrachten wir eine in gleichförmiger Rotation um eine feste Achse begriffene homogene Flüssigkeitsmasse von der Dichte f , deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetz anziehen. Liegt die Winkelgeschwindigkeit ω unterhalb des Wertes $\Omega' = [0,1871 \cdot 2 \pi \kappa f]^{\frac{1}{2}}$ (κ = Gaußsche Gravitationskonstante), so gibt es, wie man seit längerer Zeit weiß, drei verschiedene Ellipsoidkörper als Figuren des relativen Gleichgewichtes¹⁾ — die beiden Maclaurinschen Rotationsellipsoide sowie das von Jacobi entdeckte dreiachsige Ellipsoid. Die drei Gleichgewichtsfiguren ändern sich stetig mit ω . Für $\omega = \Omega'$ fallen das Jacobische und dasjenige Maclaurinsche Ellipsoid, dessen Abplattung geringer ist, zusammen. Für alle unterhalb einer weiteren Schranke $\Omega'' = [0,2247 \cdot 2 \pi \kappa f]^{\frac{1}{2}}$ gelegenen Werte $\omega > \Omega'$ gibt es nur noch zwei Gleichgewichtsellipsoide — die Maclaurinschen. Sie ändern sich mit ω stetig und fallen für $\omega = \Omega''$ zusammen. Oberhalb des Wertes Ω'' sind Ellipsoide als Gleichgewichtsfiguren nicht mehr möglich. Das „Rotationsmoment“ der Flüssigkeit²⁾ wächst bei den Maclaurinschen Ellipsoiden von dem Werte Null (für $\omega = 0$, entsprechend einer Kugel) stetig ins Unendliche (eine unendliche Kreisscheibe senk-

¹⁾ Der Einfachheit halber wird im folgenden in der Regel kurz von „Gleichgewichtsfiguren“ die Rede sein.

²⁾ Genauer: das Moment der Bewegungsgröße um die Rotationsachse.

recht zur Umdrehungsachse als Gleichgewichtsfigur, $\omega = 0$). Die Winkelgeschwindigkeit hat, als Funktion des Rotationsmomentes aufgefaßt, ein Maximum gleich Ω'' . Für $\omega = \Omega'$ zweigt von der Folge der Maclaurinschen Ellipsoide diejenige der Jacobischen Figuren ab. Das Rotationsmoment wächst mit sinkendem ω ins Unendliche ($\omega = 0$ entspricht ein unendlich langer Zylinder mit Erzeugenden senkrecht zur Umdrehungsachse).

Zusammenfassend werden wir sagen: Für alle positiven $\omega < \Omega'$ gibt es drei, für $\Omega' \leq \omega < \Omega''$ zwei „lineare Reihen“ von Gleichgewichtsfiguren³⁾. Die Werte Ω' und Ω'' sind „Verzweigungsstellen“, — hier hängen verschiedene lineare Reihen miteinander zusammen.

Eine solche Auffassung führt naturgemäß zu der Frage, ob es nicht weitere lineare Reihen von Gleichgewichtsfiguren gibt, die mit Ellipsoidfiguren zusammenhängen. Genauer formuliert, lautet die Fragestellung so: Gibt es für hinreichend kleine $|\Delta\omega|$ zu dem Werte $\omega + \Delta\omega$ ($\omega \leq \Omega''$) der Winkelgeschwindigkeit gehörige, von den Ellipsoiden verschiedene Gleichgewichtsfiguren, die für $\Delta\omega \rightarrow 0$ stetig in ein zu ω gehöriges Ellipsoid übergehen?

Der erste, der die Existenz neuer Gleichgewichtsfiguren im Anschluß an diejenigen von Maclaurin und Jacobi vermutet hat, scheint Tschebyschef gewesen zu sein. Nach Angaben des Herrn Liapounoff hat Tschebyschef den russischen Mathematikern verschiedentlich die Aufgabe gestellt, die Existenz jener Gleichgewichtsfiguren, vor allem in der Umgebung der Verzweigungsstelle Ω'' , festzustellen⁴⁾. Als den voraussichtlich zum Ziele führenden Weg hat Tschebyschef das Verfahren der sukzessiven Approximationen bezeichnet.

Das Vorhandensein unendlich vieler Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft der klassischen Ellipsoidkörper ist bereits durch die ersten auf Anregung von Tschebyschef unternommenen Untersuchungen von Herrn Liapounoff wahrscheinlich geworden. In seiner im Jahre 1884 in russischer Sprache veröffentlichten Dissertation zeigt Herr Liapounoff, indem er sich auf die Betrachtung einer ersten Näherung beschränkt, daß es unendlich viele Verzweigungswerte der Winkelgeschwindigkeit gibt, in denen neue lineare Reihen von Gleichgewichtsfiguren abzweigen. Die ausführliche, im Jahre 1904 in französischer Übersetzung ohne wesentliche Änderungen neu erschienene Abhandlung enthält darüber hinaus ein-

³⁾ Eine präzise Fassung des Begriffes einer linearen Reihe von Gleichgewichtsfiguren vergleiche Kapitel I § 1.

⁴⁾ Vgl. A. Liapounoff, „Sur un problème de Tchebychef“, Mémoires de l'Académie impériale des sciences de St-Petersbourg, Band 17 der achten Reihe, Nr. 3, 1905, S. 1–31 (insbes. S. 1–2).

gehende, auf der Untersuchung der zweiten Variation beruhende Stabilitätsbetrachtungen⁵⁾).

Die von Herrn Liapounoff unter Zugrundelegung einer ersten Näherung bestimmten hypothetischen Gleichgewichtsfiguren sind ohne Kenntnis seiner damals den weiteren Kreisen noch unzugänglichen Untersuchungen von Poincaré in einer bekannten Abhandlung wieder entdeckt worden⁶⁾. Auch Poincaré begnügt sich mit einer ersten Näherung und beschränkt sich an manchen Stellen selbst auf Erwägungen von heuristischem Wert, indem er aus dem Verhalten mechanischer Systeme mit einer endlichen Anzahl Freiheitsgrade durch Analogie Schlüsse auf das Verhalten homogener Flüssigkeiten zieht⁷⁾. Die Ansätze von Poincaré gehen insofern über die ersten Ansätze von Herrn Liapounoff hinaus, als sie auf beliebige, z. B. ringförmige, oder auch aus mehreren Einzelmassen bestehende, *als bekannt vorauszusetzende* Ausgangsfiguren anwendbar erscheinen.

Ein wesentlicher von Poincaré postulierter Existenzsatz besagt, daß *von einer jeden Gleichgewichtsfigur im allgemeinen eine (der reguläre Fall), in besonderen Fällen mehr als eine lineare Reihe von Gleichgewichtsfiguren (der Verzweigungsfall) ausgeht*⁸⁾⁹⁾. Bei den Flüssigkeitsellipsoiden

⁵⁾ Vgl. A. Liapounoff, „Sur la stabilité des figures ellipsoïdales d'équilibre d'un liquide animé d'un mouvement de rotation“, Annales de Toulouse, (2) 6 (1904), S. 5—116.

⁶⁾ Vgl. H. Poincaré, „Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation“, Acta mathematica, 7 (1885), S. 259—352 sowie die dieser Hauptarbeit vorangehenden Noten C. R. 100 (1885), S. 1068—1070 und C. R. 101 (1885), S. 307—309. Man vergleiche ferner H. Poincaré, „Sur la stabilité de l'équilibre des figures pyramiformes affectées par une masse fluide en rotation“, Phil. Transactions A. 198 (1902), S. 333—373 und „Figures d'équilibre d'une masse fluide“, Paris 1902 sowie G. H. Darwin, „The Stability of the Pear Shaped Figure of Equilibrium of a Rotating Mass of Liquid“, Phil. Transactions A. 200 (1903), S. 251—314.

Eine recht klare, in Einzelheiten über die zum Teil skizzenhaft gehaltenen Darlegungen von Poincaré hinausgehende Darstellung der Poincaréschen Methode und ihrer wesentlichen Ergebnisse gibt die Dissertation von K. Schwarzschild, „die Poincarésche Theorie des Gleichgewichts einer homogenen rotierenden Flüssigkeitsmasse“, Neue Annalen der K. Sternwarte München, Bd. III, 1896, S. 1—69. Weitere Literatur siehe, Encyclopédie des Sciences Mathématiques, Édition française, tome IV, volume 5, Fascicule 2, „Développements concernant l'hydrodynamique“, Exposé d'après l'article allemand de A. E. H. Love par P. Appell, H. Beghin et H. Villat, 1914 (S. 155—160).

⁷⁾ In der in der Fußnote ⁶⁾ an vierter Stelle zitierten späteren Arbeit wird eine zweite Näherung betrachtet.

⁸⁾ Vgl. K. Schwarzschild, loc. cit. ⁶⁾ S. 28—41. Eine präzise Fassung des Satzes wird weiter unten in den Kapiteln II und III gegeben.

⁹⁾ Thomson und Tait geben in ihrem bekannten Werk, „Treatise on Natural Philosophy“, zweite Auflage, Band I, zweiter Teil, 1883, § 778, S. 332—335, ohne Beweis

bietet der reguläre Fall nichts neues; — man erhält die bekannten zu den Nachbarwerten der Winkelgeschwindigkeit gehörigen Ellipsoide. Anders, wenn der Verzweigungsfall vorliegt. Hier ist die Existenz neuer von den Ellipsoiden verschiedener Gleichgewichtsfiguren anzunehmen. Der Aufstellung und der Diskussion der, wie bereits erwähnt, zuerst von Herrn Liapounoff kurz vorher gefundenen Kriterien für das Auftreten des Verzweigungsfalles ist ein großer Teil der ersten Poincaréschen Arbeit gewidmet.

Einen strengen Beweis der Existenz unendlich vieler Gleichgewichtsfiguren in der Nähe der Maclaurinschen und der Jacobischen Ellipsoide sowie eine vollständige Erledigung der daran anknüpfenden Stabilitätsfragen hat nach einer Reihe von Jahren Herr Liapounoff in einer Folge groß angelegter Abhandlungen geliefert¹⁰⁾. Nachdem in der ersten Abhandlung die Methode und die Hauptergebnisse skizziert worden sind, wird in der unter 2. genannten Arbeit unter wesentlicher Zuhilfenahme der Laméschen Funktionen¹¹⁾ der fragliche Beweis durch Entwicklung in Potenzreihen und eine Majorantenmethode erbracht (vgl. die Bemerkungen am Schluß des I. und des III. Kapitels dieser Arbeit). Die auf 2. zeitlich folgende Arbeit 6. behandelt das Stabilitätsproblem. Die unter 3.,

einige Sätze über die Existenz und die Stabilität von Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten an. Für hinreichend große Werte des Rotationsmomentes gibt es ringförmige sowie aus mehreren konzentrischen Ringen bestehende Figuren, ferner Gleichgewichtsfiguren, die in mehrere einfach zusammenhängende Massen zerfallen.

Die wirkliche Existenz jener von Ellipsoiden verschiedenen Gleichgewichtsfiguren, die im Sinne der Poincaréschen Theorie als Ausgangspunkt zur Bestimmung linearer Reihen neuer Gleichgewichtsfiguren dienen könnten, ist meines Wissens bis jetzt noch nicht streng bewiesen. Literatur hierzu vgl. den in der Fußnote ⁶⁾ zitierten Enzyklopädieartikel.

¹⁰⁾ Vgl. A. Liapounoff, 1. „Sur un problème de Tchebychef“, Mémoires de l'Académie impériale des sciences de St-Petersbourg, Band 17 der achten Reihe, Nr. 3, 1905, S. 1–31; 2. „Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoïdes d'une masse liquide homogène, douée d'un mouvement de rotation. Première partie. Étude générale du problème“. Mémoire présenté à l'Académie impériale des sciences, 1906, S. 1–225; 3. „Deuxième partie. Figures d'équilibre dérivées des ellipsoïdes de Maclaurin“, 1909, S. 1–202; 4. „Troisième partie. Figures d'équilibre dérivées des ellipsoïdes de Jacobi“, 1912, S. 1–227; 5. „Quatrième partie. Nouvelles formules pour la recherche des figures d'équilibre“, 1914, S. 1–112; 6. „Problème de minimum dans une question de stabilité des figures d'équilibre d'une masse fluide en rotation“, Mémoires de l'Académie impériale des sciences de St-Petersbourg, Band 22 der ersten Reihe, Nr. 5, 1908, S. 1–140; 7. „Sur une classe de figures d'équilibre d'un liquide en rotation“, Annales de l'École Normale, (3) 26 (1909), S. 473–483.

¹¹⁾ Die bereits in der in der Fußnote ⁶⁾ zitierten Arbeit, wie auch von Poincaré a. a. O. gebraucht worden sind.

4. und 5. zitierten Abhandlungen sind der ins Einzelne gehenden Durchführung der gewonnenen allgemeinen Ergebnisse gewidmet. In der zuletzt genannten Arbeit werden überdies die allgemeinen Resultate der Abhandlung 2. unter Zugrundelegung eines modifizierten Systems (krümmlicher) Koordinaten wiedergewonnen. Die Abhandlung 7. behandelt das in der Arbeit 2. nur zum Teil erledigte Problem der Vollständigkeit der erhaltenen Lösungen.

Die eingehenden, sehr umfangreichen Untersuchungen von Herrn Liapounoff sind den besonderen Eigenschaften der ellipsoidischen Gleichgewichtsfiguren angepaßt und dürften sich nicht ohne schwierige Spezialbetrachtungen und auch dann nicht in allen Teilen auf andere Gleichgewichtsfiguren übertragen lassen. Aber auch in dem besonderen Falle der Maclaurinschen und Jacobischen Ellipsoide erscheint es erwünscht, für die allgemeinen Existenzsätze einen kürzeren Beweis zu besitzen.

In der vorliegenden Abhandlung wird der von Poincaré postulierte Existenzsatz in voller Allgemeinheit bewiesen. In dem ersten Kapitel wird das Problem auf die Auflösung einer nichtlinearen Integro-Differentialgleichung (§ 4, Formel (68)), die in einer entsprechend spezialisierten Gestalt bereits bei Herrn Liapounoff vorkommt¹²⁾, zurückgeführt. Diese Gleichung wird sodann durch sukzessive Approximationen gelöst. Eine Hauptrolle spielt hierbei eine gewisse lineare homogene Integralgleichung (Kapitel II, Formel (1)). Sie hat, wenn die Gleichgewichtsfigur, von der ausgegangen wird, aus Umdrehungskörpern um die Rotationsachse besteht, mindestens eine, sonst mindestens zwei linear unabhängige Nulllösungen. Sind diese trivialen Nulllösungen die einzigen von Null verschiedenen Lösungen der Integralgleichung, so liegt der reguläre Fall vor (II. Kapitel); gibt es weitere Nulllösungen, so hat man mit einem Verzweigungsfall zu tun (III. Kapitel). Die von Herrn Liapounoff und von Poincaré für Ellipsoide aufgestellten Kriterien erscheinen damit in einem neuen Licht.

Der Konvergenzbeweis wird durch ein geeignetes Auswahlverfahren erbracht, das schneller zum Ziele führt, als die von Liapounoff benutzte Majorantenmethode. Als wesentlich erweist sich hierbei die Einführung komplexer Werte der Parameter des Problems, insbesondere der komplexen Winkelgeschwindigkeit. Neben der Konvergenz der sukzessiven Approximationen wird dabei auch die Konvergenz der Potenzreihen gewonnen, die den in dem besonderen Falle der Ellipsoidkörper als Ausgangsfiguren von Herrn Liapounoff betrachteten Entwicklungen entsprechen. Durch die systematische Benutzung funktionentheoretischer

¹²⁾ Vgl. A. Liapounoff, loc. cit. ⁴⁾ S. 8, loc. cit. ¹⁰⁾ Abhandlung 2., S. 22, loc. cit. ¹⁰⁾ Abhandlung 5., S. 16.

Hilfsmittel gestaltet sich auch die Ableitung der Integro-Differentialgleichung des Problems im I. Kapitel besonders übersichtlich.

Damit in den beiden vorhin als möglich hingestellten Fällen neue Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft der Ausgangsfigur wirklich existieren, müssen noch unendlich viele Bedingungsgleichungen erfüllt sein. Diese sind in dem regulären Falle von selbst erfüllt, wenn der Ausgangskörper eine Ebene senkrecht zur Rotationsachse und eine durch diese hindurchgehende Ebene zu Symmetrieebenen hat. Alle bis jetzt bekannten oder vermuteten Gleichgewichtsfiguren haben diese Eigenschaft. Wahrscheinlich gibt es keine anderen Gleichgewichtsfiguren¹³⁾. In dem Verzweigungsfalle sind jene Bedingungen von selbst erfüllt, wenn es überdies möglich ist, ein System nicht trivialer Lösungen anzugeben, die in bezug auf die beiden Symmetrieebenen symmetrisch sind und mit den trivialen Lösungen zusammen ein vollständiges System linear unabhängiger Lösungen darstellen. Wahrscheinlich gibt es keine anderen Gleichgewichtsfiguren.

In dem vierten Kapitel wird der folgende Satz bewiesen. Die Gesamtheit der reellen Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft der Ausgangsfigur, die von Jordanschen Flächen begrenzt sind, ein von dem Volumen jener Figur hinreichend wenig verschiedenes Volumen haben und zu einem Werte ω_1 der Winkelgeschwindigkeit in der Umgebung des Wertes ω gehören, ist durch die in den Kapiteln II und III gefundenen reellen Figuren erschöpft. Dieses Resultat ist in dem besonderen Falle der Flüssigkeitsellipsoide als Ausgangsfiguren von Herrn Liapounoff in den Abhandlungen 2. und 7. abgeleitet worden. Es gilt ferner der folgende weitergehende Satz: *Es sei eine von einer endlichen Anzahl Jordanscher Flächen begrenzte, aus einer oder mehrerer Massen bestehende Gleichgewichtsfigur vom bestimmten Volumen gegeben, und es möge die Schwerkraft, d. h. die Resultierende aus Anziehungs- und der Zentrifugalkraft, auf allen Randkomponenten von Null verschieden sein. Man kann dann in mannigfaltiger Weise Systeme Gaußscher Parameter bestimmen, so daß die kartesischen Koordinaten der Punkte auf einer jeden Randkomponente, als Funktionen jener Parameter aufgefaßt, stetige Ableitungen aller Ordnungen haben.* Wahrscheinlich sind die Randflächen stets analytisch und regulär. Herr Liapounoff beweist demgegenüber nur, daß die neuen Gleichgewichtsfiguren eine stetige Normale haben. Das in der vorliegenden Arbeit bewiesene weitergehende Resultat gestattet das Verfahren auf die gefundenen neuen Figuren wieder anzuwenden. Man

¹³⁾ In der Nachbarschaft einer etwa vorhandenen Gleichgewichtsfigur ohne die beiden Symmetrieebenen würden auch in dem regulären Falle nur ausnahmsweise weitere Figuren des relativen Gleichgewichtes liegen können. Im allgemeinen würde man darum allemal mit isolierten Gleichgewichtsfiguren zu tun haben.

kann also schrittweise weiter kommen, bis man durch Singularitäten aufgehalten wird, die in der Natur der Sache liegen. Solche Singularitäten ergeben sich z. B., wenn die Schwerkraft in einzelnen Punkten auf der Oberfläche einer Gleichgewichtsfigur verschwindet.

Das letzte, fünfte Kapitel enthält den Beweis einiger für das Gelingen der Methode wesentlicher Hilfssätze. Um den Zusammenhang der Betrachtungen nicht zu unterbrechen, ist der Beweis auf den Schluß der Arbeit verlegt worden.

Das im folgenden eingeschlagene Verfahren ist mannigfaltiger weiterer Anwendungen fähig. Ich hoffe auf diese später zurückkommen zu können.

Erstes Kapitel. Problemstellung.

§ 1.

In dem Raume der kartesischen Koordinaten x, y, z sei eine Anzahl (~ 1) Gebiete, deren Gesamtheit mit T bezeichnet werden soll, gegeben. Die Begrenzung S von T besteht aus einer Anzahl geschlossener, doppel-punktfreier, stetig gekrümmter Flächenschalen („Komponenten“), die einander nicht berühren. Bekanntlich kann jede Komponente von S von einer endlichen Anzahl Gebiete dachziegelartig überdeckt werden, so daß in einem jeden Teilgebiete entweder x eine eindeutige Funktion von y und z , oder etwa y eine ebensolche Funktion von x und z darstellt. Die Lage der Punkte auf S denken wir uns durch ein geeignetes System Gaußscher Parameter ξ und η bestimmt. Im allgemeinen gehört zu einem jeden der soeben erwähnten Teilgebiete ein besonderes System der Parameter ξ und η . Es seien

$$(1) \quad x = X(\xi, \eta), \quad y = Y(\xi, \eta), \quad z = Z(\xi, \eta)$$

die Gleichungen von S . Wir nehmen an, daß die Funktionen X , Y und Z stetige Ableitungen aller Ordnungen haben¹⁴⁾. Der Ausdruck

$$(2) \quad \left[\frac{\partial(X, Y)}{\partial(\xi, \eta)} \right]^2 + \left[\frac{\partial(Y, Z)}{\partial(\xi, \eta)} \right]^2 + \left[\frac{\partial(Z, X)}{\partial(\xi, \eta)} \right]^2$$

ist offenbar nirgends gleich Null.

Den Raum T denken wir uns mit einer homogenen Flüssigkeit der Dichte f erfüllt, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetz anziehen. Weitere Kräfte liegen nicht vor, insbesondere soll der Außen-

¹⁴⁾ Diese Voraussetzung bildet keine Einschränkung der Allgemeinheit. Sie ist, wie wir im Kapitel IV § 1 zeigen werden, stets erfüllt, wenn T , wie im vorliegenden Falle, eine Gleichgewichtsfigur rotierender Flüssigkeit mit stetiger Normale darstellt.

druck gleich Null sein. Wir bezeichnen die laufenden Koordinaten eines Punktes auf S mit X, Y, Z , das Newtonsche Potential von T mit $V(x, y, z)$, die Gaußsche Gravitationskonstante mit κ .

Die Flüssigkeit soll um die z -Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ω wie ein starrer Körper gleichförmig rotieren. Damit T eine¹⁵⁾ Figur des relativen Gleichgewichtes sei, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein.

1. Der Ausdruck

$$(3) \quad V(X, Y, Z) + \frac{\omega^2}{2\pi f}(X^2 + Y^2)$$

muß auf einer jeden Komponente von S einen konstanten Wert haben¹⁶⁾.

2. Die Resultierende aus Anziehungs- und der Zentrifugalkraft muß auf S nach innen gerichtet sein oder verschwinden.

Wir nehmen an, daß ω unterhalb der Poincaréschen Schranke $\sqrt{2\pi\kappa}f$ liegt. Die vorstehenden Bedingungen sind dann, wie man weiß, auch hinreichend; im Innern der Flüssigkeitsmasse herrscht Druck.

