Ueber den Fundamentalsatz der Algebra.

Von P. Gordan*) in Erlangen.

Im Nachstehenden versuche ich, den zweiten Beweis, welchen Gauss (siehe Werke Bd. 3. p. 33—56) für den Fundamentalsatz der Algebra gegeben hat: *dass jede ganze, rationale algebraische Function einer Variabeln x in lineare Functionen zerfällbar ist,* in einigen wesentlichen Punkten zu vereinfachen. Dabei unterdrücke ich der Kürze wegen einige Ausführungen, die allgemein bekannt sind. Z. B. beschränke ich mich darauf, den geforderten Nachweis für Gleichungen mit reellen Coefficienten zu führen und bei ihnen die Existenz überhaupt *einer* Wurzel zu zeigen. Andererseits mögen die beiden Sätze als bewiesen gelten:

> dass zwei Functionen, deren Resultante**) verschwindet, einen gemeinsamen Factor haben, und dass eine ganze Function nur auf eine Weise in Primfactoren zerlegt werden kann.

Sei also

$$f = x^n + a x^{n-1} + b x^{n-2} + \cdots = 0$$

eine Gleichung mit gegebenen reellen Coëfficienten; von ihr soll gezeigt werden, dass sie eine Wurzel besitzt.

Wenn n ungerade, ist dies unmittelbar deutlich, da $f(+\infty)$ und $f(-\infty)$ verschiedene Vorzeichen besitzen, und also ein Werth von x existiren muss, in welchem f sein Vorzeichen ändert, also verschwindet.

---

*) Vergl. Erlanger Berichte, Mai 1876.

**) Als Resultante zweier Functionen

$$f = a_0 x^\nu + a_1 x^{\nu-1} + \cdots,$$
$$\varphi = \alpha_0 x^\mu + \alpha_1 x^{\mu-1} + \cdots$$

wird hier und weiterhin der Ausdruck bezeichnet:

$$R_{f,\varphi} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots \\ 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}.$$

Ist aber n eine gerade Zahl, so werde, mit Gauss, eine weitere Unterscheidung eingeführt nach der Multiplicität, in welcher die Zahl 2 als Factor in n enthalten ist. Es werde angenommen, man habe bereits den erforderlichen Nachweis geführt:

1) für solche Gleichungen mit reellen Coëfficienten, deren Grad den Factor 2 in einer niedrigeren Potenz als die gegebene Gradzahl n enthält,
2) für solche Gleichungen mit reellen Coëfficienten, deren Grad kleiner als n ist und den Factor 2 in keiner höheren Potenz als n enthält.

Wir zeigen dann, dass unsere Behauptung auch für die gegebene Zahl n richtig ist, und führen damit den Beweis allgemein, indem er für ungerades n bereits erbracht ist, dann also der Reihe nach für alle Zahlen n gewonnen wird, welche die 2 einmal als Factor enthalten, etc.

Zu dem Zwecke setze ich nun

$$f(x+u) = f(x) + uf'(x) + \frac{u^2}{2}f''(x) + \cdots = f(x) + u \cdot P(x, u)$$

und bilde die Resultante der beiden Functionen:

$$f(x), \quad P(x, u)$$

die als

$$R_{f(x), P(x, u)},$$

bezeichnet werden mag*). Sie ist eine Function von u vom Grade $n(n-1)$, in welcher $u^{n(n-1)}$ den Coëfficienten 1 hat. Sie ist zugleich Resultante der Functionen

$$f(x) + uP(x, u) = f(x+u) \text{ und } P(x, u),$$

oder, da sie den Charakter einer simultanen Invariante besitzt, Resultante der Functionen:

$$f(x) \text{ und } P(x-u, u) = P(x, -u);$$

sie ist somit eine gerade Function von u, also eine ganze Function von u^2 und als solche vom Grade $\frac{n \cdot \overline{n-1}}{2}$.

Aber $\frac{n \cdot \overline{n-1}}{2}$ besitzt den Factor 2 in einer geringeren Potenz als die (gerade) Zahl n; es hat also

$$R_{f(x), P(x, u)} = 0,$$

---

*) Dies ist die erste Abweichung von Gauss. Die Resultante, wie sie im Texte gebildet wird, bestimmt, gleich Null gesetzt, schliesslich die Quadrate der Wurzeldifferenzen der vorgelegten Gleichung resp. diese Differenzen selbst. Gauss dagegen benutzt eine allgemeinere Resolvente, deren