Bekanntlich ist die Rotationsachse (z -Achse) eine Hauptträgheitsachse des Körpers¹⁷⁾. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir den Koordinatenursprung in den Schwerpunkt legen und der x - und der y -Achse die Richtung der beiden anderen Hauptträgheitsachsen geben. Bei der Diskussion der Endformeln werden wir meist die weitere Voraussetzung machen, daß die Ebenen $z=0$ und $y=0$ Symmetrieebenen des Körpers T sind¹⁸⁾.

Indem Stabilitätsfragen zunächst außer Betracht bleiben, wollen wir untersuchen, ob es für Werte der Winkelgeschwindigkeit ω_1 in einem hinreichend kleinen Intervall, das ω in seinem Innern oder auf dem Rande enthält, in der Umgebung des Körpers T weitere Figuren T_1 des relativen Gleichgewichtes gibt, die eine *lineare Reihe* bilden. Darunter ist folgendes zu verstehen.

Die Berandung S_1 von T_1 soll aus einer endlichen Anzahl geschlossener, doppelpunktloser, stetig gekrümmter Flächenschalen bestehen, die einander

¹⁵⁾ Nicht notwendig stabile.

¹⁶⁾ Gehören zwei oder mehr Komponenten der Berandung desselben Gebietes, d. h. derselben zusammenhängenden Flüssigkeitsmasse, an, so haben die zugehörigen Konstanten den gleichen Wert.

¹⁷⁾ Der Einfachheit halber ist im folgenden stets von *einem* (unter Umständen aus mehreren getrennten Massen bestehenden) Körper die Rede.

¹⁸⁾ Alle bisher bekannten oder vermuteten Gleichgewichtsfiguren haben eine durch die Rotationsachse hindurchgehende Ebene sowie eine Ebene senkrecht zur Rotationsachse zu Symmetrieebenen. Ihre Schnittlinie ist offenbar eine Hauptträgheitsachse des Körpers. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir in diesem Falle das Achsenkreuz so orientieren, daß die Ebenen $z=0$ und $y=0$ Symmetrieebenen von T werden.

nicht berühren, den einzelnen Komponenten von S umkehrbar eindeutig zugeordnet sind und gegen diese für $\omega_1 \rightarrow \omega$ konvergieren¹⁹⁾.

Ist T_1 eine Gleichgewichtsfigur, so sind augenscheinlich Körper, die man durch beliebige Verschiebung oder Drehung von T_1 um die z -Achse erhält, ebenfalls Gleichgewichtsfiguren. Desgleichen ist, wie man sich leicht überzeugt, jeder in bezug auf den Koordinatenursprung zu T_1 ähnliche Körper eine zu der Winkelgeschwindigkeit ω_1 gehörige Gleichgewichtsfigur.

Sind X, Y, Z und X_1, Y_1, Z_1 laufende Koordinaten zweier Punkte auf einem beliebigen Paar zusammengehöriger Komponenten von S und S_1 und ist $V_1(x, y, z)$ das Newtonsche Potential des Körpers T_1 , so setzen wir zunächst fest, daß

$$(4) \quad V_1(X_1, Y_1, Z_1) - V(X, Y, Z) = \frac{\omega^2}{2\pi f}(X^2 + Y^2) - \frac{\omega_1^2}{2\pi f}(X_1^2 + Y_1^2) + s$$

sein soll. Der reelle Parameter s nimmt auf allen Komponenten von S_1 , die zu der Begrenzung eines und desselben Gebietes gehören, den gleichen Wert an. Ist die Anzahl der getrennten Flüssigkeitsmassen gleich $q (\geq 1)$, so ist demnach unter s kurz die Gesamtheit der Einzelwerte des Parameters, etwa s_1, \dots, s_q , zu verstehen. Da die neuen Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft der gegebenen Figur liegen sollen, während zugleich ω_1 in einer Umgebung von ω liegt, so muß man $|s|$ hinreichend klein annehmen.

Die Werte s_1, \dots, s_q sind, allgemein zu reden, durch die Forderung zu bestimmen, daß das Volumen einer jeden Flüssigkeitsmasse einen vorgeschriebenen Wert hat. Dieses muß sich natürlich von dem entsprechenden Wert bei dem Ausgangskörper hinreichend wenig unterscheiden. Insbesondere kann man fordern, daß die einzelnen Massen der linearen Reihe konstantes Volumen haben. Dieses wird dann dem Volumen der entsprechenden Masse des Ausgangskörpers gleich sein. Ob und wie weit sich die Werte s hierdurch tatsächlich bestimmen lassen, kann natürlich erst eine weitere Diskussion lehren.

Besteht die gegebene Gleichgewichtsfigur aus einer einzigen Masse, so können wir einfacher

$$(5) \quad V_1(X_1, Y_1, Z_1) - V(X, Y, Z) = \frac{\omega^2}{2\pi f}(X^2 + Y^2) - \frac{\omega_1^2}{2\pi f}(X_1^2 + Y_1^2),$$

d. h. $s = 0$ setzen. In der Tat wird, wenn man unter dieser Voraussetzung

¹⁹⁾ Genauer, der Höchstwert der Entfernung eines beliebigen Punktes P auf irgendeiner Komponente von S von der zugehörigen Komponente von S_1 soll für $\omega_1 \rightarrow \omega$ gegen Null konvergieren.

Wie in der Fußnote ¹⁴⁾ bemerkt, lassen sich auf S_1 Parameter angeben, so daß die kartesischen Koordinaten in bezug auf diese stetige Ableitungen aller Ordnungen haben. Dies gilt, auch wenn man von der Fläche S_1 lediglich voraussetzt, daß sie eine stetige Normale hat.

mit v das Volumen des Ausgangskörpers, mit v_1 dasjenige von T_1 bezeichnet, v_1 im allgemeinen von v verschieden ausfallen. Das Volumen derjenigen Gleichgewichtsfigur, die aus T_1 durch die Ähnlichkeitstransformation mit dem Koordinatensprung als Mittelpunkt hervorgeht, wenn man das Vergrößerungsverhältnis gleich $\sqrt[3]{\frac{v}{v_1}}$ macht, ist gleich v . Es ist demnach in dem besonderen Falle $q = 1$ leicht, wenn erst einmal eine lineare Reihe von Gleichgewichtsfiguren gefunden ist, zu den Figuren konstanten Volumens überzugehen.

Ist die Anzahl der einzelnen Flüssigkeitsmassen $q > 1$, so kann man dem Gesamtvolumen der etwa vorhandenen neuen Gleichgewichtsfiguren wie vorstehend durch Vermittelung einer Ähnlichkeitstransformation einen vorgeschriebenen Wert geben, insbesondere dem Volumen des Ausgangskörpers gleich machen.

Denken wir uns in dem besonderen Falle $q = 1$ die Winkelgeschwindigkeit ω festgehalten. Man wird erwarten, daß den verschiedenen Werten von s neue, eine oder mehrere lineare Reihen bildende Gleichgewichtsfiguren entsprechen. Die Lösung wird indessen im allgemeinen trivial ausfallen, indem die neuen Figuren aus der alten durch eine Ähnlichkeitstransformation entspringen²⁰⁾. Anders für $q > 1$. Hier sind die neuen, den Bedingungen $\omega_1 = \omega$, $s \neq 0$ genügenden Gleichgewichtsfiguren nicht trivial.

In dem Punkte (ξ, η) auf S denken wir uns die Normale (ν) gezogen und auf dieser, positiv nach außen gerichtet, eine Strecke ζ aufgetragen. Solange $|\zeta|$ kleiner als das Minimum der beiden Hauptkrümmungsradien auf S , etwa

$$(6) \quad |\zeta| < \varepsilon_0$$

ist, gehört zu einem jeden Wertsystem ξ, η, ζ nur ein Punkt des Raumes und umgekehrt. Wir nehmen an, daß die Gleichung der Fläche S_1 , die von ω_1 stetig abhängen soll, auf die Form

$$(7) \quad \zeta = \zeta(\xi, \eta, \omega_1)$$

gebracht werden kann. Die Funktion $\zeta(\xi, \eta, \omega_1)$ soll stetige partielle Ableitungen der beiden ersten Ordnungen $\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}, \frac{\partial \zeta}{\partial \eta}, \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2}, \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi \partial \eta}, \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \eta^2}$ haben.

Diese Bedingungen sind, wie später gezeigt werden wird (vgl. Kapitel IV, § 1), stets erfüllt, wenn der Höchstwert der Entfernung eines Punktes auf S_1 von der Fläche S und der Wert $|\omega_1 - \omega|$ unterhalb einer angebe-

²⁰⁾ Ob es darüber hinaus noch weitere nicht triviale, zu dem gleichen Wert von ω gehörige Gleichgewichtsfiguren gibt, kann erst eine eingehende Diskussion lehren. Es kann sich dabei jedenfalls nur um Ausnahmefälle handeln (vgl. Kapitel III, § 3).

baren Schranke liegen und wenn überdies die Schwerkraft, d. h. die Resultierende aus Anziehungs- und Zentrifugalkraft auf S nach innen gerichtet ist.

Zur Vereinfachung wird von jetzt an mit R die Entfernung des Punktes (ξ, η) von der z -Achse, mit τ der Kosinus des von (ν) und dem Lote von (ξ, η) auf die Umdrehungsachse²¹⁾ eingeschlossenen Winkels, mit $d\sigma$ das Flächenelement in (ξ, η) bezeichnet. Die entsprechenden Werte im Punkte (ξ', η') auf S sollen $R', \tau', d\sigma'$ heißen. Die Entfernung der Punkte (ξ, η) und (ξ', η') sei ϱ . Für (ξ, η) und (ξ', η') wird gelegentlich einfacher σ und σ' , für R, τ, \dots dementsprechend $R(\sigma), \tau(\sigma), \dots$ geschrieben.

Wir setzen, wenn (ξ, η, ζ^*) den Punkt (x, y, z) bezeichnet,

$$(8) \quad V(x, y, z) = W(\xi, \eta, \zeta^*), \quad V_1(x, y, z) = W_1(\xi, \eta, \zeta^*).$$

Die Komponente der von dem Körper T in dem Punkte (ξ, η) seiner Oberfläche auf einen materiellen Punkt von der Masse 1 ausgeübten Anziehungskraft in der Richtung von (ν) hat den Wert

$$(9) \quad f\kappa \frac{\partial}{\partial \nu} W(\xi, \eta, 0).$$

Die Schwerkraft im Punkte (ξ, η) steht auf S senkrecht und ist (positiv nach außen gerichtet) gleich

$$(10) \quad f\kappa \frac{\partial}{\partial \nu} W(\xi, \eta, 0) + \omega^2 R \tau \quad f\kappa \psi.$$

Der Wert dieser Ortsfunktion im Punkte (ξ', η') wird mit $f\kappa\psi'$ bezeichnet.

Da S eine Niveaufläche ist, und, wie wir annehmen wollen, Zugspannungen in der Flüssigkeit ausgeschlossen sind, so ist auf S durchweg $\psi \leq 0$. Wir nehmen darüber hinaus an, daß

$$(11) \quad \psi < 0$$

ist, d. h. die Schwerkraft auf S nach innen gerichtet ist.

§ 2.

Es sei (ξ, η, ζ) der Punkt (X_1, Y_1, Z_1) auf S_1 . Wir setzen

$$(12) \quad V_1(X_1, Y_1, Z_1) = U_1(\xi, \eta)$$

und analog, wenn (ξ, η) den Punkt (X, Y, Z) auf S bezeichnet,

$$(13) \quad V(X, Y, Z) = U(\xi, \eta).$$

Der Ausdruck $U_1 - U$ läßt sich, wie wir jetzt zeigen werden, in eine

²¹⁾ Von dieser nach (ξ, η) hin gerichtet.

für hinreichend kleine Werte von $|\zeta|$, $\left|\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\right|$, $\left|\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\right|$ unbedingt und gleichmäßig konvergierende Reihe

$$(14) \quad U_1 - U = U^{(1)} + U^{(2)} + U^{(3)} + \dots$$

entwickeln, die folgende Eigenschaften hat:

1. Es ist

$$(15) \quad U^{(n)} = \int_S \frac{1}{\varrho^n} K^{(n)} d\sigma',$$

unter $K^{(n)}$ eine Form n -ten Grades der Variablen ζ , ζ' , $\frac{\partial \zeta'}{\partial \xi'}$, $\frac{\partial \zeta'}{\partial \eta'}$ verstanden²²⁾.

2. Es gilt

$$(16) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \xi}(U_1 - U) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_S \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\varrho^n} K^{(n)} \right) d\sigma', \\ \frac{\partial}{\partial \eta}(U_1 - U) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_S \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{\varrho^n} K^{(n)} \right) d\sigma'. \end{cases}$$

Die unendlichen Reihen rechter Hand konvergieren unbedingt und gleichmäßig.

Die Reihen (14) und (16) konvergieren, wie gleichzeitig gezeigt werden wird, auch wenn für ζ , $\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}$, $\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}$ dem absoluten Betrage nach hinreichend kleine komplexe Werte eingesetzt werden. Die Reihe (14) ist als Definitionsgleichung von U_1 für komplexe ζ aufzufassen.

Neben den Flächen S und S_1 betrachten wir die einparametrische Flächenschar S_t ($0 \leq t \leq 1$), die sich symbolisch in der Form $S + t(S_1 - S)$ darstellen läßt. Dem Punkte (ξ, η) auf S entspricht auf S_t ein Punkt mit den (krummlinigen) Koordinaten $\xi, \eta, t\zeta$. Der von S_t begrenzte Körper heiße T_t , sein Potential im Punkte (ξ, η, ζ^*) sei $W_t(\xi, \eta, \zeta^*)$ und insbesondere im Punkte $\xi, \eta, t\zeta$ auf T_t einfacher $U_t(\xi, \eta)$.

Der Beweis des soeben angegebenen Satzes wird dadurch erbracht, daß die Differenz $U_t(\xi, \eta) - U(\xi, \eta)$ nach Potenzen von t entwickelt wird. In der sich ergebenden unendlichen Reihe wird alsdann $t=1$ gesetzt.

Wir beginnen mit der Herleitung eines Ausdruckes für $\frac{\partial U_t}{\partial t}$. Es gilt

$$(17) \quad \begin{cases} \frac{1}{h}(U_{t+h} - U_t) = \frac{1}{h}\{W_{t+h}[\xi, \eta, (t+h)\zeta] - W_t(\xi, \eta, t\zeta)\} \\ \quad = \frac{1}{h}\{W_{t+h}[\xi, \eta, (t+h)\zeta] - W_{t+h}(\xi, \eta, t\zeta)\} \\ \quad \quad + \frac{1}{h}\{W_{t+h}(\xi, \eta, t\zeta) - W_t(\xi, \eta, t\zeta)\}. \end{cases}$$

²²⁾ Jede der beiden Ableitungen $\frac{\partial \zeta'}{\partial \xi'}$, $\frac{\partial \zeta'}{\partial \eta'}$ tritt übrigens nur linear auf.

Der Ausdruck

$$(18) \quad W_{t+h}(\xi, \eta, t\zeta) - W_t(\xi, \eta, t\zeta)$$

stellt das Potential des schalenförmigen Körpers $T_{t+h} - T_t$ im Punkte $\xi, \eta, t\zeta$ auf S_t dar. Es sei φ_t der von der Außennormale an S_t in diesem Punkte mit der Geraden (ν) eingeschlossene Winkel, $d\sigma'_t$ das Flächenelement von S_t in $(\xi', \eta', t\zeta')$ und ϱ_t die Entfernung der Punkte $(\xi, \eta, t\zeta)$ und $(\xi', \eta', t\zeta')$. Von den Normalen an S durch den Rand von $d\sigma'_t$ wird aus $T_{t+h} - T_t$ ein Volumen herausgeschnitten, das, positiv oder negativ angesetzt, je nachdem $\zeta' > 0$ oder < 0 ist, bis auf die Größen höherer Ordnung in bezug auf h , den Wert

$$(19) \quad \zeta' h \cos \varphi'_t d\sigma'_t$$

hat. Das zweite Glied rechts in (17) liefert demnach für $h \rightarrow 0$, wie sich ohne Schwierigkeiten zeigen läßt,

$$(20) \quad \int_{S_t} \frac{1}{\varrho_t} \zeta' \cos \varphi'_t d\sigma'_t. \quad {}^{23)}$$

Der erste Summand gibt für $h \rightarrow 0$ den Wert

$$(21) \quad \zeta \frac{\partial}{\partial \nu} W_t(\xi, \eta, t\zeta),$$

der sich nach einer teilweisen Integration in bekannter Weise auf die Form

$$(22) \quad -\zeta \int_{S_t} \frac{1}{\varrho_t} \cos \theta'_t d\sigma'_t$$

bringen läßt. Hierbei bezeichnet θ'_t den von der Außennormale an S_t im Punkte $(\xi', \eta', t\zeta')$ mit der Geraden (ν) eingeschlossenen Winkel²⁴⁾.

²³⁾ Man kann dieses Resultat auch wie folgt einsehen. Es gilt

$$W_{t+h}(\xi, \eta, t\zeta) - W_t(\xi, \eta, t\zeta) = \int_t^{t+h} dt_* \int_S \frac{1}{\varrho_*} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, t_*)} d\xi d\eta,$$

unter ϱ_* die Entfernung des Punktes $\xi, \eta, t\zeta$ von einem variablen Punkte $(\xi', \eta', t_*\zeta')$ des Körpers $T_{t+h} - T_t$ verstanden. Das über S erstreckte Integral hat, wie eine nähere Betrachtung der Jacobischen Determinante $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, t_*)}$ zeigt, den Wert

$$\int_S \zeta' \frac{1}{\varrho_*} \cos \varphi'_{t_*} d\sigma'_{t_*}. \quad \text{Dieses Integral ist eine stetige Funktion von } t_*. \text{ Darum ist}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \{W_{t+h}(\xi, \eta, t\zeta) - W_t(\xi, \eta, t\zeta)\} = \int_S \zeta' \frac{1}{\varrho} \cos \varphi'_t d\sigma'_t.$$

²⁴⁾ In der Tat ist

$$\frac{1}{h} \{W_{t+h}[\xi, \eta, (t+h)\zeta] - W_{t+h}(\xi, \eta, t\zeta)\} = \zeta \frac{\partial}{\partial \nu} W_{t+h}[\xi, \eta, (t+\delta_0 h)\zeta], \quad 0 < \delta_0 < 1.$$

Es sei vorübergehend mit ϱ^* die Entfernung der Punkte $\xi, \eta, (t+\delta_0 h)\zeta$ und

Es gilt demnach

$$(24) \quad \frac{\partial U_t}{\partial t} = \zeta \frac{\partial}{\partial \nu} W_t(\xi, \eta, t\zeta) + \int_{S_t} \frac{1}{\varrho_t} \zeta' \cos \varphi'_t d\sigma'_t \\ = \int_{S_t} \frac{1}{\varrho_t} (\zeta' \cos \varphi'_t - \zeta \cos \theta'_t) d\sigma'_t.$$

Sind

$$(25) \quad x = X(\xi, \eta), \quad y = Y(\xi, \eta), \quad z = Z(\xi, \eta)$$

die Gleichungen von S , so lauten diejenigen der Fläche S_t

$$(26) \quad x = X + at\zeta, \quad y = Y + bt\zeta, \quad z = Z + ct\zeta,$$

unter a, b, c die Richtungskosinus der Normale (ν) verstanden. Es gilt

$$(27) \quad d\sigma'_t = d\xi' d\eta' \sqrt{A'^2_t + B'^2_t + C'^2_t}, \\ A'_t = \frac{\partial(Y' + b't\zeta', Z' + c't\zeta')}{\partial(\xi', \eta')}, \quad B'_t = \frac{\partial(Z' + c't\zeta', X' + a't\zeta')}{\partial(\xi', \eta')}, \\ C'_t = \frac{\partial(X' + a't\zeta', Y' + b't\zeta')}{\partial(\xi', \eta')},$$

$$\cos \varphi'_t = \frac{a'A'_t + b'B'_t + c'C'_t}{\sqrt{A'^2_t + B'^2_t + C'^2_t}}, \quad \cos \theta'_t = \frac{aA'_t + bB'_t + cC'_t}{\sqrt{A'^2_t + B'^2_t + C'^2_t}},$$

mithin in naheliegender Schreibweise

$$(28) \quad \frac{\partial U_t}{\partial t} = \int_{S_t} \frac{1}{\varrho_t} \sum A'_t (a'\zeta' - a\zeta) d\xi' d\eta' {}^{25)}.$$

Aus (26) und den analogen Ausdrücken für die kartesischen Koordinaten des Punktes $(\xi', \eta', t\zeta')$ auf S_t ergibt sich

$$(29) \quad \varrho_t^2 = \varrho^2 + 2t \sum (X' - X)(a'\zeta' - a\zeta) + t^2 \sum (a'\zeta' - a\zeta)^2 \\ = \varrho^2 [1 + k(t)].$$

$\xi', \eta', (t+h)\zeta'$ bezeichnet. Der Ausdruck rechts läßt sich durch teilweise Integration in naheliegender Bezeichnungsweise auf die Form (23) — $\zeta \int_{S_{t+h}} \frac{1}{\varrho^*} \cos \theta'_{t+h} d\sigma'_{t+h}$ bringen.

Für $h \rightarrow 0$ geht (23), wie sich leicht zeigen läßt, in (22) über.

Die im vorstehenden angewandte Umwandlung des Volumintegrals in ein Oberflächenintegral ist ohne weiteres durchführbar, wenn die Randfläche mit einer jeden Geraden, die sie trifft, eine endliche Anzahl von Punkten oder Strecken gemeinsam hat. Die Transformationsformel gilt indessen, wie sich auf einem Umwege zeigen läßt, allgemeiner für doppelpunktlose Flächen mit stetiger Normale. Vgl. L. Lichtenstein, „Über die Greensche Integralformel der Potentialtheorie“, Archiv der Math. und Physik, Bd. 27, 1918, S. 31–37.

²⁵⁾ Der Wert des Integrals (28) ist augenscheinlich von der besonderen Wahl der Parameter ξ und η unabhängig.

Es sei t^* eine Zahl > 1 und k^* ein positiver echter Bruch. Wie man sich leicht überzeugt, ist für alle dem absoluten Betrage nach hinreichend kleinen reellen oder komplexen Werte von ζ , $\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}$, $\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}$, etwa

$$(30) \quad |\zeta|, \quad \left| \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right|, \quad \left| \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right| \leq \epsilon < \epsilon_0,$$

und alle komplexen t in dem Bereiche $|t| \leq t^*$

$$(31) \quad |k(t)| \leq k^*.$$

Der Quotient $\left| \frac{\varrho_t}{\varrho} \right|$ ist demnach von Null verschieden.

Das Integral

$$(32) \quad \begin{aligned} J &= \int_S \frac{1}{\varrho_t} \sum A'_i (a' \zeta' - a \zeta) d\xi' d\eta' \\ &= \int_S \frac{1}{\varrho} \frac{1}{\sqrt{1+k(t)}} \sum A'_i (a' \zeta' - a \zeta) d\xi' d\eta' \end{aligned}$$

ist eine in dem Bereiche $|t| \leq t^*$ analytische und reguläre Funktion von t .

Dies erkennt man wohl am einfachsten wie folgt. Man setze

$$(33) \quad \int_S = \int_{S-\bar{S}} + \int_{\bar{S}},$$

unter \bar{S} den in der Kreisfläche $(\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2 \leq \bar{D}^2$ in der Nachbarschaft von (ξ, η) enthaltenen Teil von S verstanden. Das Integral $\int_{S-\bar{S}}$ ist, wie man unmittelbar sieht, eine analytische und reguläre Funktion von t . Berücksichtigt man, daß $\left| \int_{\bar{S}} \right|$ für alle (ξ, η) auf S und alle t im Bereiche $|t| \leq t^*$ für $\bar{D} \rightarrow 0$ gleichmäßig verschwindet, daß mithin gleichmäßig

$$(34) \quad \int_S = \lim_{\bar{D} \rightarrow 0} \int_{S-\bar{S}}$$

gilt, so erhält man in der Tat unsere Behauptung. In der gleichen Weise läßt sich zeigen, daß auch die partiellen Ableitungen $\frac{\partial J}{\partial \xi}$, $\frac{\partial J}{\partial \eta}$, als Funktionen von t aufgefaßt, analytisch und regulär sind²⁶⁾.

Nach bekannten Sätzen ist für alle $n > 1$

$$(35) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^{n-1} J}{\partial t^{n-1}} &= \lim_{\bar{D} \rightarrow 0} \int_{S-\bar{S}} \sum (a' \zeta' - a \zeta) \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \left(\frac{A'_i}{\varrho_t} \right) d\xi' d\eta' \\ &= \int_S \sum (a' \zeta' - a \zeta) \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \left(\frac{A'_i}{\varrho_t} \right) d\xi' d\eta'. \end{aligned}$$

²⁶⁾ Die Ableitungen $\frac{\partial J}{\partial \xi}$, $\frac{\partial J}{\partial \eta}$ erhält man ganz einfach durch eine Differentiation unter dem Integralzeichen. Man vergleiche die Betrachtungen des nächst folgenden Paragraphen.

Der Grenzübergang ist für alle (ξ, η) auf S und alle t im Bereiche $|t| \leq t^*$ gleichmäßig.

Man sieht jetzt leicht ein, daß $U_t(\xi, \eta)$, sofern

$$(36) \quad \left| \xi' \right|, \quad \left| \frac{\partial \xi}{\partial \xi} \right|, \quad \left| \frac{\partial \xi}{\partial \eta} \right| < \varepsilon$$

angenommen wird, eine für alle t in dem Intervalle $0 \leq t \leq t^*$ analytische und reguläre Funktion von t darstellt, die über den Bereich $|t| < t^*$ regulär fortgesetzt werden kann. Es gilt (für $n \geq 3$)

$$(37) \quad \frac{\partial^n U_t}{\partial t^n} = \frac{\partial^{n-1} J}{\partial t^{n-1}} = \int_S \sum (a' \zeta' - a \zeta) \left\{ A'_t \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \left(\frac{1}{\varrho_t} \right) \right. \\ \left. + \binom{n-1}{1} \frac{\partial A'_t}{\partial t} \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}} \left(\frac{1}{\varrho_t} \right) + \binom{n-1}{2} \frac{\partial^2 A'_t}{\partial t^2} \frac{\partial^{n-3}}{\partial t^{n-3}} \left(\frac{1}{\varrho_t} \right) \right\} d\xi' d\eta'^{27}.$$

Der Ausdruck $\left[\frac{\partial^n U_t}{\partial t^n} \right]_{t=0}$ läßt sich demnach, wie leicht ersichtlich, auf die Gestalt $n! \int_S \frac{1}{\varrho^n} K^{(n)} d\sigma'$ bringen, unter $K^{(n)}$ eine Form n -ten Grades von $\zeta, \zeta', \frac{\partial \zeta'}{\partial \xi'}, \frac{\partial \zeta'}{\partial \eta'}$ verstanden. Jede der zuletzt genannten partiellen Ableitungen kommt in $K^{(n)}$ übrigens nur linear vor.

Der Taylor-Cauchysche Entwicklungssatz liefert

$$(39) \quad U_t(\xi, \eta) - U(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left[\frac{\partial^n U_t}{\partial t^n} \right]_{t=0}$$

und für $t=1$, wie behauptet,

$$(40) \quad U_1 - U = U^{(1)} + U^{(2)} + U^{(3)} + \dots$$

$$U^{(n)} = \frac{1}{n!} \left[\frac{\partial^n U_t}{\partial t^n} \right]_{t=0} = \int_S \frac{1}{\varrho^n} K^{(n)} d\sigma',$$

$$(41) \quad \frac{1}{\varrho^n} K^{(n)} = \frac{1}{n!} \frac{1}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}} \sum (a' \zeta' - a \zeta) \left\{ A'_t \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \left(\frac{1}{\varrho_t} \right) \right. \\ \left. + \binom{n-1}{1} \frac{\partial A'_t}{\partial t} \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}} \left(\frac{1}{\varrho_t} \right) + \binom{n-1}{2} \frac{\partial^2 A'_t}{\partial t^2} \frac{\partial^{n-3}}{\partial t^{n-3}} \left(\frac{1}{\varrho_t} \right) \right\}_{t=0},$$

$$(42) \quad A' = \frac{\partial(Y', Z')}{\partial(\xi', \eta')}, \quad B' = \frac{\partial(Z', X')}{\partial(\xi', \eta')}, \quad C' = \frac{\partial(X', Y')}{\partial(\xi', \eta')}.$$

²⁷⁾ Für $n=2$ ist das letzte, für $n=1$ die beiden letzten Glieder in (37) gleich Null zu setzen. Die Ausdrücke A'_t, B'_t, C'_t sind Polynome zweiten Grades von t . Es ist z. B.

$$(38) \quad A'_t = \frac{\partial(Y', Z')}{\partial(\xi', \eta')} + t \left\{ \frac{\partial(Y', c' \zeta')}{\partial(\xi', \eta')} - \frac{\partial(Z', b' \zeta')}{\partial(\xi', \eta')} \right\} + t^2 \frac{\partial(b' \zeta', c' \zeta')}{\partial(\xi', \eta')}.$$

Da, wie bereits erwähnt, die partiellen Ableitungen $\frac{\partial U_t}{\partial \xi}, \frac{\partial U_t}{\partial \eta}$, als Funktionen von t aufgefaßt, sich ebenfalls im Bereiche $t = t^*$ regulär verhalten, so ist

$$(43) \quad \frac{\partial}{\partial \xi} (U_1 - U) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \xi} U^{(n)}, \quad \frac{\partial}{\partial \eta} (U_1 - U) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \eta} U^{(n)28}.$$

Aus (24) und (40) folgt insbesondere

$$(46) \quad U^{(n)} = \zeta \frac{\partial}{\partial \nu} W(\xi, \eta, 0) + \int_S \frac{1}{\varrho} \zeta d\sigma'.$$

Aus (35) folgt für $n = 2$

$$(47) \quad \frac{\partial^2 U_t}{\partial \xi^2} = \int_S \sum' (a' \zeta' - a \zeta) \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{A'_t}{\varrho_t} \right) d\xi' d\eta'.$$

§ 3.

Die Funktion $\frac{\partial^2 U_t}{\partial \xi^2}$ hat stetige partielle Ableitungen erster Ordnung in bezug auf ξ und η . Es gilt beispielsweise

$$(48) \quad \frac{\partial^3 U_t}{\partial \xi \partial t^2} = \int_S \sum' (a' \zeta' - a \zeta) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial t} \left(\frac{A'_t}{\varrho_t} \right) d\xi' d\eta' \\ - \int_S \sum' \frac{\partial}{\partial \xi} (a \zeta) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{A'_t}{\varrho_t} \right) d\xi' d\eta'.$$

Um den Zusammenhang unserer Betrachtungen nicht zu unterbrechen, wird der Beweis, der etwas langwierige, wenn auch an sich keine Schwierigkeiten darbietende Rechnungen erforderlich macht, in das Schlußkapitel der Arbeit verlegt (vgl. Kapitel V, § 1).

In (47) ist die zu integrierende Funktion beschränkt und, außer höchstens wenn $\xi = \xi', \eta = \eta'$ ist, stetig. In (48) werden die beiden Funktionen unter dem Integralzeichen für $\xi = \xi', \eta = \eta'$ wie $\frac{1}{\varrho}$ unendlich. Führt man die in (47) und (48) vorgeschriebenen Operationen unter Benutzung der Formeln (27) und (29) aus, so findet man nacheinander, daß die Funktionen

²⁸⁾ Es gilt, in der Tat, die für alle (ξ, η) auf S und alle t im Bereiche $|t| \leq t^*$ gleichmäßig konvergente Entwicklung

$$(44) \quad \frac{\partial}{\partial \xi} U_t = \bar{U}^{(0)} = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{U}^{(n)} t^n.$$

Aus (44), (39) und (40) folgt

$$(45) \quad \bar{U}^{(0)} = \frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad \bar{U}^{(n)} = \frac{\partial U^{(n)}}{\partial \xi} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Für $t = 1$ geht demnach (44) in (43) über.

$$\frac{1}{\varrho_t} \frac{\partial \varrho_t}{\partial t}, \quad \frac{\partial \varrho_t}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial^2 \varrho_t}{\partial \xi \partial t}, \quad \varrho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\varrho_t} \right), \quad \varrho^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial t} \left(\frac{1}{\varrho_t} \right)$$

beschränkt und, außer höchstens für $\xi = \xi'$, $\eta = \eta'$, stetig sind.

Wir setzen

$$(49) \quad \int_s = \int_{\bar{s}} + \int_{s-\bar{s}}$$

und führen in dem Integral \int_s Polarkoordinaten r, t durch die Gleichungen

$$(50) \quad r^2 = (\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2, \quad r \tan t = \frac{\eta' - \eta}{\xi' - \xi}$$

ein. Jetzt sind auch die in \int_s unter dem Integralzeichen stehenden Funktionen beschränkt. Es ist ferner beispielsweise

$$(51) \quad \begin{aligned} A_1 &= \int_{\bar{s}} \sum \frac{\partial}{\partial \xi} (a\zeta) A'_t \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\varrho_t} \right) d\xi' d\eta' \\ &= - \int_0^{2\pi} \int_0^D \sum \left(\zeta \frac{\partial a}{\partial \xi} + a \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right) A'_t \frac{1}{\varrho_t} \frac{\partial \varrho_t}{\partial t} \frac{r}{\varrho_t} dr dt = - \int_0^{2\pi} \int_0^D \Phi dr dt, \\ \frac{1}{\varrho_t} \frac{\partial \varrho_t}{\partial t} &= \sum \frac{X' - X}{\varrho_t} \frac{a'\zeta' - a\zeta}{\varrho_t} + t \sum \frac{(a'\zeta' - a\zeta)^2}{\varrho_t^2}. \end{aligned}$$

Wir nehmen wie vorhin

$$(52) \quad \left| \zeta \right|, \quad \left| \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right|, \quad \left| \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right| < \varepsilon$$

an. Es gilt beispielsweise

$$(53) \quad \begin{aligned} \left| \frac{X' - X}{\varrho_t} \right| &= \left| \frac{X' - X}{\varrho} \frac{1}{\sqrt{1+k(t)}} \right| < \gamma_1, \quad (\gamma_1 \text{ konstant}) \\ \left| \frac{a'\zeta' - a\zeta}{\varrho_t} \right| &= \left| \frac{1}{\sqrt{1+k(t)}} \right| \left| \frac{\xi' - \xi}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \xi} (\tilde{a}\tilde{\zeta}) + \frac{\eta' - \eta}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \eta} (\tilde{a}\tilde{\zeta}) \right|, \end{aligned}$$

$$\tilde{a}\tilde{\zeta} = a(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \zeta(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}), \quad \tilde{\xi} = \xi + \vartheta_0(\xi' - \xi), \quad \tilde{\eta} = \eta + \vartheta_0(\eta' - \eta) \quad (0 < \vartheta_0 < 1)$$

$$\left| \frac{\xi' - \xi}{\varrho} \right|, \quad \left| \frac{\eta' - \eta}{\varrho} \right| < \gamma_2, \quad (\gamma_2 \text{ konstant})$$

demnach, wie leicht zu sehen ist,

$$(54) \quad \left| \frac{a'\zeta' - a\zeta}{\varrho_t} \right| < \gamma_3 \varepsilon \quad \text{und} \quad |\Phi| < \gamma_4 \varepsilon^2,$$

unter γ_3 und γ_4 , wie später unter $\gamma_5, \gamma_6, \dots$ positive Konstanten verstanden. Nunmehr ist

$$(55) \quad |A_1| < \gamma_5 \varepsilon^2$$

und darum, wie man sich leicht überzeugt,

$$(56) \quad \left| \int_s \frac{\partial}{\partial \xi} (a\zeta) A'_t \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\varrho_t} \right) d\xi' d\eta' \right| < \gamma_6 \varepsilon^2.$$

Analoge Ungleichheiten gelten für die übrigen in (47), (48) und in der Formel für $\frac{\partial^3 U_t}{\partial \eta \partial t^2}$ vorkommenden Integrale.

Für alle t in dem Intervalle $0 \leq t \leq t^*$ ist demnach

$$(57) \quad \left| \frac{\partial^2 U_t}{\partial t^2} \right|, \quad \left| \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial^2 U_t}{\partial t^2} \right|, \quad \left| \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial^2 U_t}{\partial t^2} \right| < \gamma \varepsilon^2 \quad (\gamma \text{ konstant}).$$

Wegen

$$(58) \quad \begin{cases} U_1 - U_0 - \left[\frac{\partial U_t}{\partial t} \right]_{t=0} = \int_0^1 dt \int_0^t \frac{\partial^2 U_{t_*}}{\partial t_*^2} dt_*, \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ U_1 - U_0 - \left[\frac{\partial U_t}{\partial t} \right]_{t=0} \right\} = \int_0^1 dt \int_0^t \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial^2 U_{t_*}}{\partial t_*^2} dt_* \end{cases}$$

ist

$$(59) \quad |U_1 - U_0 - U^{(1)}| = |U^{(2)} + U^{(3)} + \dots| = |\Psi| < \gamma \varepsilon^2, \quad \left| \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \right| < \gamma \varepsilon^2$$

und analog

$$(60) \quad \left| \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right| < \gamma \varepsilon^2.$$

Die Funktion $\frac{\partial^2 U_t}{\partial t^2}$ hat stetige partielle Ableitungen zweiter Ordnung in bezug auf ξ und η . (Vgl. Kapitel V, § 2).

Es mögen die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von ζ den Ungleichheiten

$$(61) \quad \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2} \right|, \quad \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi \partial \eta} \right|, \quad \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \eta^2} \right| < \varepsilon$$

genügen. Alsdann gelten, wie im Kapitel V, § 2 gezeigt wird, für alle t in dem Intervalle $0 \leq t \leq t^*$ die Ungleichheiten

$$(62) \quad \left| \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 U_t}{\partial t^2} \right|, \quad \left| \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial^2 U_t}{\partial t^2} \right|, \quad \left| \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 U_t}{\partial t^2} \right| < \gamma' \varepsilon^2 \quad (\gamma' \text{ konstant}).$$

Aus (58), (59) und (62) folgt

$$(63) \quad \left| \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} \right|, \quad \left| \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi \partial \eta} \right|, \quad \left| \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} \right| < \gamma' \varepsilon^2.$$

§ 4.

Aus (26) ergibt sich, wenn man $t = 1$ setzt,

$$(64) \quad X_1 = X + a\zeta, \quad Y_1 = Y + b\zeta, \quad Z_1 = Z + c\zeta.$$

Demnach ist

$$(65) \quad \begin{aligned} X_1^2 + Y_1^2 &= X^2 + Y^2 + 2(aX + bY)\zeta + (a^2 + b^2)\zeta^2 \\ &= R^2 + 2R\tau\zeta + (a^2 + b^2)\zeta^2. \end{aligned}$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$(66) \quad \frac{\omega_1^2 - \omega^2}{2\pi f} = \lambda$$

und erhalten

$$(67) \quad \frac{\omega_1^2}{2\pi f}(X_1^2 + Y_1^2) - \frac{\omega^2}{2\pi f}(X^2 + Y^2) = \lambda(X_1^2 + Y_1^2) \\ + \frac{\omega^2}{2\pi f}(X_1^2 + Y_1^2 - X^2 - Y^2) - \lambda R^2 + \frac{\omega^2}{\pi f} R \tau \zeta + \frac{\omega^2}{2\pi f}(a^2 + b^2)\zeta^2 \\ + 2\lambda R \tau \zeta + (a^2 + b^2)\lambda \zeta^2.$$

Aus (4), (40), (46), (10) und (67) ergibt sich nunmehr die Beziehung

$$(68) \quad \psi \zeta + \int_s^1 \frac{1}{\varrho} \zeta' d\sigma' = s - R^2 \lambda - \frac{\omega^2}{2\pi f}(a^2 + b^2)\zeta^2 - 2 R \tau \lambda \zeta \\ - (a^2 + b^2)\lambda \zeta^2 - U^{(2)} - U^{(3)} - \dots$$

Dies ist eine nichtlineare Integro-Differentialgleichung zur Bestimmung von ζ .

Es sei noch einmal hervorgehoben, daß, wenn T aus q (≥ 1) Einzelmassen besteht, s auf den einzelnen Randkomponenten von S insgesamt q im allgemeinen verschiedene Werte annimmt. Auf allen Randkomponenten, die zu der Begrenzung derselben Masse gehören, hat s den gleichen Wert.

Die im vorstehenden abgeleitete, für das folgende wesentliche Entwicklung für $U_1 - U$ ist in dem besonderen Falle der Flüssigkeitsellipsoide (in einer durch die abweichende Wahl der krummlinigen Koordinaten modifizierten Gestalt) zuerst von Herrn Liapounoff angegeben worden. In seiner in der Fußnote ¹⁰⁾ an zweiter Stelle genannten Arbeit geht Herr Liapounoff von einem Ellipsoide

$$x = \sqrt{\varrho + 1} \sin \theta \cos \psi, \\ y = \sqrt{\varrho + q} \sin \theta \sin \psi, \\ z = \sqrt{\varrho} \cos \theta \quad (\varrho, q \text{ konstant, } q \leq 1)$$

aus und nimmt die Gleichung der gesuchten Gleichgewichtsfigur in der Form

$$x = \sqrt{\varrho + \zeta + 1} \sin \theta \cos \psi, \\ y = \sqrt{\varrho + \zeta + q} \sin \theta \sin \psi, \\ z = \sqrt{\varrho + \zeta} \cos \theta$$

an. Die Bedeutung der Größen ϱ , θ , ψ , ζ , q ist natürlich von derjenigen der in dieser Arbeit ebenso bezeichneten Größen verschieden. Zur Bestimmung von ζ ergibt sich eine zu (68) analoge Integro-Differentialgleichung, die in der Bezeichnungsweise des Herrn Liapounoff lautet [vgl. a. a. O. S. 22 die Formeln (23) und (24)]

$$(69) \quad RH\zeta - \frac{1}{4\pi} \int \frac{H'\zeta' d\sigma'}{D} = \frac{\Delta}{2} W + \text{const.},$$

$$W = \eta(\varrho + \cos^2 \psi + q \sin^2 \psi + \zeta) \sin^2 \theta + U_2 + U_3 + \dots$$

Bei der Ableitung der Gleichung (69) bedient sich Herr Liapounoff bereits einer zu der Körperschar $\xi, \eta, i\zeta$ analogen Körperschar $\theta, \psi, \epsilon\zeta$ ($0 \leq \epsilon \leq 1$), bleibt aber im Gegensatz zu unseren Betrachtungen im wesentlichen im Gebiete des Reellen. Die systematische Heranziehung funktionentheoretischer Hilfsmittel ist demgegenüber für unsere bisherigen Betrachtungen wie auch für die Entwicklungen der Kapitel II und III wesentlich. Als ein weiterer springender Punkt der hier benutzten Methode sei der Ausdruck (24) für $\frac{dU}{dt}$ und seine Entwicklung nach Potenzen von t hervorgehoben. Herr Liapounoff geht unmittelbar von dem Ausdruck $U_1 - U$ aus.

In der im Jahre 1914 erschienenen Abhandlung (vgl. die Fußnote ¹⁰) Abhandlung 5.) kommt Herr Liapounoff noch einmal auf diesen Gegenstand zurück. Die Gleichung der gesuchten Gleichgewichtsfigur wird jetzt in der Form

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{1+\zeta} \sqrt{\varrho + 1} \sin \theta \cos \psi, \\ y &= \sqrt{1+\zeta} \sqrt{\varrho + 1} \sin \theta \sin \psi, \\ z &= \sqrt{1+\zeta} \sqrt{\varrho} \cos \theta \end{aligned}$$

angesetzt. Die weiteren Betrachtungen sind denjenigen seiner zuerst erwähnten älteren Arbeit ganz analog.

Zweites Kapitel.

Existenzsatz. Der reguläre Fall.

§ 1.

Betrachten wir die homogene lineare Integralgleichung

$$(1) \quad \psi \zeta + \int_S \frac{1}{\varrho} \zeta' d\sigma' = 0 \quad ^{29}).$$

Sie hat, wenn T kein Rotationskörper um die z -Achse ist, mindestens zwei linear unabhängige Nullösungen. Ist S eine Rotationsfläche um die z -Achse, so ist die Anzahl der stets vorhandenen Nullösungen gleich 1.

Von der Richtigkeit der vorstehenden Behauptung kann man sich wie folgt leicht überzeugen.

Läßt man die Winkelgeschwindigkeit ω ungeändert und denkt man sich den Körper T parallel zu der z -Achse um eine unendlich kleine

²⁹⁾ Sie geht durch die Substitution $Z = \zeta \sqrt{-\psi}$ in eine Integralgleichung mit symmetrischem Kern über. Man beachte, daß $\psi < 0$ vorausgesetzt worden ist.

Strecke δ^* verschoben, so bleibt der Ausdruck $V(x, y, z) + \frac{\omega^2}{2xf}(x^2 + y^2)$ auf jeder Komponente von S ungeändert. Die Verschiebung in der Richtung von (ν) hat, wie man sich durch eine einfache Rechnung überzeugt, bis auf unendlich kleine Größen höherer Ordnung den Wert $u_0 \delta^* = c \delta^*$. Setzt man in (68) I jetzt $s = 0$, $\lambda = 0$, substituiert für ζ den Wert $u_0 \delta^*$, dividiert links und rechts durch δ^* und geht zur Grenze $\delta^* \rightarrow 0$ über, so findet man unter Berücksichtigung der Ungleichheit (59) I

$$(2) \quad \psi u_0 + \int_S \frac{1}{\rho} u'_0 d\sigma = 0.$$

Die Funktion $u_1 = u_0 \cdot \text{const.} = c \cdot \text{const.}$ ist somit eine Nulllösung der Integralgleichung (1).

Eine zweite Nulllösung gewinnt man, wenn T kein Rotationskörper um die z -Achse ist, dadurch, daß man, ohne die Winkelgeschwindigkeit zu ändern, T um die z -Achse um einen unendlich kleinen Winkel δ_* dreht. Diesmal sei die Verschiebung in der Richtung von (ν) bis auf unendlich kleine Größen höherer Ordnung gleich $u^{(0)} \delta_*$. Offenbar ist auch $u_2 = u^{(0)} \cdot \text{const.}$ eine Nulllösung von (1). Es ist $u^{(0)} = R \cos p$, unter p den von der Bahntangente in (ξ, η) mit (ν) eingeschlossenen Winkel verstanden. Augenscheinlich haben u_1 und u_2 stetige Ableitungen aller Ordnungen. (Im Kapitel III § 1 wird dies übrigens auf einem anderen Wege noch einmal gezeigt.) Man erkennt unmittelbar, daß, wenn T ein Rotationskörper um die z -Achse ist, u_2 identisch verschwindet. Wir denken uns u_1 und, falls T kein Rotationskörper ist, auch u_2 den Beziehungen

$$(3) \quad \int_S \psi u_1^2 d\sigma = -1, \quad \int_S \psi u_2^2 d\sigma = -1,$$

gemäß normiert. Die Gleichungen (3) gehen durch die Substitution $Z = \zeta \sqrt{-\psi}$ in die üblichen Normierungsbeziehungen über.

Ist T_1 eine Gleichgewichtsfigur der Flüssigkeit, so ist jeder Körper, den man erhält, wenn man T_1 parallel zu sich selbst in der Richtung der z -Achse um eine beliebige Strecke verschiebt, oder um die z -Achse um einen beliebigen Winkel dreht, ebenfalls eine Gleichgewichtsfigur. Um die Lage von T_1 festzulegen, bedarf es darum weiterer Festsetzungen. Wir nehmen diese in der Form

$$(4) \quad \int_S \psi u_1 \zeta d\sigma = 0,$$

$$(5) \quad \int_S \psi u_2 \zeta d\sigma = 0$$

an. Ist T ein Rotationskörper, so ist $u_2 = 0$ und (5) ist identisch erfüllt.

Daß für hinreichend kleine, etwa den Beziehungen (53) I genügende Werte von ξ , $\left|\frac{\partial \xi}{\partial \xi}\right|$, $\left|\frac{\partial \xi}{\partial \eta}\right|$ den Forderungen (4) und (5) stets genügt werden kann, sieht man leicht wie folgt ein. Es möge für eine Gleichgewichtsfigur T_1 in der Nachbarschaft von T

$$(6) \quad \int_S \psi u_0 \xi d\sigma = \alpha_0 \geq 0$$

sein. Wir denken uns T_1 um die Strecke δ^* parallel zu der z -Achse verschoben. Hierdurch geht ξ , wie man sich ohne Schwierigkeiten überzeugt, über in

$$(7) \quad \bar{\xi} = \xi + \delta^* (u_0 + D_\varepsilon) + \delta^{*2} F,$$

unter D_ε eine mit ε gleichmäßig verschwindende, unter F eine beschränkte Funktion verstanden. Da $\psi < 0$, mithin

$$(8) \quad \int_S \psi u_0^2 d\sigma < 0$$

ist, ist es für hinreichend kleine ε gewiß möglich δ^* so zu bestimmen, daß

$$(9) \quad \int_S \psi u_0 \bar{\xi} d\sigma = \alpha_0 + \delta^* \int_S \psi u_0 (u_0 + D_\varepsilon) d\sigma + \delta^{*2} \int_S \psi u_0 F d\sigma > 0,$$

mithin auch

$$\int_S \psi u_1 \bar{\xi} d\sigma > 0$$

wird. Die gleiche Bemerkung gilt für die Beziehung (5).

Wir setzen

$$(10) \quad \frac{1}{\psi \varrho} = \psi' (u_1 u_1' + u_2 u_2') + \frac{1}{\psi} N.$$

Es mögen jetzt einmal die Ebenen $y=0$ und $z=0$ Symmetrieebenen des Körpers T sein. Es seien σ^* und $\sigma^{*'}$ Punkte, die in bezug auf die Ebene $y=0$ zu den Punkten σ und σ' symmetrisch liegen. Es gilt, wenn wir einmal für ϱ , N , u_1 , u_2 , ψ , ... ausführlicher

$$\varrho(\sigma, \sigma'), \quad N(\sigma, \sigma'), \quad u_1(\sigma), \quad u_2(\sigma), \quad \psi(\sigma), \dots$$

schreiben, wie man unmittelbar sieht,

$$(11) \quad \varrho(\sigma^*, \sigma^{*'}) = \varrho(\sigma, \sigma'), \quad u_1(\sigma^*) = u_1(\sigma), \quad u_2(\sigma^*) = -u_2(\sigma), \quad \psi(\sigma^*) = \psi(\sigma)$$

und darum auch

$$(12) \quad N(\sigma^*, \sigma^{*'}) = N(\sigma, \sigma').$$

Bezeichnen vorübergehend σ_* , σ'_* Punkte, die zu σ , σ' in bezug auf die Ebene $z=0$ symmetrisch liegen, so ist, wie man in einer ganz ähnlichen Weise zeigen kann,

$$(13) \quad N(\sigma_*, \sigma'_*) = N(\sigma, \sigma').$$

Aus (68) I, (4), (5) und (10) folgt für beliebige Gleichgewichtsfiguren T

$$(14) \quad \psi\zeta + \int_s N\zeta' d\sigma' = s - R^2\lambda - \frac{\omega^2}{2\pi f}(a^2 + b^2)\zeta^2 - 2R\tau\lambda\zeta - (a^2 + b^2)\lambda\zeta^2 \\ - U^{(2)} - U^{(3)} - \dots = II\{\lambda, s, \zeta\}.$$

In diesem und dem folgenden Kapitel werden den Parametern λ und s , oder ausführlicher geschrieben λ, s_1, \dots, s_q allgemein *komplexe* Werte erteilt.

§ 2.

Die weitere Behandlung der Funktionalgleichung (14) fällt verschieden aus, je nachdem u_1 und u_2 die einzigen Nulllösungen der Integralgleichung (1) sind oder nicht. Es möge zunächst der erstere Fall vorliegen.

Nach bekannten Sätzen hat die Integralgleichung

$$\psi\zeta + \int_s N\zeta' d\sigma' = 0$$

keine Nulllösungen.

Wir versuchen (14) durch sukzessive Approximationen aufzulösen und führen hierzu eine unendliche Folge von Funktionen ζ_1, ζ_2, \dots durch folgende Festsetzungen ein. Es gilt

$$(15) \quad \begin{cases} \psi\zeta_1 + \int_s N\zeta_1' d\sigma' = s - R^2\lambda, \\ \psi\zeta_2 + \int_s N\zeta_2' d\sigma' = II\{\lambda, s, \zeta_1\}, \\ \psi\zeta_3 + \int_s N\zeta_3' d\sigma' = II\{\lambda, s, \zeta_2\}, \\ \dots \end{cases}$$

Sind $|\lambda|$ und $|s|$ hinreichend klein, sagen wir

$$(16) \quad |s|, |\lambda| \leq \delta^{(0) \ 30)},$$

so läßt sich für $|\zeta_n|, \left|\frac{\partial\zeta_n}{\partial\xi}\right|, \dots, \left|\frac{\partial^2\zeta_n}{\partial\eta^2}\right|$, wie wir jetzt zeigen wollen, eine von n, σ und σ' unabhängige obere Schranke angeben.

Es sei l eine positive ganze Zahl ≥ 1 und es möge

$$(17) \quad |\zeta_l|, \left|\frac{\partial\zeta_l}{\partial\xi}\right|, \dots, \left|\frac{\partial^2\zeta_l}{\partial\eta^2}\right| \leq \varepsilon^* \leq \varepsilon$$

sein. Ist $|s|, |\lambda| \leq \delta$, so ist mit Rücksicht auf (14), (59) I, (60) I und (63) I

$$(18) \quad \begin{cases} |II\{\lambda, s, \zeta_l\}|, \left|\frac{\partial}{\partial\xi} II\{\lambda, s, \zeta_l\}\right|, \dots \\ \left|\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} II\{\lambda, s, \zeta_l\}\right| < \beta_1\delta + \beta_2\delta\varepsilon^* + \beta_3\varepsilon^{*2} + \beta_4\delta\varepsilon^{*2}, \end{cases}$$

³⁰⁾ Oder ausführlicher geschrieben

$|s_1|, \dots, |s_q|, |\lambda| \leq \delta^{(0)}.$

Hat χ stetige partielle Ableitungen erster Ordnung und ist

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{\partial \chi}{\partial \xi} \right|, \quad \left| \frac{\partial \chi}{\partial \eta} \right| < E, \\ \left| \frac{\partial \chi}{\partial \xi} - \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial \xi} \right|, \quad \left| \frac{\partial \chi}{\partial \eta} - \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial \eta} \right| < E \bar{d}^\mu, \end{array} \right.$$

so hat P stetige partielle Ableitungen zweiter Ordnung und es gilt

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} |P|, \quad \left| \frac{\partial^{n_1+n_2} P}{\partial \xi^{n_1} \partial \eta^{n_2}} \right| < g_3 E, \\ \left| \frac{\partial^{n_1+n_2} P}{\partial \xi^{n_1} \partial \eta^{n_2}} - \frac{\partial^{n_1+n_2} \bar{P}}{\partial \xi^{n_1} \partial \eta^{n_2}} \right| < g_3 E \bar{d}^\mu \end{array} \right. \quad (n_1 + n_2 \leq 2).^{31)}$$

Wir setzen

$$(28) \quad Q = \int_S H \chi' d\sigma'.$$

Wie wir jetzt zeigen wollen, hat unter den zuletzt getroffenen Annahmen auch die Funktion Q stetige partielle Ableitungen der beiden ersten Ordnungen und es gilt

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} |Q|, \quad \left| \frac{\partial^{n_1+n_2} Q}{\partial \xi^{n_1} \partial \eta^{n_2}} \right| < g_4 E, \\ \left| \frac{\partial^{n_1+n_2} Q}{\partial \xi^{n_1} \partial \eta^{n_2}} - \frac{\partial^{n_1+n_2} \bar{Q}}{\partial \xi^{n_1} \partial \eta^{n_2}} \right| < g_4 E \bar{d}^\mu \end{array} \right. \quad (g_4 \text{ konstant}).$$

In der Tat ist bekanntlich ³²⁾

$$(30) \quad H(\sigma, \sigma') + \int_S \frac{1}{\psi(\sigma)} N(\sigma, \sigma_1) H(\sigma_1, \sigma') d\sigma_1 = \frac{1}{\psi(\sigma)} N(\sigma, \sigma'),$$

demnach, ausführlicher geschrieben,

$$(31) \quad Q(\sigma) = \int_S \frac{1}{\psi(\sigma)} N(\sigma, \sigma') \chi_0(\sigma') d\sigma',$$

$$(32) \quad \chi_0(\sigma) = \chi(\sigma) - \int_S H(\sigma, \sigma') \chi(\sigma') d\sigma'.$$

Für (32) kann man auch setzen

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} \chi_0(\sigma) = \chi(\sigma) - Q(\sigma) = \chi(\sigma) - \int_S \frac{1}{\psi(\sigma)} N(\sigma, \sigma') \chi_0(\sigma') d\sigma' \\ = \chi(\sigma) - \int_S \frac{1}{\psi_Q} \chi'_0 d\sigma' + \int_S \psi'(u_1 u'_1 + u_2 u'_2) \chi'_0 d\sigma'. \end{array} \right.$$

³¹⁾ Vgl. A. Korn, „Sur les équations d'élasticité“, Annales de l'École Normale, (3) 24 (1907), S. 9–75 (S. 13–18, insbesondere die letzten vier Zeilen des § 2). Herr Korn nimmt, was unwesentlich ist, χ reell an und betrachtet im übrigen die kartesischen Koordinaten. Der Übergang von diesen zu den Koordinaten ξ und η macht keine Schwierigkeiten.

³²⁾ Vgl. z. B. J. Plemelj, „Zur Theorie der Fredholm'schen Funktionalgleichung“, Monatshefte für Math. u. Physik 15 (1904), S. 93–128 (S. 96).

Aus (32) folgt zunächst, daß die Funktion $\chi_0(\sigma)$ stetig ist und einer Ungleichheit von der Form

$$(34) \quad |\chi_0| < \beta_6 E$$

genügt. Nunmehr ergibt sich aus (26) und (33), daß

$$(35) \quad |\bar{\chi}_0 - \chi_0| < \beta_7 E \bar{d}''$$

gilt. Aus (33) folgt jetzt unter Berücksichtigung von (26), daß χ_0 stetige Ableitungen erster Ordnung hat und daß

$$(36) \quad \left| \frac{\partial \chi_0}{\partial \xi} \right|, \quad \left| \frac{\partial \chi_0}{\partial \eta} \right| < \beta_8 E, \quad \left| \frac{\partial \bar{\chi}_0}{\partial \xi} - \frac{\partial \chi_0}{\partial \xi} \right|, \quad \left| \frac{\partial \bar{\chi}_0}{\partial \eta} - \frac{\partial \chi_0}{\partial \eta} \right| < \beta_8 E \bar{d}''$$

ist. Die zu beweisenden Ungleichheiten sind den vorangegangenen Betrachtungen gemäß eine Folge der Beziehungen (31), (34) und (36).

Aus (20) und (19) schließen wir, da ψ gewiß stetige Ableitungen der beiden ersten Ordnungen hat, daß

$$(37) \quad |\zeta_{l+1}|, \quad \left| \frac{\partial \zeta_{l+1}}{\partial \xi} \right|, \dots, \quad \left| \frac{\partial^2 \zeta_{l+1}}{\partial \eta^2} \right| < \beta_9 (\delta + \delta \varepsilon^* + \varepsilon^{*2})$$

ist. Wir nehmen ε^* gleich der kleineren der beiden Zahlen

$$(38) \quad \varepsilon \quad \text{und} \quad \frac{1}{2\beta_9}$$

an. Es sei ferner

$$(39) \quad \delta < \varepsilon^* \frac{1 - \beta_9 \varepsilon^*}{\beta_9 (1 + \varepsilon^*)}.$$

Aus (37) ergibt sich dann augenscheinlich

$$(40) \quad |\zeta_{l+1}|, \quad \left| \frac{\partial \zeta_{l+1}}{\partial \xi} \right|, \dots, \quad \left| \frac{\partial^2 \zeta_{l+1}}{\partial \eta^2} \right| < \varepsilon^*.$$

Diese Ungleichheiten sind also eine Folge der Ungleichheiten (17).

Wegen (20) ist, wenn $|\lambda|$, $|s|$ hinreichend klein gewählt sind, etwa

$$(41) \quad |\lambda|, \quad |s| < \delta^{(0)} \leq \delta, \quad \left(\delta < 1, \delta < \varepsilon^* \frac{1 - \beta_9 \varepsilon^*}{\beta_9 (1 + \varepsilon^*)} \right)$$

gewiß

$$(42) \quad |\zeta_1|, \quad \left| \frac{\partial \zeta_1}{\partial \xi} \right|, \dots, \quad \left| \frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial \eta^2} \right| < \varepsilon^*.$$

Nimmt man demnach $|s|$ und $|\lambda|$ den Beziehungen (16) genügend an, so gelten (40), wie behauptet, für alle positiven l .

§ 3.

Die Funktionen der Folge ζ_n ($n = 1, 2, \dots$) sind für alle komplexen $|\lambda|$ und $|s|$ in dem Gebiete $|\lambda|, |s| < \delta^{(0)}$ analytische und reguläre Funktionen von λ .

Dies sieht man wohl am einfachsten wie folgt ein. Betrachten wir den Ausdruck

$$(43) \quad J = \int_{\bar{S}} \frac{1}{\varrho_t} \sum A'_i (\alpha' \zeta' - a \zeta) d\xi' d\eta' = \lim_{\bar{D} \rightarrow 0} \int_{S-\bar{S}}$$

und nehmen wir an, daß ζ eine in gewissen Kreisgebieten um den Koordinatenursprung erklärte analytische und reguläre Funktion der komplexen Variablen v_1, \dots, v_m sei. Das gleiche gilt dann, wie unter Zuhilfenahme des Cauchyschen Integrals unmittelbar gezeigt werden kann, auch für $\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}, \frac{\partial \zeta}{\partial \eta}$. Das Integral $\int_{S-\bar{S}}$ ist in t und v_1, \dots, v_m analytisch und regulär, und, da der Grenzübergang gleichmäßig ist, so gilt das gleiche auch für J . Auch die Differentialquotienten $\frac{\partial^m U_t}{\partial t^m} = \frac{\partial^{m-1} J}{\partial t^{m-1}}$ sind in v_1, \dots, v_m und t analytisch und regulär. In der Entwicklung

$$(44) \quad U_t - U = U^{(1)} + U^{(2)} + U^{(3)} + \dots$$

sind mithin alle Funktionen $U^{(n)}$ ($n = 1, 2, \dots$) in bezug auf v_1, \dots, v_m analytisch und regulär. Die unendliche Reihe (44) konvergiert unbedingt und gleichmäßig. Demnach ist auch der Ausdruck $U^{(2)} + U^{(3)} + \dots$ in bezug auf v_1, \dots, v_m analytisch und regulär.

Aus (20) folgt ohne weiteres, daß ζ_1 in bezug auf s und λ ³³⁾ analytisch ist³⁴⁾. Nach dem soeben bewiesenen gilt das gleiche für $\Pi\{\lambda, s, \zeta_1\}$; für v_1, \dots, v_m sind diesmal λ, s_1, \dots, s_q einzuführen. Auch der Ausdruck

$$(45) \quad \int_{\bar{S}} \frac{1}{\psi'} H \Pi' \{\lambda, s, \zeta_1\} d\sigma' = \lim_{\substack{D \rightarrow 0 \\ S-\bar{S}}} \int_{\psi'} \frac{1}{\psi'} H \Pi' \{\lambda, s, \zeta_1\} d\sigma' \quad ^{35)},$$

demnach auch ζ_2 ist in bezug auf λ und s analytisch. Also sind alle ζ_n ($n = 1, 2, \dots$) in den Kreisflächen $|s|, |\lambda| < \delta^{(0)}$ in bezug auf λ und s analytisch und regulär.

Es sei ζ_{n_1} ($n = 1, 2, \dots$) irgendeine der Folge ζ_n ($n = 1, 2, \dots$) entnommene Teilfolge. Wegen (40) läßt sich aus ζ_{n_1} eine weitere Folge ζ_{n_2} ($n = 1, 2, \dots$) aussondern, so daß $\zeta_{n_2}, \frac{\partial \zeta_{n_2}}{\partial \xi}, \frac{\partial \zeta_{n_2}}{\partial \eta}$ für alle (ξ, η) auf S und alle $|\lambda|, |s| \leq \delta^{(1)} < \delta^{(0)}$ gleichmäßig konvergieren. Die Grenzfunktion ζ ist nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig. Sie genügt den Ungleichheiten

$$(46) \quad \left| \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial \xi} - \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right| < \varepsilon^* \bar{d}, \quad \left| \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial \eta} - \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right| < \varepsilon^* \bar{d}.$$

³³⁾ Oder, ausführlicher geschrieben, in bezug auf s_1, \dots, s_q, λ .

³⁴⁾ Und den Beziehungen (42) genügt.

³⁵⁾ Mit $\Pi' \{\lambda, s, \zeta_1\}$ wird der Wert bezeichnet, den man erhält, wenn man in $\Pi\{\lambda, s, \zeta_1\}$ für σ überall σ' setzt

Es gilt nämlich der folgende, im wesentlichen auf Ascoli zurückgehende Satz.

In einem mehrdimensionalen beschränkten, reellen oder komplexen Gebiete Θ sei eine Folge stetiger, gleichmäßig beschränkter Funktionen mehrerer reeller oder komplexer Variablen F_n ($n = 1, 2, \dots$) gegeben, deren Differenzenquotienten in bezug auf alle Variablen ebenfalls gleichmäßig beschränkt sind. Dann läßt sich aus einer jeden aus F_n ($n = 1, 2, \dots$) entnommenen Teilfolge F_{n_1} ($n = 1, 2, \dots$) eine weitere Teilfolge F_{n_2} ($n = 1, 2, \dots$) aussondern, die in jedem ganz im Innern von Θ gelegenen Bereiche gleichmäßig konvergiert³⁶⁾.

Im vorliegenden Falle ist der Satz auf die Folgen $\frac{\partial \zeta_n}{\partial \xi}$ und $\frac{\partial \zeta_n}{\partial \eta}$ ($n = 1, 2, \dots$) anzuwenden. Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial \zeta_n}{\partial \xi}$, $\frac{\partial \zeta_n}{\partial \eta}$ sind Funktionen von $\xi, \eta, \lambda, s_1, \dots, s_q$ und haben wegen (40) gleichmäßig beschränkte Ableitungen in bezug auf ξ und η . Da sie ferner für $|\lambda|, |s| < \delta^{(0)}$ analytisch und regulär sind, so sind die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial \zeta_n}{\partial \xi}, \dots, \frac{\partial}{\partial s_q} \frac{\partial \zeta_n}{\partial \eta}$ für $|\lambda|, |s| \leq \delta^{(1)} < \delta^{(0)}$ gewiß gleichmäßig beschränkt. Man kann demnach aus ζ_{n_1} eine Teilfolge ζ_{n_2} aussondern, so daß $\frac{\partial \zeta_{n_2}}{\partial \xi}$ gleichmäßig konvergieren. Aus ζ_{n_2} wird eine weitere Teilfolge ζ_{n_3} extrahiert, so daß $\frac{\partial \zeta_{n_3}}{\partial \eta}$ gleichmäßig konvergieren. Von ζ_{n_1} geht man endlich zu ζ_{n_2} über, so daß auch ζ_{n_2} selbst gleichmäßig konvergiert. Ist $\zeta = \lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_{n_2}$, so ist offenbar

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial \zeta_{n_2}}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial \zeta_{n_2}}{\partial \eta}.$$

Aus (40) ergeben sich die Ungleichheiten

$$\left| \frac{\partial \bar{\zeta}_{n_2}}{\partial \xi} - \frac{\partial \zeta_{n_2}}{\partial \xi} \right| < \varepsilon^* \bar{d}, \quad \left| \frac{\partial \bar{\zeta}_{n_2}}{\partial \eta} - \frac{\partial \zeta_{n_2}}{\partial \eta} \right| < \varepsilon^* d$$

und aus diesen durch einen Grenzübergang $n \rightarrow \infty$, wie behauptet, die Beziehungen (46).

Es gilt, wenn man mit J_{n_2} den Wert bezeichnet, in den das Integral J (vgl. die Formel (32) I) übergeht, wenn man ζ durch ζ_{n_2} ersetzt, für alle

$$(47) \quad |s|, |\lambda| \leq \delta^{(1)}, |t| \leq t^*$$

gleichmäßig

$$(48) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} J_{n_2} = J,$$

³⁶⁾ Vgl. z. B. D. Hilbert, „Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen“, Vierte Mitteilung. Gött. Nachr. 1906, S. 157–227 (S. 162–164, woselbst eindimensionale Gebiete betrachtet werden).

demnach wegen

$$(49) \quad U_1 - U = \int_0^1 J dt$$

für $|s|$, $|\lambda| \leq \delta^{(1)}$ gleichmäßig

$$(50) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} [U_1 - U]_{\zeta_{n2}} = U_1 - U,$$

unter $[U_1 - U]_{\zeta_{n2}}$ den Wert verstanden, den man erhält, wenn man in $U_1 - U$ für ζ einfach ζ_{n2} einführt. Setzt man in (48) insbesondere $t = 0$, so findet man mit Rücksicht auf (28) I und (32) I

$$(51) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} [U^{(1)}]_{\zeta_{n2}} = U^{(1)}.$$

Aus (50) und (51) folgt

$$(52) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} [U_1 - U - U^{(1)}]_{\zeta_{n2}} = U_1 - U - U^{(1)}.$$

Aus

$$(53) \quad \psi \zeta_{n2} + \int_S N \zeta'_{n2} d\sigma' = \Pi\{\lambda, s, \zeta_{n2}\}$$

ergibt sich jetzt durch einen Grenzübergang, $n \rightarrow \infty$

$$(54) \quad \psi \zeta + \int_S N \zeta' d\sigma' = s - R^2 \lambda - \frac{\omega^2}{2\pi f} (a^2 + b^2) \zeta^2 - 2 R \tau \lambda \zeta \\ - (a^2 + b^2) \lambda \zeta^2 - U^{(2)} - U^{(3)} - \dots$$

Aus

$$\zeta = \lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_{n2}$$

folgt, da der Grenzübergang gleichmäßig ist, daß auch ζ für

$$(55) \quad |s|, |\lambda| \leq \delta^{(1)}$$

in bezug auf λ und s analytisch und regulär ist. Es sei

$$(56) \quad \zeta = \sum a_{\nu_0 \nu_1 \dots \nu_q} \lambda^{\nu_0} s^{\nu_1} \dots s_q^{\nu_q}.$$

Aus der Cauchyschen Integraldarstellung folgt nun, daß die Funktionen $a_{\nu_0 \nu_1 \dots \nu_q}$ in bezug auf ξ und η stetig sind und stetige partielle Ableitungen erster Ordnung haben. Die unendliche Reihe (56) kann gliedweise differenziert werden. Es seien in der Tat $\Gamma_\lambda, \Gamma_{s_1}, \dots, \Gamma_{s_q}$ Kreise vom Halbmesser $\delta^{(1)}$ um den Koordinatenursprung in den Ebenen der komplexen Variablen λ, s_1, \dots, s_q . Für alle $|\lambda|, |s_1|, \dots, |s_q| < \delta^{(1)}$ ist, wenn wir einmal ausführlicher $\zeta(\xi, \eta; \lambda, s_1, \dots, s_q)$ für ζ schreiben,

$$(57) \quad \zeta(\xi, \eta; \lambda, s_1, \dots, s_q) = \frac{1}{(2\pi i)^{q+1}} \int_{\Gamma_\lambda} \dots \int_{\Gamma_{s_q}} \frac{\zeta(\xi, \eta; \tilde{\lambda}, \tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_q)}{(\tilde{\lambda} - \lambda) \dots (\tilde{s}_q - s_q)} d\tilde{\lambda} d\tilde{s}_1 \dots d\tilde{s}_q.$$

Hieraus folgt z. B.

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \zeta(\xi, \eta; \lambda, s_1, \dots, s_q) = \frac{1}{(2\pi i)^{q+1}} \int_{\Gamma_\lambda} \dots \int_{\Gamma_{s_q}} \frac{\frac{\partial}{\partial \xi} \zeta(\xi, \eta; \tilde{\lambda}, \tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_q)}{(\tilde{\lambda} - \lambda) \dots (\tilde{s}_q - s_q)} d\tilde{\lambda} d\tilde{s}_1 \dots d\tilde{s}_q.$$

Also ist $\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}$ und ebenso $\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}$ eine analytische und reguläre Funktion von λ, s_1, \dots, s_q . Hieraus folgt fast unmittelbar, daß die Reihe (56) gliedweise differentierbar ist. Nach (46) hat ζ beschränkte Differenzenquotienten zweiter Ordnung. Aus (56) folgt, wenn man zu Differenzenquotienten zweiter Ordnung übergeht, daß diese für $\lambda \rightarrow 0, s_1 \rightarrow 0, \dots, s_q \rightarrow 0$ gleichmäßig gegen Null konvergieren. Das gleiche gilt natürlich auch für $\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}, \frac{\partial \zeta}{\partial \eta}$.

Führt man in (54) für ζ den Ausdruck (56) ein, so gewinnt man Beziehungen zur Bestimmung der Funktionen $a_{v_0 v_1 \dots v_q}$. Gesetzt, die Funktionen $a_{v_0 v_1 \dots v_q}$ ($v_0 + v_1 + \dots + v_q \leq n$) seien bereits ermittelt. Man erhält dann zur Bestimmung der Koeffizienten $a_{v_0 v_1 \dots v_q}$ ($v_0 + v_1 + \dots + v_q = n + 1$) Integralgleichungen von der Form

$$(58) \quad \psi a_{v_0 v_1 \dots v_q} + \int_S N a'_{v_0 v_1 \dots v_q} d\sigma' = A_{v_0 v_1 \dots v_q}.$$

Der Ausdruck $A_{v_0 v_1 \dots v_q}$ ist der Koeffizient von $\lambda^{v_0} s_1^{v_1} \dots s_q^{v_q}$ in dem Polynom, das man erhält, wenn man in

$$(59) \quad s - R^2 \lambda - \frac{\omega^2}{2 \times f} (a^2 + b^2) \zeta^2 - 2 R \tau \lambda \zeta - (a^2 + b^2) \lambda \zeta^2 \\ - U^{(2)} - U^{(3)} - \dots - U^{(n)}$$

für ζ das Polynom

$$(60) \quad \sum a_{v_0 v_1 \dots v_q} \lambda^{v_0} s_1^{v_1} \dots s_q^{v_q} \quad (v_0 + v_1 + \dots + v_q \leq n)$$

einführt. Die Gleichung (58) bestimmt $a_{v_0 v_1 \dots v_q}$ vollständig.

Die Gleichung (54) kann demnach keine von ζ verschiedene in bezug auf λ, s_1, \dots, s_q analytische Lösung haben. Da indessen, wie aus den soeben durchgeführten Überlegungen folgt, jede aus ζ_n ($n = 1, 2, \dots$) herausgegriffene Teilfolge mindestens eine in bezug auf λ, s_1, \dots, s_q analytische Grenzfunktion hat, so konvergiert nach einer bekannten Schlußweise die Folge ζ_1, ζ_2, \dots selbst, und zwar natürlich gegen die Funktion ζ . Das Verfahren der sukzessiven Approximationen konvergiert.

Würde nämlich ζ_1, ζ_2, \dots nicht konvergieren, so gebe es mindestens ein Wertsystem $\xi, \eta, \lambda, s_1, \dots, s_q$, in dem die Folge ζ_n ($n = 1, 2, \dots$) mehr als eine Häufungsstelle hätte. Es sei etwa $\underline{\zeta}$ eine von ζ verschiedene Häufungsstelle. Es gebe dann eine konvergente Teilfolge aus ζ_n ($n = 1, 2, \dots$), so daß die natürlich in λ, s_1, \dots, s_q analytische Grenzfunktion im Punkte

$\xi, \eta, \lambda, s_1, \dots, s_q$ gegen ζ konvergieren müßte, was nach dem vorstehenden nicht möglich ist.

§ 4.

In dem Kapitel IV werden wir in einer recht allgemeinen Weise zeigen, daß die vorhin gefundene Lösung der Integro-Differentialgleichung (54) die einzige Lösung ist, der eine³⁷⁾ Gleichgewichtsfigur der Flüssigkeit in der Umgebung des Körpers T entsprechen kann. Gibt es in der Umgebung von T weitere Figuren des relativen Gleichgewichtes, so sind diese durch die Gleichung (56) gegeben. Damit die Fläche ξ, η, ζ wirklich eine Gleichgewichtsfigur begrenze, müssen indessen für alle den Ungleichheiten (55) genügenden Werte λ, s_1, \dots, s_q die Beziehungen (4) und (5) erfüllt sein. Diese ergeben unendlich viele Bedingungsgleichungen für die Koeffizienten a_{r_0, r_1, \dots, r_q} . Lassen sich diese nicht erfüllen, so gibt es in der Umgebung von T keine weiteren Gleichgewichtsfiguren; T ist eine isolierte Gleichgewichtsfigur.

Wie wir jetzt zeigen wollen, werden die Beziehungen (4) und (5) von selbst erfüllt, wenn T die Ebenen $y = 0$ und $z = 0$ zu Symmetrieebenen hat³⁸⁾.

Wir setzen für (14) nach (40) I

$$(61) \quad \psi(\sigma)\zeta(\sigma) + \int_{\mathcal{S}} N(\sigma, \sigma') \zeta(\sigma') d\sigma' = s - P\{\lambda, \sigma, \zeta(\sigma)\} - U_1(\sigma) + U(\sigma) + U^{(1)}(\sigma),$$

$$(62) \quad P\{\lambda, \sigma, \zeta(\sigma)\} = R^2(\sigma)\lambda - \frac{\omega^2}{2\pi f}(\alpha^2(\sigma) + b^2(\sigma))\zeta^2(\sigma) - 2R(\sigma)\tau(\sigma)\lambda\zeta(\sigma) - (\alpha^2(\sigma) + b^2(\sigma))\lambda\zeta^2(\sigma).$$

Hieraus folgt

$$(63) \quad \psi(\sigma^*)\zeta(\sigma^*) + \int_{\mathcal{S}} N(\sigma^*, \sigma') \zeta(\sigma') d\sigma' = s - P\{\lambda, \sigma, \zeta(\sigma^*)\} - U_1(\sigma^*) + U(\sigma^*) + U^{(1)}(\sigma^*)^{39)},$$

oder, was dasselbe ist,

$$(64) \quad \psi(\sigma^*)\zeta(\sigma^*) + \int_{\mathcal{S}} N(\sigma^*, \sigma'') \zeta(\sigma'') d\sigma'' = s - P\{\lambda, \sigma, \zeta(\sigma^*)\} - U_1(\sigma^*) + U(\sigma^*) + U^{(1)}(\sigma^*).$$

Es sei \mathfrak{T}_1 der Körper, der entsteht, wenn man T_1 an der Ebene

³⁷⁾ Zu $\omega_1 = \omega + \Delta\omega$ gehörende, den Beziehungen (4) und (5) genügende, mithin nicht triviale.

³⁸⁾ Alle bisher bekannten oder vermuteten Gleichgewichtsfiguren haben bei passender Orientierung des Achsenkreuzes diese Eigenschaft. Wahrscheinlich gibt es keine anderen Gleichgewichtsfiguren.

³⁹⁾ Wegen der Bezeichnungsweise vgl. II § 1.

$y = 0$ spiegelt. Dem Punkte σ (ξ, η) auf S wird hierdurch die „Koordinate“ $\mathfrak{z}(\sigma) = \zeta(\sigma^*)$ zugeordnet. Das Potential von \mathfrak{T}_1 im Punkte ξ, η , $\mathfrak{z}(\sigma)$ sei mit $\mathfrak{U}_1(\sigma)$ bezeichnet.

Offenbar ist

$$U_1(\sigma^*) = \mathfrak{U}_1(\sigma), \quad P\{\lambda, \sigma^*, \zeta(\sigma^*)\} = P\{\lambda, \sigma, \mathfrak{z}(\sigma)\}, \\ U(\sigma^*) = \mathfrak{U}(\sigma), \quad \psi(\sigma^*) = \psi(\sigma), \quad N(\sigma^*, \sigma'^*) = N(\sigma, \sigma'), \quad d\sigma'^* = d\sigma'.$$

Nach (46) I ist schließlich

$$U^{(1)}(\sigma^*) = \mathfrak{U}^{(1)}(\sigma).$$

Aus (64) folgt darum

$$(65) \quad \psi(\sigma)\mathfrak{z}(\sigma) + \int_S N(\sigma, \sigma')\mathfrak{z}(\sigma')d\sigma' = s - P\{\lambda, \sigma, \mathfrak{z}(\sigma)\} \\ - \mathfrak{U}_1(\sigma) + \mathfrak{U}(\sigma) - \mathfrak{U}^{(1)}(\sigma).$$

Die Funktion $\mathfrak{z}(\sigma) = \zeta(\sigma^*)$ ist demnach eine in bezug auf λ und s analytische und reguläre Lösung der Integro-Differentialgleichung (14). Nach dem soeben bewiesenen kann diese von $\zeta(\sigma)$ nicht verschieden sein. Es gilt mithin

$$(66) \quad \zeta(\sigma) = \zeta(\sigma^*).$$

In ähnlicher Weise überzeugt man sich, daß auch

$$(67) \quad \zeta(\sigma) = \zeta(\sigma_*)$$

ist. Aus (66) und (67) folgt wegen $u_1(\sigma_*) = u_1(\sigma)$, $u_2(\sigma^*) = u_2(\sigma)$

$$(68) \quad \int_S \psi \zeta u_1 d\sigma = 0, \quad \int_S \psi \zeta u_2 d\sigma = 0.$$

Diese Beziehungen gestatten von der Gleichung (14) zu der Gleichung (68) I überzugehen. *Die Fläche $\zeta, \eta, \zeta(\xi, \eta)$ begrenzt eine Gleichgewichtsfigur der Flüssigkeit. Die Ebenen $y = 0$ und $z = 0$ sind, wegen (66) und (67), Symmetrieebenen des Körpers.*

War die Ausgangsfigur von einer Rotationsfläche um die z -Achse begrenzt, so gilt von den neuen Figuren des Gleichgewichts das gleiche. Denn jetzt ist jede durch die Rotationsachse hindurchgehende Ebene eine Symmetrieebene der Figur.

Drittes Kapitel.

Existenzsatz. Verzweigungsfiguren.

§ 1.

Die Integralgleichung

$$(1) \quad \psi \zeta + \int_S \frac{1}{q} \zeta' d\sigma' = 0$$

möge jetzt Nulllösungen haben, die von den Funktionen u_1 und u_2 linear unabhängig sind.

Es sei

$$(2) \quad u_1, u_2, u_3, \dots, u_m$$

ein vollständiges System linear unabhängiger Lösungen von (1).

Es sei vorübergehend

$$(3) \quad v_3(\sigma) = u_3(\sigma^*), \dots, v_m(\sigma) = u_m(\sigma^*)$$

gesetzt. Sind, wie wir zunächst voraussetzen wollen, die Ebenen $y=0$ und $z=0$ Symmetrieebenen von T , so sind auch die Funktionen $v_3(\sigma), \dots, v_m(\sigma)$ Nulllösungen von (1). Denn es ist z. B.

$$(4) \quad \psi(\sigma^*) u_3(\sigma^*) + \int_S \frac{1}{\varrho(\sigma^*, \sigma')} u_3(\sigma') d\sigma' = 0,$$

oder, was dasselbe ist,

$$(5) \quad \psi(\sigma^*) u_3(\sigma^*) + \int_S \frac{1}{\varrho(\sigma^*, \sigma^{**})} u_3(\sigma^{**}) d\sigma^{**} = 0,$$

mithin wegen (11) II und (3)

$$(6) \quad \psi(\sigma) v_3(\sigma) + \int_S \frac{1}{\varrho(\sigma, \sigma')} v_3(\sigma') d\sigma' = 0.$$

Auch die Funktionen

$$(7) \quad w_l = u_l + v_l \quad \text{und} \quad \bar{w}_l = u_l - v_l$$

sind Nulllösungen von (1), sofern sie nicht identisch verschwinden. Wegen

$$(8) \quad u_l = \frac{w_l + \bar{w}_l}{2}$$

läßt sich jede Nulllösung der Integralgleichung (1) linear durch die Lösungen w_l, \bar{w}_l ($l=1, \dots, m$) ausdrücken. Also läßt sich aus w_l, \bar{w}_l ($l=1, \dots, m$) ein vollständiges System linear unabhängiger Nulllösungen, etwa w_{1l} ($l=1, \dots, m$) aussondern. Entweder ist

$$w_{1l}(\sigma^*) = w_{1l}(\sigma) \quad \text{oder} \quad w_{1l}(\sigma^*) = -w_{1l}(\sigma).$$

Da $u_2(\sigma^*) = -u_2(\sigma)$ ist, so gibt es, wenn S keine Rotationsfläche um die z -Achse ist, mindestens eine Nulllösung der zweiten Kategorie. Da $w_1 = 2u_1$, $\bar{w}_2 = 2u_2$ ist, so kann man sich gewiß so einrichten, daß das System w_{1l} die Nulllösungen u_1 und u_2 enthält. Von diesem System ausgehend gewinnt man, wenn man den vorhin durchgeführten Prozeß in bezug auf die Ebene $z=0$ wiederholt, ein neues vollständiges System linear unabhängiger Nulllösungen, dessen einzelne Individuen auch bei dem Übergang von σ zu σ_* entweder ungeändert bleiben oder das Vorzeichen wechseln. Man kann sich augenscheinlich so einrichten, daß die Funktionen u_1 und u_2 auch dem neuen System angehören. Wir bezeichnen von nun an das zuletzt erwähnte System der Nulllösungen mit u_1, u_2, \dots, u_m .

Wie man leicht sieht, bilden die Funktionen

$$(9) \quad \psi u_l \quad (l = 1, \dots, m)$$

ein vollständiges System linear unabhängiger Nulllösungen der zu (1) adjungierten Integralgleichung. Die Lösungen u_l ($l = 1, \dots, m$) denken wir uns in der üblichen Weise den Beziehungen

$$(10) \quad \int_S \psi u_l^2 d\sigma = -1$$

gemäß normiert ⁴⁰⁾.

Aus der Definitionsgleichung

$$\psi u_l + \int_S \frac{1}{\varrho} u_l' d\sigma' = 0 \quad (l = 1, \dots, m)$$

folgt, wie man sich ohne Schwierigkeiten überzeugt, daß die Nulllösungen u_l ($l = 1, \dots, m$) stetige Ableitungen aller Ordnungen haben. In der Tat genügt den im Kapitel II § 2 angegebenen Hilfssätzen der Potentialtheorie gemäß [vgl. die Formeln (21) II, (22) II, (23) II] das Potential einer einfachen Belegung

$$P_1 = \int_S \frac{1}{\varrho} u_l' d\sigma'$$

einer Beziehung von der Form

$$|\bar{P}_1 - P_1| < g^*(\mu_*) E d''.$$

Die Funktion

$$u_l = - \frac{1}{\psi} \int_S \frac{1}{\varrho} u_l' d\sigma'$$

erfüllt, da ψ stetige Ableitungen aller Ordnungen hat, eine ganz analoge Ungleichheit. Da die Dichte der Belegung von P_1 demnach eine der Beziehung (24) II entsprechende Ungleichheit erfüllt, so hat u_l nach Kapitel II § 2 [Formel (25) II] stetige partielle Ableitungen erster Ordnung, die einer zu (25) II analogen Ungleichheit genügen. Man kann jetzt in dieser Weise weiter fortschreiten, indem man sich auf entsprechende Sätze über die höheren partiellen Ableitungen des Potentials einer einfachen Belegung stützt. Man gelangt so zu dem zuletzt angegebenen Satz.

§ 2.

Wir nehmen zunächst an, daß sämtliche Nulllösungen u_1, \dots, u_m in bezug auf die Ebenen $y = 0$ und $z = 0$ symmetrisch sind. Die Funktion

$$(11) \quad \frac{1}{\psi} N - \sum_{i=1}^m \psi' u_i u_i' = \frac{1}{\psi \varrho} - \sum_{i=1}^m \psi' u_i u_i' = \frac{1}{\psi} N_1$$

⁴⁰⁾ Vgl. die Fußnote ³⁹⁾.

genügt offenbar den Beziehungen

$$(12) \quad N_1(\sigma^*, \sigma'^*) = N_1(\sigma, \sigma'), \quad N_1(\sigma_*, \sigma'_*) = N_1(\sigma, \sigma').$$

Die Integralgleichung

$$(13) \quad \psi \zeta + \int_S N_1 \zeta' d\sigma' = 0$$

hat keine Nulllösungen.

Wir schreiben jetzt die Integro-Differentialgleichung (14) II in der Form

$$(14) \quad \psi \zeta + \int_S N_1 \zeta' d\sigma' = \Pi\{\lambda, s, \zeta\} + \sum_{l=3}^m \psi_l r_l u_l,$$

$$(15) \quad r_l = - \int_S \psi' u_l' \zeta' d\sigma' \quad (l = 3, \dots, m)$$

und fassen r_l ($l = 3, \dots, m$) zunächst als unbestimmte Parameter auf⁴¹). Durch eine fast wortgetreue Wiederholung der Betrachtungen des II. Kapitels überzeugt man sich, daß die Beziehung (14) für alle dem absoluten Betrage nach hinreichend kleinen Werte von $|\lambda|$, $|s_l|$ ($l = 1, \dots, q$) und $|r_l|$ ($l = 3, \dots, m$), etwa

$$(16) \quad |\lambda| \leq \delta^{(2)}, \quad |s_l| \leq \delta^{(2)} \quad (l = 1, \dots, q), \quad |r_l| \leq \delta^{(2)} \quad (l = 3, \dots, m)$$

eine und nur eine in bezug auf diese $(m + p - 1)$ Parameter analytische und reguläre Lösung ζ hat. Sie kann durch sukzessive Approximationen gewonnen werden. Diese konvergieren gleichmäßig.

Es sei H_1 der zu $\frac{1}{\psi} N_1$ gehörige lösende Kern. Die Glieder ersten Grades der Entwicklung von ζ lassen sich unmittelbar bestimmen. Man findet wegen

$$\int_S H_1(\sigma, \sigma') u_l(\sigma') d\sigma' = 0,$$

$$(17) \quad \zeta = \frac{s}{\psi} + \sum_{j=3}^m r_j u_j - \frac{1}{\psi} R^2 \lambda + \int_S H_1 \left\{ -\frac{s}{\psi'} + \frac{1}{\psi'} R^2 \lambda \right\} d\sigma' + \\ + \sum b_{\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_m} \lambda^{\nu_0} s_1^{\nu_1} \dots s_q^{\nu_q} r_3^{\nu_3} \dots r_m^{\nu_m} \quad (\nu_0 + \nu_1 + \dots + \nu_m > 1).$$

Durch Überlegungen, die den im Kapitel II § 4 durchgeführten Betrachtungen ganz analog sind, läßt sich zeigen, daß die Funktion ζ in bezug auf die Ebenen $y = 0$ und $z = 0$ symmetrisch ist. Demnach ist für alle den Beziehungen (16) genügenden Werte von λ ; s_1, \dots, s_q ; r_3, \dots, r_m

$$(18) \quad \int_S \zeta u_1 d\sigma = 0, \quad \int_S \zeta u_2 d\sigma = 0.$$

⁴¹⁾ Einer ähnlichen Zerlegung des Kernes in Summanden bedient sich Herr E. Schmidt in seinen Untersuchungen über die Verzweigung der Lösungen nichtlinearer Integralgleichungen. Vgl. E. Schmidt, „Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. III. Teil. Über die Auflösung der nichtlinearen Integralgleichungen und die Verzweigung ihrer Lösungen“, Math. Annalen 65 (1908), S. 370—399.

Führt man den Ausdruck (17) für ζ in die Gleichungen (15) ein, so erhält man $(m-2)$ Gleichungen zur Bestimmung der Größen r_3, \dots, r_m . Es ist nun

$$(19) \quad \int_S \psi u_l^2 d\sigma = -1$$

und nach bekannten Sätzen der Theorie linearer Integralgleichungen

$$(20) \quad \int_S H_1(\sigma, \sigma') \psi(\sigma) u_l(\sigma) d\sigma = 0 \quad (l = 3, \dots, m).$$

Die vorgenannten Gleichungen sind demnach, wie man leicht sieht, von der Form

$$(21) \quad \lambda \int R^2 u_l d\sigma - \sum_{j=1}^q s_j \int_S u_l d\sigma + \mathfrak{P}_l(\lambda; s_1, \dots, s_q; r_3, \dots, r_m) = 0,$$

$$\mathfrak{P}_l = \sum B_{\nu_0 \nu_1 \dots \nu_q \mu_3 \dots \mu_m} \lambda^{\nu_0} s_1^{\nu_1} \dots s_q^{\nu_q} r_3^{\mu_3} \dots r_m^{\mu_m}$$

$$(B_{\nu_0 \dots \mu_m} \text{ konstant, } \nu_0 + \nu_1 + \dots + \mu_m > 1)^{42)}$$

$$(l = 3, \dots, m)$$

Es sei

$$(22) \quad r_j = r_j(\lambda, s_1, \dots, s_q) \quad (j = 1, \dots, q)$$

ein für $\lambda = s_1 = \dots = s_q = 0$ verschwindendes System von Lösungen dieser Gleichungen. Für hinreichend kleine Werte von $|\lambda|, |s_1|, \dots, |s_q|$ sind demnach die Bedingungen (16) gewiß erfüllt. Die Funktion (17) genügt der Integro-Differentialgleichung (14) und wegen (18) auch der Gleichung (68) I. Die Fläche ξ, η, ζ (ξ, η) begrenzt eine Figur des relativen Gleichgewichtes.

Die Untersuchung der Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft der gegebenen Figur ist damit auf die Diskussion des Systems der Gleichungen (21) zurückgeführt.

§ 3.

Wir führen zur Vereinfachung die folgende Bezeichnungsweise ein.

Eine lineare Reihe von (reellen) Gleichgewichtsfiguren, die den Werten λ eines Vorzeichens ($\lambda \geq 0$ oder $\lambda \leq 0$) entsprechen, wollen wir mit Schwarzschild⁴³⁾ einen *Arm von Gleichgewichtsfiguren* nennen. Eine lineare Reihe nennen wir *regulär*, wenn die zugehörige Funktion ζ in eine in der Umgebung des Wertes $\lambda = 0$ konvergierende Potenzreihe von λ entwickelt werden kann. Eine reguläre Reihe besteht stets aus zwei entsprechend zu

⁴²⁾ Mit S_j ($j = 1, \dots, q$) sind hier die zu den einzelnen Massen von T gehörenden Gruppen von Komponenten der Fläche S bezeichnet.

⁴³⁾ Vgl. K. Schwarzschild, loc. cit. ⁶⁾ S. 34 sowie S. 38–41.

$\lambda \geq 0$ und $\lambda \leq 0$ gehörenden Armen. Demgegenüber bilden zwei so orientierte Arme von Gleichgewichtsfiguren nicht immer eine reguläre Reihe.

Der weiteren Betrachtung legen wir zunächst den einfachsten Fall $q = 1$, $m = 3$ zugrunde. Der Körper besteht aus einer einzigen zusammenhängenden Flüssigkeitsmasse. Die Integralgleichung (1) hat nur eine nicht triviale Nulllösung u_3 . Wie wir wissen, dürfen wir in diesem Falle $s = 0$ annehmen. Das Gleichungssystem (21) geht jetzt über in

$$(23) \quad \begin{cases} A\lambda + \mathfrak{P}(\lambda, r_3) = 0, \\ A \int_S R^2 u_3 d\sigma, \quad \mathfrak{P}(\lambda, r_3) = \sum_{i, l} B_{i, l} \lambda^l r_3^i. \end{cases} \quad (i + l > 1)$$

Es sei zunächst $A \neq 0$, und es sei $B_{0, f} r_3^f$ ($f \geq 2$) das erste λ nicht enthaltende Glied der Potenzreihe, das nicht verschwindet. Die Entwicklung von r_3 in der Umgebung des Wertes $\lambda = 0$ ist von der Form

$$(24) \quad r_3 = \left(-\frac{A}{B_{0, f}} \lambda\right)^{\frac{1}{f}} + \mathfrak{P}^{(1)} \left\{ \left(-\frac{A}{B_{0, f}} \lambda\right)^{\frac{1}{f}} \right\},$$

unter $\mathfrak{P}^{(1)}$, wie später unter $\mathfrak{P}^{(2)}$, $\mathfrak{P}^{(3)}$, ..., gewisse im Nullpunkt verschwindende Potenzreihen verstanden.

Ist f eine gerade Zahl, so gibt es zwei reelle Reihen von Gleichgewichtsfiguren. Sie gehören zu denjenigen dem absoluten Betrage nach hinreichend kleinen Werten von λ , deren Vorzeichen mit dem Vorzeichen von $-\frac{A}{B_{0, f}}$ übereinstimmt. Von der betrachteten Figur gehen zwei Arme von Gleichgewichtsfiguren aus.

Ist f ungerade, so geht von T , wie man leicht sieht, für $\lambda > 0$ und für $\lambda < 0$ je ein Arm von Gleichgewichtsfiguren aus.

Es sei $A = 0$ und $B_{0, 2} \neq 0$. Die Gleichung (23) nimmt jetzt die Gestalt an:

$$(25) \quad B_{0, 2} r_3^2 + B_{1, 1} r_3 \lambda + B_{2, 0} \lambda^2 + \dots = 0.$$

Sie hat zwei Lösungen von der Form

$$(26) \quad \begin{cases} r_3 = \frac{1}{2B_{0, 2}} \left(-B_{1, 1} + \sqrt{B_{1, 1}^2 - 4B_{0, 2}B_{2, 0}}\right) \lambda + \mathfrak{P}^{(2)}(\lambda), \\ r_3 = \frac{1}{2B_{0, 2}} \left(-B_{1, 1} - \sqrt{B_{1, 1}^2 - 4B_{0, 2}B_{2, 0}}\right) \lambda + \mathfrak{P}^{(3)}(\lambda). \end{cases}$$

Ist der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen positiv, so gibt es zwei sich in T kreuzende reguläre Reihen von Gleichgewichtsfiguren. Ist $B_{1, 1}^2 - 4B_{0, 2}B_{2, 0} = 0$, so fallen die ersten Glieder der Entwicklungen (26) zusammen. Der Charakter der Nachbarfiguren hängt von dem Verhalten der höheren Glieder der Entwicklung (25) ab. Ist endlich $B_{1, 1}^2 - 4B_{0, 2}B_{2, 0} < 0$,

so gibt es in der Umgebung von T keine neuen (reellen) Gleichgewichtsfiguren; T ist eine isolierte Figur.

Es möge jetzt zugleich

$$(27) \quad A = 0, \quad B_{02} = 0$$

ausfallen; hingegen seien $B_{11} \neq 0$, $B_{20} \neq 0$. Die erste nicht verschwindende Potenz von r_3 in (23) sei r_3^n ($n > 2$). Die Gleichung (23) nimmt jetzt die Gestalt an

$$(28) \quad B_{11} r_3 \lambda + B_{0n} r_3^n + B_{0n1} r_3^{n+1} + \dots + \lambda^2 (B_{20} + \dots) + \dots = 0.$$

Für r_3 erhält man die beiden Entwicklungen

$$(29) \quad r_3 = -\frac{B_{20}}{B_{11}} \lambda + \mathfrak{P}^{(4)}(\lambda),$$

$$(30) \quad r_3 = \left[-\frac{B_{11}}{B_{0n}} \lambda \right]^{\frac{1}{n-1}} + \dots$$

Die Entwicklung (29) liefert eine reguläre Reihe von Gleichgewichtsfiguren, die Entwicklung (30) zwei Arme von Figuren, die (für gerade n) den Werten von λ verschiedenen, oder (für ungerade n) des gleichen Vorzeichens entsprechen. Unter den weiteren besonderen Fällen, die denkbar sind, betrachten wir nur noch den Fall, daß A und alle B_{1l} verschwinden. Die Gleichung (23) ist alsdann identisch erfüllt. Die Funktion

$$(31) \quad \zeta = r_3 u_3 - \frac{1}{\psi} R^2 \lambda + \lambda \int_S H_1 \frac{1}{\psi'} R'^2 d\sigma' + \sum b_{\nu_0 \mu_3} \lambda^{\nu_0} r_3^{\mu_3} \quad (\nu_0 + \mu_3 > 1)$$

erfüllt für alle hinreichend kleinen Werte von $|r_3|$ und $|\lambda|$ die Integro-Differentialgleichungen (14) und (68) I. Wie in dem Kapitel I § 1 ausgeführt, kann man durch eine Ähnlichkeitstransformation erreichen, daß alle aus (31) zu gewinnenden Gleichgewichtsfiguren dasselbe Volumen haben. *Zu einem jeden hinreichend kleinen Wert von λ gehört demnach eine stetige Schar von Gleichgewichtsfiguren gleichen Volumens.* Setzt man in (31) insbesondere $\lambda = 0$, so erhält man eine stetige Schar von Gleichgewichtsfiguren

$$(31) \quad \zeta = r_3 u_3 + \sum_{\mu_3=2}^{\infty} b_{0\mu_3} r_3^{\mu_3},$$

die zu dem Werte ω der Winkelgeschwindigkeit gehören und wegen (18) nicht aus T durch eine Parallelverschiebung längs der Rotationsachse, oder eine Drehung um diese abgeleitet worden sind.

Die Existenz einer Schar von Gleichgewichtsfiguren dieser Art ist also eine notwendige Bedingung dafür, daß der jetzt betrachtete besondere Fall eintreten kann. Gleichgewichtsfiguren dieser Art sind nicht bekannt.

Bei den Maclaurinschen Ellipsoiden kann dieser Fall, wie Herr Liapounoff durch eine ins Einzelne gehende Diskussion der Verzweigungsgleichung gezeigt hat, nicht eintreten⁴⁴⁾.

Zu analogen Resultaten gelangt man, wenn man allgemeiner $q > 1$, $m > 3$ annimmt.

§ 4.

Wir haben bis jetzt vorausgesetzt, daß man ein System von Nulllösungen der Integralgleichung (1) II, die in bezug auf die Ebenen $y = 0$ und $z = 0$ symmetrisch sind, wählen kann, so daß diese, mit den trivialen Lösungen zusammengenommen, ein vollständiges System der Nulllösungen bilden. Es möge jetzt im Gegensatz hierzu, um einen besonders einfachen Fall herauszugreifen, $m = 3$ und etwa

$$(32) \quad u_3(\sigma^*) = u_3(\sigma), \quad u_3(\sigma_*) = -u_3(\sigma)$$

sein. Neben der Bedingungsgleichung (15) sind wie zuletzt auch die Gleichungen (18) zu erfüllen.

Man kann allen diesen Beziehungen dadurch genügen, daß man $r_3 = 0$ setzt. Man kommt dabei auf eine zu (14) II ganz analoge Gleichung, wobei für N jetzt der Ausdruck

$$(33) \quad \frac{1}{\rho} - \psi' \psi' (u_1 u_1' + u_2 u_2' + u_3 u_3')$$

eintritt. Die Lösung ist in bezug auf die Ebenen $y = 0$ und $z = 0$ symmetrisch, so daß die Gleichungen

$$(34) \quad \int_S \zeta u_1 d\sigma = 0, \quad \int_S \zeta u_2 d\sigma = 0, \quad r_3 = \int_S \zeta u_3 d\sigma = 0$$

gewiß erfüllt sind. Man erhält eine reguläre Reihe von Gleichgewichtsfiguren. Ob es in der Nachbarschaft von T noch weitere Gleichgewichtsfiguren gibt, kann erst eine eingehende Diskussion der Beziehungen (23) und (18) lehren.

Es ist nicht unwahrscheinlich, daß dieser Fall in Wirklichkeit nicht eintritt. In dem besonderen Falle der Maclaurinschen und der Jacobi'schen Ellipsoide hat die Integralgleichung (1) II bei vorgegebenem Volumen der Flüssigkeit für eine gewisse abzählbare Menge von Werten der kleinen Achse nicht triviale Nulllösungen. Hier ist $m = 3$, d. h. es gibt nur eine nicht triviale Nulllösung. Diese ist in bezug auf die Ebenen $y = 0$ und $z = 0$ symmetrisch⁴⁵⁾. Bei den Maclaurinschen Ellipsoiden ist überdies u_3 identisch gleich Null.

⁴⁴⁾ Vgl. A. Liapounoff, loc. cit.¹⁰⁾ Abhandlung 2. S. 214—215, Abhandlung 3. passim, insbesondere S. 2.

⁴⁵⁾ Vgl. A. Liapounoff, loc. cit.⁵⁾ passim; H. Poincaré, loc. cit.⁶⁾ erste Abhandlung passim; A. Liapounoff, loc. cit.¹⁰⁾ Abhandlung 2. passim.

Kann endlich, entgegen unserer bisherigen Annahme, die Ausgangsfigur T nicht in eine solche Lage gebracht werden, daß sie in bezug auf die Ebenen $y = 0$ und $z = 0$ symmetrisch wird, so wird man ganz wie im Kapitel II § 4 nur in Ausnahmefällen Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft von T zu erwarten haben. Wahrscheinlich kommt dieser Fall in Wirklichkeit nicht vor⁴⁶⁾.

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, hat schon Tschebyschef das Verfahren der sukzessiven Approximationen als den zur Bestimmung der neuen Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft gewisser Ellipsoide voraussichtlich führenden Weg bezeichnet. Herr Liapounoff hat als erster die Existenz jener Gleichgewichtsfiguren streng bewiesen. Er entwickelt die gesuchte Funktion ζ der Gleichung (69) I nach Potenzen von η und von einem weiteren Parameter α und beweist die Konvergenz der gewonnenen Reihe nach einer Majorantenmethode. Da in der Integro-Differentialgleichung (69) I auch die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial \zeta'}{\partial \theta'}$ und $\frac{\partial \zeta'}{\partial \psi'}$ vorkommen, so werden, was wesentlich ist, Majorantenreihen für ζ und für den Ausdruck

$$\sqrt{\frac{\zeta' - \zeta}{1 - \cos \varphi}}, \quad \cos \varphi = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\psi' - \psi)$$

zugleich betrachtet. Ein wesentliches Hilfsmittel bildet dabei die Entwicklung verschiedener im Laufe der Betrachtung auftretender Funktionen nach den Laméschen Funktionen. Der Parameter α wird so bestimmt, daß eine gewisse den Bedingungsgleichungen (15) entsprechende Integralbeziehung erfüllt ist. Nach Einsetzen der gewonnenen Ausdrücke für α erhält man für ζ Entwicklungen nach ganzen oder gebrochenen Potenzen von η allein.

Herr Liapounoff bleibt bei seinen Betrachtungen in der Hauptsache im Gebiete der reellen Größen. *Demgegenüber ist für die Betrachtungen dieses und des vorhergehenden Kapitels neben dem Auswahlverfahren die systematische Heranziehung der Hilfsmittel der Funktionentheorie wesentlich. Außer der Gültigkeit einer Reihenentwicklung von ζ nach ganzen oder gebrochenen Potenzen von λ, s_1, \dots, s_q wird durch die Überlegungen der beiden letzten Kapitel auch noch ein Beweis für die Konvergenz des Verfahrens der sukzessiven Approximationen gewonnen.*

⁴⁶⁾ Vergleiche die Fußnote ³⁸⁾.

Viertes Kapitel.

Vollständigkeit der Lösung.

§ 1.

Es sei T_1 irgendeine Gleichgewichtsfigur in der Umgebung des Körpers T , die zu einem Werte ω_1 der Winkelgeschwindigkeit in der Nachbarschaft des Wertes ω gehört. Das Volumen von T sei mit \mathfrak{T} bezeichnet. Es sei zunächst nur bekannt, daß die Begrenzung S_1 von T_1 aus einer endlichen Anzahl geschlossener, doppelpunktfreier, stetiger (Jordanscher) Flächen besteht und der Körper T_1 ein bestimmtes Volumen \mathfrak{T}_1 im Sinne von Peano und Jordan hat. In der Nachbarschaft einer Komponente von S kann eine endliche Anzahl Komponenten von S_1 liegen. Wir nehmen an, daß \mathfrak{T}_1 in der Umgebung des Wertes \mathfrak{T} liegt. Den Betrachtungen des Paragraphen II gemäß kann man von T_1 durch eine Ähnlichkeitsformation zu einem ebenfalls in der Umgebung von T gelegenen Körper übergehen, dessen Volumen gleich \mathfrak{T} ist. Wir wollen darum in dem folgenden $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}$ voraussetzen.

Es sei M der Höchstwert der Entfernung eines Punktes auf S_1 von der Fläche S . Es sei T_{01} die Vereinigungsmenge der beiden Mengen T und T_1 und T'_{01} ihr Durchschnitt. Das Volumen der Menge $T_{01} - T'_{01}$ heiße Δ_{01} . Offenbar konvergiert Δ_{01} für $M \rightarrow 0$ gegen Null. Wir beweisen, daß wenn M und $|\lambda|$ hinreichend klein sind, wenn etwa

$$M < \varepsilon_* \leq \varepsilon^*, \quad |\lambda| < \delta^{(3)} \leq \delta^{(2)} \quad \text{oder} \quad \leq \delta^{(1)}$$

gilt,

1. die einzelnen Komponenten von S_1 denjenigen von S umkehrbar eindeutig zugeordnet werden können,

2. die Gleichung von S_1 auf die Form

$$\zeta = \zeta(\xi, \eta, \omega_1)$$

gebracht werden kann,

3. die Funktion ζ stetige Ableitungen aller Ordnungen hat.

Es sei K^* irgendein Kugelkörper, der $T_1 + S_1$ ganz in seinem Innern enthält. Denkt man sich K^* mit Masse erfüllt, deren Dichte in $T_1 + S_1$ gleich 1, in $K^* - T_1$ gleich Null ist, so ist das Potential von K^* offenbar mit V_1 identisch. Die Dichte der Belegung von K^* ist beschränkt und im Riemannschen Sinne integrierbar, übrigens, außer auf S_1 , stetig. Nach bekannten Sätzen der Potentialtheorie sind die partiellen Ableitungen $\frac{\partial V_1}{\partial x}$, $\frac{\partial V_1}{\partial y}$, $\frac{\partial V_1}{\partial z}$ des Potentials von K^* vorhanden und stetig. Für alle T_1 in K^* läßt sich für $\left| \frac{\partial V_1}{\partial x} \right|$, $\left| \frac{\partial V_1}{\partial y} \right|$, $\left| \frac{\partial V_1}{\partial z} \right|$ eine nur von K^* abhängige obere Schranke angeben.

Es gilt ferner, wenn $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ irgendeinen von (x, y, z) verschiedenen Punkt bezeichnet und \bar{V}_1 für $V_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ gesetzt wird,

$$(3) \quad \left| \frac{\partial V_1}{\partial x} - \frac{\partial \bar{V}_1}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial V_1}{\partial y} - \frac{\partial \bar{V}_1}{\partial y} \right|, \left| \frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial \bar{V}_1}{\partial z} \right| < g_* \bar{d}^{n_*},$$

$$(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 + (z - \bar{z})^2 = \bar{d}^2.$$

Hier ist μ_* ein positiver echter Bruch, g_* ein für alle T_1 in K^* nur von μ_* abhängiger positiver Wert⁴⁷⁾.

Es sei (X, Y, Z) der Punkt (ξ, η) auf S und (X_1, Y_1, Z_1) ein Punkt (ξ, η, ζ) auf S_1 ⁴⁸⁾. Wir setzen

$$(4) \quad \frac{\partial}{\partial x} V_1(X_1, Y_1, Z_1) - \frac{\partial}{\partial x} V(X, Y, Z)$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial x} V(X_1, Y_1, Z_1) - \frac{\partial}{\partial x} V(X, Y, Z) \right] + \frac{\partial}{\partial x} V_2(X_1, Y_1, Z_1).$$

Hier bezeichnet V_2 das Potential einer über $T_{01} - T'_{01}$ ausgebreiteten Masse, deren Dichte gleich $+1$ oder -1 ist. Sie ist gleich $+1$ in allen Punkten, die außerhalb T und zugleich in T_1 liegen, gleich -1 in den Punkten im Innern von T und zugleich außerhalb T_1 .

Es gilt nun

$$(5) \quad \frac{\partial}{\partial x} V_2(X_1, Y_1, Z_1)$$

$$= - \int_{T_{01} - T'_{01}} \mu_2 \frac{\partial}{\partial x} [(X_1 - \bar{x})^2 + (Y_1 - \bar{y})^2 + (Z_1 - \bar{z})^2]^{-\frac{1}{2}} d\bar{x} d\bar{y} d\bar{z},$$

mithin

$$(6) \quad \left| \frac{\partial}{\partial x} V_2(X_1, Y_1, Z_1) \right| < \int_{T_{01} - T'_{01}} [(X_1 - \bar{x})^2 + (Y_1 - \bar{y})^2 + (Z_1 - \bar{z})^2]^{-\frac{1}{2}} d\bar{x} d\bar{y} d\bar{z}$$

$$< 4\pi \left(\frac{3 \Delta_{01}}{4\pi} \right)^{\frac{1}{3}} \text{ } ^{49)}$$

Das zweite Glied rechts in (4) konvergiert demnach für $M \rightarrow 0$ gleichmäßig gegen Null. Das gleiche gilt, da $\frac{\partial}{\partial x} V(x, y, z)$ stetig ist, auch

⁴⁷⁾ Ein Beweis der Ungleichheiten (3) bei A. Korn, „Sur les équations de l'élasticité“, Annales de l'École Normale (3) 24 (1907), S. 9–75 (S. 27–28). Vgl. auch U. Dini, „Sur la méthode des approximations successives pour les équations aux dérivées partielles du deuxième ordre“, Acta mathematica 25 (1902), S. 185–230 (S. 192–196), woselbst für das logarithmische Potential eine etwas weiter reichende Ungleichheit abgeleitet wird.

⁴⁸⁾ Im allgemeinen werden auf (ν) mehrere (oder selbst unendlich viele) Punkte von S_1 liegen. Irgendeiner dieser Punkte wird als der Punkt X_1, Y_1, Z_1 aufgefaßt.

⁴⁹⁾ Vgl. z. B. E. Schmidt, „Bemerkung zur Potentialtheorie“, Schwarz Festschrift, Berlin 1914, S. 365–383 (S. 368–369).

für das erste Glied. Demnach konvergiert $\frac{\partial}{\partial x} V_1(X_1, Y_1, Z_1)$ für $M \rightarrow 0$ gleichmäßig gegen $\frac{\partial}{\partial x} V(X, Y, Z)$. Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial y} V_1(X_1, Y_1, Z_1)$ $\frac{\partial}{\partial z} V_1(X_1, Y_1, Z_1)$ verhalten sich ganz analog.

Es sei (x, y, z) der Punkt (ξ^*, η^*, ζ^*) . Wir setzen

$$(7) \quad \begin{cases} V(x, y, z) + \frac{\omega^2}{2\kappa f}(x^2 + y^2) = \tilde{J}(\xi^*, \eta^*, \zeta^*), \\ V_1(x, y, z) + \frac{\omega_1^2}{2\kappa f}(x^2 + y^2) = \tilde{J}_1(\xi^*, \eta^*, \zeta^*). \end{cases}$$

Insbesondere ist

$$(7^*) \quad \begin{cases} V(X, Y, Z) + \frac{\omega^2}{2\kappa f}(X^2 + Y^2) = \tilde{J}(\xi, \eta, 0), \\ V_1(X_1, Y_1, Z_1) + \frac{\omega_1^2}{2\kappa f}(X_1^2 + Y_1^2) = \tilde{J}_1(\xi, \eta, \zeta). \end{cases}$$

Nach Voraussetzung ist

$$(8) \quad \frac{\partial}{\partial v} \tilde{J}(\xi, \eta, 0) = \psi < 0^{50}).$$

Es sei α_0 eine hinreichend kleine positive Zahl. Aus den zuletzt durchgeführten Betrachtungen folgt, daß, sofern etwa

$$(9) \quad |\lambda| < \delta^{(4)} \leq \delta^{(2)} \quad \text{oder} \quad \leq \delta^{(1)}, \quad M < \varepsilon_1 \leq \varepsilon^*$$

gilt, für alle (ξ, η) auf S gleichmäßig

$$(10) \quad \frac{\partial}{\partial v} \tilde{J}_1(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\partial}{\partial \zeta} \tilde{J}_1(\xi, \eta, \zeta) < \alpha_0 < 0$$

ist. Liegt (ξ^*, η^*, ζ^*) in einer hinreichend nahen (dreidimensionalen) Umgebung des Punktes (ξ, η, ζ) , so ist aus Stetigkeitsgründen auch

$$(10^*) \quad \frac{\partial}{\partial v} \tilde{J}_1(\xi^*, \eta^*, \zeta^*) < 0.$$

Die Gleichung

$$(10^{**}) \quad \tilde{J}_1(\xi, \eta, \zeta) = \text{const.}$$

läßt sich demnach in einer Umgebung des Punktes (ξ, η, ζ) nach ζ auflösen,

$$(11) \quad \zeta = \zeta(\xi, \eta).$$

Die Funktion $\zeta(\xi, \eta)$ hat stetige Ableitungen erster Ordnung. In einer gewissen Umgebung eines jeden Punktes von S_1 gilt eine Darstellung dieser Art. Dem bekannten Heine-Borelschen Satze zufolge läßt sich S_1 von einer endlichen Anzahl Flächenstücke S_{1j} ($j=1, \dots, p'$) der Art (11)

⁵⁰⁾ Vgl. Kapitel I, § 1, Formel (10).

dachziegelartig überdecken. *Jede Komponente von S_1 ist also eine Fläche mit stetiger Normale.*

Es gilt nun

$$(12) \quad \frac{\partial \xi}{\partial \xi} = - \frac{\frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{J}_1(\xi, \eta, \zeta)}{\frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{J}_1(\xi, \eta, \zeta)}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial \eta} = - \frac{\frac{\partial}{\partial \eta} \tilde{J}_1(\xi, \eta, \zeta)}{\frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{J}_1(\xi, \eta, \zeta)}.$$

Hieraus folgt nun wegen

$$\frac{\partial}{\partial \xi} J_1(\xi, \eta, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \eta} J_1(\xi, \eta, 0) = 0$$

mit Rücksicht auf (10) und (7), da, wie vorhin bewiesen, $\frac{\partial}{\partial x} V_1(X_1, Y_1, Z_1), \dots$ für $M \rightarrow 0$ gegen $\frac{\partial}{\partial x} V(X, Y, Z), \dots$ gleichmäßig konvergieren, daß die Ausdrücke

$$(13) \quad \left| \frac{\partial \xi}{\partial \xi} \right|, \quad \left| \frac{\partial \xi}{\partial \eta} \right|$$

für alle (ξ, η) in S gleichmäßig beliebig klein gemacht werden können, wenn man $|\lambda|$ und M hinreichend klein wählt. Zugleich wird offenbar auch der von den Normalen an S und S_1 in den Punkten $(\xi, \eta, 0)$ und (ξ, η, ζ) eingeschlossene Winkel für alle (ξ, η) auf S gleichmäßig beliebig klein. Für hinreichend kleine Werte von M und $|\lambda|$ liegt auf einer jeden Normale (ν) nur ein Punkt von S_1 . Sollte es deren mehr geben, so müßten mindestens zwei Punkte der Begrenzung derselben Einzelmasse der Flüssigkeit angehören. Die Konstante auf der rechten Seite der Gleichung (10**) müßte in den beiden Punkten denselben Wert haben. Dies ist indessen für hinreichend kleine M und $|\lambda|$ wegen (10*) nicht möglich. *Die Randkomponenten von S und S_1 sind mithin, wie behauptet, einander umkehrbar eindeutig zugeordnet.* Es ist demnach $p = q$.

Für die Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft der Jacobischen und der Maclaurinschen Ellipsoide hat die in diesem Kapitel bis jetzt bewiesenen Sätze bereits früher Herr Liapounoff abgeleitet⁶¹⁾.

Die Fläche S_1 gestattet demnach für alle etwa den Beziehungen

$$(14) \quad |\lambda| < \delta^{(3)} \leq \delta^{(4)}, \quad M < \varepsilon_* \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon^*$$

genügenden $|\lambda|$ und M die im Kapitel I, § 1 eingeführte Darstellung $\xi, \eta, \zeta(\xi, \eta, \omega_1)$. Die Funktion $\zeta(\xi, \eta, \omega_1)$ hat stetige partielle Ableitungen erster Ordnung in bezug auf ξ und η . Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}, \frac{\partial \zeta}{\partial \eta}$ konvergieren für $|\lambda| \rightarrow 0$ und $M \rightarrow 0$ gleichmäßig gegen Null. Es sei, wie im Kapitel II, § 2, mit $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ irgendein von (ξ, η) verschiedener

⁶¹⁾ Vgl. A. Liapounoff, loc. cit.¹⁰⁾ Abhandlung 7.

Punkt auf S bezeichnet. Aus (12), (7*) und (3) folgen mit Rücksicht auf (10) Beziehungen von der Form

$$(15) \quad \left| \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial \bar{\xi}} - \frac{\partial \xi}{\partial \xi} \right|, \quad \left| \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial \bar{\eta}} - \frac{\partial \xi}{\partial \eta} \right| < g_* \bar{d}^{\mu_*} \quad (0 < \mu_* < 1)$$

$$\bar{d}^2 = (\bar{\xi} - \xi)^2 + (\bar{\eta} - \eta)^2.$$

Diese Ungleichheiten gelten für alle (ξ, η) auf S und alle (14) genügenden Werte von $|\lambda|$ und M .

Nunmehr können wir zeigen, daß $V_1(x, y, z)$ in $T_1 + S_1$ stetige partielle Ableitungen zweiter Ordnung hat. Betrachten wir z. B. die partielle Ableitung $\frac{\partial V_1}{\partial x}$. Sie läßt sich durch teilweise Integration in das Potential einer auf S_1 ausgebreiteten einfachen Belegung umwandeln [vgl. die Fußnote ²⁴]. Die Dichte dieser Belegung ist stetig und genügt einer zu (24) II analogen Ungleichheit. Darum sind die partiellen Ableitungen erster Ordnung von $\frac{\partial V_1}{\partial x}$, d. h. die Funktionen $\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 V_1}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 V_1}{\partial x \partial z}$ in $T_1 + S_1$ stetig⁵²). Ebenso läßt sich zeigen, daß auch die übrigen partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von V_1 in $T_1 + S_1$ vorhanden und stetig sind.

Es sei $\tilde{J}_1(\xi, \eta, \zeta) = C$ (C konstant) die Gleichung eines zusammenhängenden Stückes der Fläche S_1 in der Umgebung des Punktes (ξ, η, ζ) . Da $\frac{\partial}{\partial \nu} \tilde{J}_1(\xi, \eta, \zeta) < 0$ ist, so kann man auf S ein Gebiet \mathfrak{S} um den Punkt (ξ, η) umgrenzen, so daß für alle (ξ, η) in \mathfrak{S} die Flächenstücke

$$\tilde{J}_1(\xi, \eta, \zeta) = C' \quad (C' \text{ konstant})$$

⁵²) Vgl. O. Hölder, „Beiträge zur Potentialtheorie“, Inaugural-Dissertation, Stuttgart 1882, S. 1–71 (S. 20–42, vor allem S. 41–42). Hier wird von der die Belegung tragenden Fläche lediglich das vorausgesetzt, was wir von der Fläche S_1 bis jetzt wissen, nämlich daß gewisse den Ungleichheiten (15) entsprechende Beziehungen bestehen.

Es sei P_0 irgendein Punkt auf der Fläche. Herr Hölder beweist, daß die partiellen Ableitungen erster Ordnung des Potentials in einem Punkte P außerhalb der Fläche sich bestimmten Grenzwerten nähern, wenn P gegen P_0 längs einer beliebigen die Fläche nicht berührenden Geraden konvergiert. Durch die Betrachtungen von Herrn Hölder ist indessen, wie man sieht, darüber hinaus bewiesen, daß der Grenzübergang für alle P_0 auf einem (abgeschlossenen) Bereich der Fläche gleichmäßig ist, wenn man voraussetzt, daß die Gerade P_0P mit der Tangentialebene in P_0 einen Winkel einschließt, der für alle betrachteten P_0 größer als ein angebbarer (im übrigen beliebig kleiner) positiver Wert ist. Dies ist der präzise Sinn der Behauptung, die partiellen Ableitungen erster Ordnung des betrachteten Flächenpotentials seien auch noch auf dem Rande vorhanden und stetig. Bei der späteren Anwendung dieses Satzes wird angenommen, daß die Punktepaare P_0 und P allemal auf derselben Geraden (ν) liegen. Für hinreichend kleine M ist darum jener Winkel beliebig wenig von $\frac{\pi}{2}$ verschieden.

im Innern von T_1 liegen, sofern

$$0 < C' - C < \delta^*$$

ist, unter δ^* einen hinreichend kleinen Wert verstanden. Es sei C'_n ($n = 1, 2, \dots$) eine Folge dieser Bedingung genügender, gegen C konvergierender Werte von C' ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C'_n = C'.$$

Die Flächenstücke $\mathfrak{S}^{(n)}$, deren Gleichung $\tilde{J}_1(\xi, \eta, \zeta) = C'_n$ ($n = 1, 2, \dots$) lautet, konvergieren in \mathfrak{S} gleichmäßig gegen S_1 . Die Gleichung von $\mathfrak{S}^{(n)}$ möge aufgelöst heißen

$$\zeta = \zeta_n(\xi, \eta).$$

Es ist

$$(16) \quad \frac{\partial \zeta_n}{\partial \xi} = - \frac{\frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{J}_1(\xi, \eta, \zeta_n)}{\frac{\partial}{\partial \zeta} \tilde{J}_1(\xi, \eta, \zeta_n)}.$$

Hieraus sieht man vor allem, daß gleichmäßig $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial \zeta_n}{\partial \xi} = \frac{\partial \zeta}{\partial \xi}$ und ebenso $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial \zeta_n}{\partial \eta} = \frac{\partial \zeta}{\partial \eta}$ gilt. Der Zähler und Nenner in (16) haben stetige partielle Ableitungen erster Ordnung, die für $n \rightarrow \infty$ gegen bestimmte Grenzwerte gleichmäßig konvergieren. Dies folgt, wie leicht ersichtlich, aus der vorhin hervorgehobenen Existenz und Stetigkeit der partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von V_1 am Rande S_1 des Bereiches $T_1 + S_1$. Also existiert z. B. der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial^2 \zeta_n}{\partial \xi^2}$. Der Grenzübergang ist für alle (ξ, η) in \mathfrak{S} gleichmäßig. Offenbar ist darum

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial^2 \zeta_n}{\partial \xi^2} = \frac{\partial}{\partial \xi} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial \zeta_n}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2}.$$

Ebenso wird die Existenz (und zugleich die Stetigkeit) der partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi \partial \eta}$, $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \eta^2}$ bewiesen.

Diese etwas umständlichen Überlegungen lassen sich nicht gut umgehen. Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2}, \dots$ verhalten sich zwar auch in dem ganzen „Außengebiet“ von T_1 mit Einschluß des Randes stetig, ändern sich indessen bei dem Übergang durch S_1 im allgemeinen sprunghaft.

Die Fläche S_1 ist stetig gekrümmt. Die Funktion $\frac{\partial V_1}{\partial x}$ läßt sich, wie vorhin auseinandergesetzt, als das Potential einer einfachen Belegung auffassen. Sie hat nach bekannten Sätzen in $T_1 + S_1$ stetige partielle Ableitungen erster Ordnung, die auf S_1 gewissen zu (3) analogen Ungleich-

heiten genügen⁵³⁾. Darum haben, wie sich leicht zeigen läßt, die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von $\zeta(\xi, \eta)$ die gleiche Eigenschaft.

Man kann, auf diesem Wege schrittweise zeigen, daß in der Tat die Funktion $\zeta(\xi, \eta)$ stetige Ableitungen aller Ordnungen hat. Man wird dabei $\frac{\partial V_1}{\partial x}$ immer wieder als Potential einer einfachen Belegung auffassen und den folgenden Satz benutzen. Wenn die Fläche $\zeta(\xi, \eta)$, welche die Belegung trägt, kurz gesprochen, stetige Ableitungen der n ersten Ordnungen hat und die Ableitungen der höchsten Ordnung gewissen zu (15) analogen Ungleichheiten genügen, wenn ferner die Dichte der Belegung auf S_1 stetige Ableitungen der $(n-1)$ ersten Ordnungen hat und die $(n-1)$ -ten Ableitungen ihrerseits Ungleichheiten erfüllen, die (15) analog sind, so hat das Potential in $T_1 + S_1$ stetige Ableitungen der n ersten Ordnungen und die n -ten Ableitungen genügen gewissen zu (3) analogen Ungleichheiten⁵⁴⁾.

Durch die vorstehenden Betrachtungen ist nicht nur gezeigt, daß man die Gaußschen Parameter aller Gleichgewichtsfiguren in einer gewissen Nachbarschaft des Körpers T so wählen kann, daß die kartesischen Koordinaten der Punkte auf einer jeden Randkomponente, als Funktionen jener Parameter aufgefaßt, stetige Ableitungen aller Ordnungen haben, sondern es ist noch der folgende weitergehende Satz bewiesen. Es sei eine von einer endlichen Anzahl Jordanscher Flächen begrenzte, aus einer oder mehrerer Massen bestehende Gleichgewichtsfigur vom bestimmten Volumen (im Sinne von Peano und Jordan) gegeben, und es möge die Schwerkraft auf der gesamten Oberfläche von Null verschieden und nach innen gerichtet sein. Man kann dann die Gaußschen Parameter so wählen, daß die kartesischen Koordinaten stetige Ableitungen aller Ordnungen in bezug auf diese Parameter haben.

Herr Liapounoff hat demgegenüber für die von ihm allein betrachteten Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft der Ellipsoide lediglich bewiesen, daß sie eine stetige Normale haben. Das in der vorliegenden Arbeit bewiesene weitergehende Resultat gestattet das Verfahren auf die neuen Figuren wieder anzuwenden und so schrittweise weiter zu kommen, bis man durch Singularitäten aufgehalten wird, die in der Natur der Sache liegen. Solche Singularitäten ergeben sich z. B., wenn die Schwerkraft in einzelnen Punkten auf der Oberfläche einer Gleichgewichtsfigur verschwindet.

⁵³⁾ Vgl. A. Korn, loc. cit. ⁵¹⁾ S. 15–17.

⁵⁴⁾ Für $n=2$ findet sich dieser Satz bei A. Korn, loc. cit. ⁵¹⁾. Vgl. S. 18 die vier letzten Zeilen des § 2. Der allgemeine Satz dürfte sich in analoger Weise beweisen lassen. Der Exponent μ_* (< 1) behält bei dem Übergang von $(n-1)$ zu n denselben Wert.

§ 2.

Nach diesen Vorbereitungen können wir jetzt zeigen, daß die in den Kapiteln II und III bestimmten Figuren die Gesamtheit der Gleichgewichtsfiguren T_1 in der Nachbarschaft des Körpers T , die zu einem Werte ω_1 der Winkelgeschwindigkeit in der Umgebung des Wertes ω gehören, erschöpfen. Wie am Anfang dieses Kapitels näher ausgeführt wurde, nehmen wir das Volumen \mathfrak{Z}_1 der neuen Gleichgewichtsfiguren gleich dem Volumen \mathfrak{Z} von T an. Es sei wie vorhin M der Höchstwert der Entfernung der Punkte auf S_1 von der Fläche S . *Es gibt, wie nunmehr bewiesen werden soll, ein Paar positiver Zahlen $\varepsilon_2 \leq \varepsilon_*$ und $\delta^{(1)} \leq \delta^{(3)}$, so daß jede Figur des relativen Gleichgewichts der Flüssigkeit, die so beschaffen ist, daß $M < \varepsilon_2$ und $|\lambda| < \delta^{(1)}$ gilt, unter den vorhin gefundenen Figuren enthalten ist.*

Wie wir in § 1 gesehen haben, läßt sich für hinreichend kleine M und $|\lambda|$ die Gleichung von S_1 auf die Form $\zeta = \zeta(\xi, \eta, \omega_1)$ bringen, unter $\zeta(\xi, \eta, \omega_1)$ eine nebst ihren partiellen Ableitungen aller Ordnungen stetige Funktion verstanden. Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}, \frac{\partial \zeta}{\partial \eta}$ konvergieren für $M \rightarrow 0, |\lambda| \rightarrow 0$ gleichmäßig gegen Null. Sind M und $|\lambda|$ so klein gewählt, daß $\zeta, \frac{\partial \zeta}{\partial \xi}, \frac{\partial \zeta}{\partial \eta}$ den Beziehungen (36) I genügen, so erfüllt, wie wir wissen, ζ die Integro-Differentialgleichungen (68) I und (14) II oder (14) III. Nehmen wir zunächst einmal an, die lineare Integralgleichung (1) II möge $m (\geq 3)$ Nullösungen haben. Unsere Behauptung wird dargetan sein, wenn wir den folgenden Satz beweisen. *Die Integro-Differentialgleichung (14) III hat für alle den Beziehungen*

$$(17) \quad \left| \zeta \right|, \left| \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right|, \left| \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right| < \varepsilon_2 < \varepsilon_* < \varepsilon, \quad |\lambda| < \delta^{(5)} \leq \delta^{(3)}$$

genügenden $\zeta, \frac{\partial \zeta}{\partial \xi}, \frac{\partial \zeta}{\partial \eta}$ und λ nicht mehr als eine zu den vorgegebenen hinreichend kleinen Werten von $\lambda, s_1, \dots, s_q, r_3, \dots, r_m$ gehörige Lösung. Daß sie für hinreichend kleine $|\lambda|, |s_1|, \dots, |s_q|, |r_3|, \dots, |r_m|$ mindestens eine Lösung hat, haben wir in den Kapiteln II und III gesehen.

Es sei im Gegensatz hierzu $\zeta(\xi, \eta, \omega_1)$ eine andere der zu (17) analogen Beziehung

$$(18) \quad \left| \zeta \right|, \left| \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right|, \left| \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right| < \varepsilon_2$$

genügende, zu $\lambda, s_1, \dots, s_q, r_3, \dots, r_m$ gehörige Lösung dieser Integro-Differentialgleichung. Es gilt demnach

$$(19) \quad \psi \zeta + \int_s N_1 \zeta' d\sigma' = s - R^2 \lambda - \frac{\omega^2}{2\kappa f} (a^2 + b^2) \zeta^2 - 2R\tau \lambda \zeta - (a^2 + b^2) \lambda \zeta^2 \\ + \psi \sum_{l=3}^m r_l u_l - \Psi$$

und

$$(20) \quad \psi \underline{\zeta} + \int_s N_1 \underline{\zeta}' d\sigma' = s - R^2 \lambda - \frac{\omega^2}{2\kappa f} (a^2 + b^2) \underline{\zeta}^2 - 2R\tau \lambda \underline{\zeta} - (a^2 + b^2) \lambda \underline{\zeta}^2 \\ + \psi \sum_{l=3}^m r_l u_l - \underline{\Psi}.$$

Hier bezeichnet Ψ den Ausdruck, der aus ψ entsteht, wenn man für ζ die Funktion $\underline{\zeta}$ einführt. Aus (19) und (20) folgt,

$$(21) \quad \zeta - \underline{\zeta} = \tilde{\zeta}$$

gesetzt,

$$(22) \quad \psi \tilde{\zeta} + \int_s N_1 \tilde{\zeta}' d\sigma' = -\frac{\omega^2}{2\kappa f} (a^2 + b^2) (\zeta + \underline{\zeta}) \tilde{\zeta} - 2R\tau \lambda \tilde{\zeta} \\ - (a^2 + b^2) \lambda (\zeta + \underline{\zeta}) \tilde{\zeta} - (\Psi - \underline{\Psi}) = \Theta - (\underline{\Psi} - \underline{\Psi}).$$

Es sei Ω der größte der drei Werte

$$(23) \quad \text{Max } |\tilde{\zeta}|, \quad \text{Max } \left| \frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial \xi} \right|, \quad \text{Max } \left| \frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial \eta} \right|.$$

Man überzeugt sich leicht, daß, wenn $\Omega > 0$ vorausgesetzt wird,

$$(24) \quad \Theta, \left| \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \right|, \left| \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \right| < (\alpha_1 \varepsilon_2 + \alpha_2 \delta^{(5)} + \alpha_3 \varepsilon_2 \delta^{(5)}) \Omega \\ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{ konstant})$$

ist. In dem § 3 des V. Kapitels wird ferner gezeigt, daß

$$(25) \quad |\Psi - \underline{\Psi}|, \left| \frac{\partial (\Psi - \underline{\Psi})}{\partial \xi} \right|, \left| \frac{\partial (\Psi - \underline{\Psi})}{\partial \eta} \right| < \alpha_4 \varepsilon_2 \Omega \quad (\alpha_4 \text{ konstant})$$

gilt. Aus (22), (24) und (25) folgt demnach den Betrachtungen des § 2 des II. Kapitels gemäß

$$(26) \quad |\tilde{\zeta}|, \left| \frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial \xi} \right|, \left| \frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial \eta} \right| < (\alpha_5 \varepsilon_2 + \alpha_6 \delta^{(5)} + \alpha_7 \varepsilon_2 \delta^{(5)}) \Omega \quad (\alpha_5, \alpha_6, \alpha_7 \text{ konstant}),$$

mithin

$$(27) \quad \Omega < \Omega (\alpha_5 \varepsilon_2 + \alpha_6 \delta^{(5)} + \alpha_7 \varepsilon_2 \delta^{(5)}).$$

Diese Beziehung führt, wenn ε_2 und $\delta^{(5)}$ hinreichend klein sind, auf einen Widerspruch. Also ist $\Omega = 0$, w. z. b. w.

Die Betrachtungen verlaufen ganz analog, wenn die Integralgleichung (1) II nur die trivialen Nulllösungen u_1 und u_2 (oder auch nur die Nulllösung u_1) hat. Die Lösungen ζ und $\underline{\zeta}$ gehören diesmal zu vorgeschriebenen Werten von λ, s_1, \dots, s_q . In den Gleichungen (19) und (20) tritt für N_1 der Ausdruck N ein, das Glied $\psi \sum_{l=3}^m r_l u_l$ fehlt ganz.

Fünftes Kapitel.

Hilfssätze.

§ 1.

Wir kommen jetzt auf die Betrachtungen des Kapitels I § 3 zurück.
Die Beziehung

$$(1) \quad \frac{\partial^3 U_i}{\partial \xi \partial t^2} = \int_S \sum (a' \zeta' - a \zeta) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial t} \left(\frac{A'_i}{\varrho'_i} \right) d\xi' d\eta' - \int_S \sum \frac{\partial}{\partial \xi} (a \zeta) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{A'_i}{\varrho'_i} \right) d\xi' d\eta'$$

[vgl. (48) I] läßt sich wie folgt rasch beweisen.

Es sei h_0 eine hinreichend kleine positive Zahl. Es seien \mathfrak{R} und \mathfrak{R}_h Kreisgebiete um die Punkte (ξ, η) und $(\xi + h, \eta) = (\xi_h, \eta_h)$ ($h \leq h_0$) vom festen Radius \mathfrak{R} . Es gilt in naheliegender Bezeichnungsweise

$$(2) \quad \frac{\partial^3 U_i}{\partial \xi \partial t^2} = \int_{S-\mathfrak{R}} \frac{\partial}{\partial \xi} \sum (a' \zeta' - a \zeta) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{A'_i}{\varrho'_i} \right) d\xi' d\eta' + \frac{\partial L}{\partial \xi},$$

$$(3) \quad L(\xi, \eta) = \int_{\mathfrak{R}} \sum (a' \zeta' - a \zeta) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{A'_i}{\varrho'_i} \right) d\xi' d\eta'.$$

Wir führen zur Abkürzung folgende Bezeichnungen ein:

$$(4) \quad \begin{cases} (\xi' + h, \eta') = (\xi'_h, \eta'_h), & a(\xi'_h, \eta'_h) = a'_h, & \zeta(\xi'_h, \eta'_h) = \zeta'_h, \\ a(\xi_h, \eta_h) = a_h, \dots & A_i(\xi'_h, \eta'_h) = A'_{ih}, \dots \\ \varrho_i(\xi_h, \eta_h; \xi', \eta') = \varrho_i^*, & \varrho_i(\xi_h, \eta_h; \xi'_h, \eta'_h) = \varrho_{ih}. \end{cases}$$

Es gilt

$$(5) \quad L(\xi + h, \eta) - L(\xi, \eta) = \int_{\mathfrak{R}_h} \sum (a' \zeta' - a_h \zeta_h) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{A'_i}{\varrho'_i} \right) d\xi' d\eta' \\ - \int_{\mathfrak{R}} \sum (a' \zeta' - a \zeta) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{A'_i}{\varrho'_i} \right) d\xi' d\eta' - \int_{\mathfrak{R}_h - \mathfrak{R}} \sum (a' \zeta' - a_h \zeta_h) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{A'_i}{\varrho'_i} \right) d\xi' d\eta'$$

oder in einer anderen Schreibweise

$$(6) \quad L(\xi + h, \eta) - L(\xi, \eta) \\ = \left\{ \int_{\mathfrak{R}} \sum (a'_h \zeta'_h - a_h \zeta_h) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{A'_{ih}}{\varrho'_{ih}} \right) d\xi' d\eta' - \int_{\mathfrak{R}} \sum (a' \zeta' - a \zeta) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{A'_i}{\varrho'_i} \right) d\xi' d\eta' \right\} \\ - \int_{\mathfrak{R}_h - \mathfrak{R}} \sum (a' \zeta' - a_h \zeta_h) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{A'_i}{\varrho'_i} \right) d\xi' d\eta' = \{J_h - J_0\} - J'.$$

Man überzeugt sich leicht, daß

$$(7) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (J_h - J_0)$$

existiert und gleich

$$(8) \quad \left[\frac{dJ_h}{dh} \right]_{h=0} = \int_{\mathfrak{R}} \left[\frac{\partial}{\partial \xi'} \sum (a' \zeta' - a \zeta) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{A'_t}{e_t} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \sum (a' \zeta' - a \zeta) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{A'_t}{e_t} \right) \right] d\xi' d\eta'$$

ist. Es sei etwa \mathfrak{R} ein Kreis vom Halbmesser $\mathfrak{R} < \mathfrak{R}$ um (ξ, η) . Offenbar ist

$$(9) \quad \begin{aligned} & \frac{d}{dh} \int_{\mathfrak{R}-\mathfrak{R}} \sum (a'_h \zeta'_h - a_h \zeta_h) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{A'_{th}}{e_{th}} \right) d\xi' d\eta' \\ &= \int_{\mathfrak{R}-\mathfrak{R}} \frac{d}{dh} \sum (a'_h \zeta'_h - a_h \zeta_h) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{A'_{th}}{e_{th}} \right) d\xi' d\eta'. \end{aligned}$$

Das Integral rechter Hand konvergiert für alle $|h| \leq h_1 < h_0$ für $\mathfrak{R} \rightarrow 0$ *gleichmäßig* gegen das Integral

$$(10) \quad \begin{aligned} \int_{\mathfrak{R}} \frac{d}{dh} \sum (a'_h \zeta'_h - a_h \zeta_h) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{A'_{th}}{e_{th}} \right) d\xi' d\eta' &= \int_{\mathfrak{R}} \left[\frac{\partial}{\partial \xi'} \sum (a'_h \zeta'_h - a_h \zeta_h) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{A'_{th}}{e_{th}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial \xi} \sum (a'_h \zeta'_h - a_h \zeta_h) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{A'_{th}}{e_{th}} \right) \right] d\xi' d\eta'. \end{aligned}$$

Die zu integrierende Funktion ist nämlich beschränkt und, höchstens außer für $\xi' = \xi$, $\eta' = \eta$, stetig. Demnach ist in der Tat

$$(11) \quad \begin{aligned} \left[\frac{dJ_h}{dh} \right]_{h=0} &= \frac{d}{dh} \left[\int_{\mathfrak{R}} \sum (a'_h \zeta'_h - a_h \zeta_h) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{A'_{th}}{e_{th}} \right) d\xi' d\eta' \right]_{h=0} \\ &= \int_{\mathfrak{R}} \left[\frac{d}{dh} \sum (a'_h \zeta'_h - a_h \zeta_h) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{A'_{th}}{e_{th}} \right) d\xi' d\eta' \right]_{h=0} \\ &= \int_{\mathfrak{R}} \left[\frac{\partial}{\partial \xi'} \sum (a' \zeta' - a \zeta) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{A'_t}{e_t} \right) \right] d\xi' d\eta' \\ &\quad + \int_{\mathfrak{R}} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \sum (a' \zeta' - a \zeta) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{A'_t}{e_t} \right) \right] d\xi' d\eta'. \end{aligned}$$

Man sieht ferner leicht ein, daß

$$(12) \quad \begin{aligned} \lim_{h=0} \frac{1}{h} J' &= \lim_{h=0} \frac{1}{h} \int_{\mathfrak{R}_h-\mathfrak{R}} \sum (a' \zeta' - a_h \zeta_h) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{A'_t}{e_t} \right) d\xi' d\eta' \\ &= \lim_{h=0} \frac{1}{h} \int_{\mathfrak{R}_h-\mathfrak{R}} \sum (a' \zeta' - a \zeta) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{A'_t}{e_t} \right) d\xi' d\eta' = \int_{\mathfrak{C}} \sum (a' \zeta' - a \zeta) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{A'_t}{e_t} \right) d\eta', \end{aligned}$$

unter \mathfrak{C} den Rand des Kreisgebietes \mathfrak{R} verstanden. Nun ist, wie man ohne weiteres sieht,

$$(13) \quad \int_{\mathfrak{R}} \frac{\partial}{\partial \xi'} \sum (a' \zeta' - a \zeta) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{A'_t}{e_t} \right) d\xi' d\eta' = \int_{\mathfrak{C}} (a' \zeta' - a \zeta) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{A'_t}{e_t} \right) d\eta'.$$

Faßt man die Formeln (2), (6), (8), (12) und (13) zusammen, so findet man in der Tat die zu beweisende Beziehung (1).

§ 2.

Wir wollen jetzt zeigen, daß auch die partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 U_t}{\partial t^2}, \dots, \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 U_t}{\partial t^2}$ existieren und stetig sind. Der Beweis ist dem in dem vorhergehenden Paragraphen durchgeführten ganz analog. Wir beschränken uns auf die Untersuchung der partiellen Ableitung $\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 U_t}{\partial t^2}$.

Wir zerlegen wie vorhin den Ausdruck für $\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial^2 U_t}{\partial t^2}$ in ein Integral erstreckt über $S - \mathfrak{R}$ und eins erstreckt über \mathfrak{R} . Es genügt, den zuletzt genannten Ausdruck

$$(14) \quad - \int_{\mathfrak{R}} \sum \frac{\partial}{\partial \xi} (a \zeta) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{A'_t}{\varrho_t} \right) d\xi' d\eta' + \int_{\mathfrak{R}} \sum (a' \zeta' - a \zeta) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial t} \left(\frac{A'_t}{\varrho_t} \right) d\xi' d\eta'$$

näher zu betrachten. Wir begnügen uns mit einer eingehenden Untersuchung des Integrals

$$(15) \quad M = \int_{\mathfrak{R}} (a' \zeta' - a \zeta) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial t} \left(\frac{A'_t}{\varrho_t} \right) d\xi' d\eta'.$$

Die fünf anderen in (14) vorkommenden Integrale lassen sich in einer ganz ähnlichen Weise erledigen.

Es ist

$$(16) \quad \begin{aligned} & M(\xi + h, \eta) - M(\xi, \eta) \\ &= \int_{\mathfrak{R}} \left\{ (a'_h \zeta'_h - a_h \zeta_h) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial t} \left(\frac{A'_{th}}{\varrho_{th}} \right) - (a' \zeta' - a \zeta) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial t} \left(\frac{A'_t}{\varrho_t} \right) \right\} d\xi' d\eta' \\ & - \int_{\mathfrak{R}_h - \mathfrak{R}} (a' \zeta' - a_h \zeta_h) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial t} \left(\frac{A'_t}{\varrho'_t} \right) d\xi' d\eta' = (A_h - A_0) - A'. \end{aligned}$$

Man überzeugt sich ohne wesentliche Schwierigkeiten, daß

$$(17) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (A_h - A_0)$$

existiert und gleich

$$(18) \quad \int_{\mathfrak{R}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi'} \left[(a'_h \zeta'_h - a_h \zeta_h) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial t} \left(\frac{A'_{th}}{\varrho_{th}} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(a' \zeta' - a \zeta) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial t} \left(\frac{A'_t}{\varrho_t} \right) \right] \right\} d\xi' d\eta'$$

ist. Der Beweis läuft wie in § 1 auf den Nachweis hinaus, daß das Integral

$$(19) \quad \begin{aligned} & \int_{\mathfrak{R} - \mathfrak{R}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi'} \left[(a'_h \zeta'_h - a_h \zeta_h) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial t} \left(\frac{A'_{th}}{\varrho_{th}} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(a'_h \zeta'_h - a_h \zeta_h) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial t} \left(\frac{A'_{th}}{\varrho_{th}} \right) \right] \right\} d\xi' d\eta' \\ &= \int_{\mathfrak{R} - \mathfrak{R}} \Pi_h d\xi' d\eta' \end{aligned}$$

für alle $|h| \leq h_1 < h_0$ für $\Re \rightarrow 0$ gegen $\int_{\mathfrak{R}} II_h d\xi' d\eta'$ gleichmäßig konvergiert. Die zu integrierende Funktion ist, außer für $\xi' = \xi$, $\eta' = \eta$, stetig. In der Nachbarschaft dieser Stelle ist der Ausdruck $|\varrho II_h|$ beschränkt.

Andererseits ist

$$(20) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} A' = \int_{\mathfrak{C}} (a' \zeta' - a \zeta) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial t} \left(\frac{A'_t}{\varrho_t} \right) d\eta'.$$

Demnach ist $\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 U_t}{\partial t^2}$ vorhanden und, wie leicht zu sehen ist, stetig.

Man überzeugt sich jetzt ohne Schwierigkeit an Hand der expliziten Ausdrücke, daß in der Tat

$$(21) \quad \left| \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 U_t}{\partial t^2} \right| < \gamma' \varepsilon^2$$

ist.

§ 3.

Wir knüpfen an die Betrachtungen und die Bezeichnungen des § 2 des IV. Kapitels an und werden jetzt beweisen, daß

$$(22) \quad |\underline{\Psi} - \underline{\Psi}|, \left| \frac{\partial}{\partial \xi} \underline{\Psi} - \frac{\partial}{\partial \xi} \underline{\Psi} \right|, \left| \frac{\partial}{\partial \eta} \underline{\Psi} - \frac{\partial}{\partial \eta} \underline{\Psi} \right| < \alpha_4 \varepsilon_2 \Omega$$

ist. Es gilt [man vgl. die Formeln (58) I und (59) I]

$$(23) \quad \underline{\Psi} = \int_0^1 dt \int_0^t \frac{\partial^2 U_{t*}}{\partial t_*^2} dt_*.$$

Es genügt demnach zu zeigen, daß

$$(24) \quad \left| \frac{\partial^2 U_t}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U_t}{\partial t^2} \right|, \left| \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial^2 U_t}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial^2 U_t}{\partial t^2} \right|, \left| \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial^2 U_t}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial^2 U_t}{\partial t^2} \right| < \alpha_4 \varepsilon_2 \Omega$$

ist, unter $\frac{\partial^2 U_t}{\partial t^2}$ den Ausdruck verstanden, der entsteht, wenn man in $\frac{\partial^2 U_t}{\partial t^2}$ die Funktion $\underline{\zeta}$ für ζ einführt.

Es ist nun

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 U_t}{\partial t^2} &= \int_{\mathfrak{S}} \sum M^{(1)} N^{(1)} d\xi' d\eta', \\ \underline{M}^{(1)} &= a' \zeta' - a \zeta, \quad N^{(1)} = P + Q, \quad P = \frac{1}{\varrho_t} \frac{\partial A'_t}{\partial t}, \quad Q = -\frac{1}{\varrho_t^3} \varrho_t \frac{\partial \varrho_t}{\partial t} A'_t, \end{aligned} \right.$$

$$(26) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 U_t}{\partial \underline{t}^2} - \frac{\partial^2 U_t}{\partial t^2} &= \int_{\mathfrak{S}} \sum (\underline{M}^{(1)} \underline{N}^{(1)} - M^{(1)} N^{(1)}) d\xi' d\eta' \\ &= \int_{\mathfrak{S}} [\sum (\underline{M}^{(1)} - M^{(1)}) \underline{N}^{(1)} + M^{(1)} (\underline{N}^{(1)} - N^{(1)})] d\xi' d\eta' \\ &= \int_{\mathfrak{S}} \sum \varrho_t^1 (a' \tilde{\zeta}' - a \tilde{\zeta}) \varrho_t \underline{N}^{(1)} d\xi' d\eta' + \int_{\mathfrak{S}} \sum \varrho_t^1 (a' \zeta' - a \zeta) \varrho_t (\underline{P} - P) d\xi' d\eta' \\ &\quad + \int_{\mathfrak{S}} \sum (a' \zeta' - a \zeta) (\underline{Q} - Q) d\xi' d\eta' = K^{(1)} + K^{(2)} + K^{(3)}. \end{aligned}$$

Es gilt nun (vgl. die Betrachtungen im § 3 des I. Kapitels)

$$(27) \quad \frac{1}{e_t} (a' \tilde{\zeta}' - a \tilde{\zeta}) = \frac{\varrho}{e_t} \frac{1}{\varrho} (a' \tilde{\zeta}' - a \tilde{\zeta}) \\ = \frac{1}{\sqrt{1+k(t)}} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} [a(\dot{\sigma}) \tilde{\zeta}(\dot{\sigma})] \frac{\xi' - \xi}{\varrho} + \frac{\partial}{\partial \eta} [a(\dot{\sigma}) \tilde{\zeta}(\sigma)] \frac{\eta' - \eta}{\varrho} \right],$$

unter $\dot{\sigma}$ den Punkt $[\xi + \vartheta(\xi' - \xi), \eta + \vartheta(\eta' - \eta)]$ ($0 < \vartheta < 1$) verstanden.

Nach (31) I, (53) I folgt hieraus

$$(28) \quad \left| \frac{1}{e_t} (a' \tilde{\zeta}' - a \tilde{\zeta}) \right| < \alpha_s \Omega,$$

unter α_s , wie später unter α_9 , α_{10} , ..., positive Konstante verstanden.

Andererseits ist, wie man fast unmittelbar sieht, $\varepsilon_2 < 1$ vorausgesetzt,

$$(29) \quad |\varrho_t N^{(1)}| < \alpha_9 \varepsilon_2 + \alpha_{10} \varepsilon_2^2 < \alpha_{11} \varepsilon_2,$$

mithin gewiß

$$(30) \quad |K^{(1)}| < \alpha_{12} \varepsilon_2 \Omega.$$

Wir schreiben ferner

$$(31) \quad \underline{P} - P = \frac{1}{e_t} \frac{\partial A'_t}{\partial t} - \frac{1}{e_t} \frac{\partial A'_t}{\partial t} = \frac{1}{e_t} \left(\frac{\partial A'_t}{\partial t} - \frac{\partial A'_t}{\partial t} \right) - \frac{1}{e_t} \frac{\partial A'_t}{\partial t} \frac{\varrho_t^2 - \varrho_t^2}{\varrho_t (\varrho_t + \varrho_t)}.$$

Wie man sich leicht überzeugt, ist

$$(32) \quad \left| \frac{\partial A'_t}{\partial t} - \frac{\partial A'_t}{\partial t} \right| < (\alpha_{13} + \alpha_{14} \varepsilon_2) \Omega < \alpha_{15} \Omega,$$

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{\partial A'_t}{\partial t} \right| < \alpha_{16} \varepsilon_2 + \alpha_{17} \varepsilon_2^2 < \alpha_{18} \varepsilon_2, \\ \frac{\varrho_t^2 - \varrho_t^2}{e_t (\varrho_t + \varrho_t)} = \frac{1}{\sqrt{1+k(t)} + \sqrt{1+k(t)}} \frac{1}{\varrho^2} \left\{ 2t \sum (X' - X) (a' \tilde{\zeta}' - a \tilde{\zeta}) \right. \\ \left. + 2t^2 \sum [a' (\zeta' + \zeta') - a (\zeta + \zeta)] (a' \tilde{\zeta}' - a \tilde{\zeta}) \right\}, \end{array} \right.$$

$$(34) \quad \left| \frac{\varrho_t^2 - \varrho_t^2}{e_t (\varrho_t + \varrho_t)} \right| < (\alpha_{19} + \alpha_{20} \varepsilon_2) \Omega < \alpha_{21} \Omega.$$

Aus (31) bis (34) und den analogen Beziehungen für die anderen Glieder in $K^{(2)}$ folgt

$$(35) \quad |K^{(2)}| < \alpha_{22} \varepsilon \Omega.$$

In ähnlicher Weise läßt sich zeigen, daß auch

$$(36) \quad |K^{(3)}| < \alpha_{23} \varepsilon \Omega$$

ist. Aus (30), (35) und (36) ergibt sich die behauptete Ungleichheit für $\frac{\partial^2 U_t}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U_t}{\partial t^2}$.

Der Beweis der beiden übrigen Ungleichheiten (22) verläuft ganz ähnlich. Man wird hier von der Beziehung

$$(37) \quad \frac{\partial^3 U_t}{\partial \xi \partial t^2} = \int_S \sum (a' \zeta' - a \zeta) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial t} \left(\frac{A'_t}{\varrho_t} \right) d\xi' d\eta' - \int_{\bar{S}} \sum \frac{\partial}{\partial \xi} (a \zeta) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{A'_t}{\varrho_t} \right) d\xi' d\eta'$$

und der analogen Formel für $\frac{\partial^3 U_t}{\partial \eta \partial t^2}$ ausgehen und wie im Kapitel I § 3 das Integrationsgebiet in die beiden Gebiete $\int_{s-\bar{s}}$ und $\int_{\bar{s}}$ zerlegen. In dem über \bar{S} erstreckten Integral wird man wie an der bezeichneten Stelle Polarkoordinaten r und t einführen.

Berlin, den 18. Januar 1918.

(Eingegangen am 18. Januar 1918.)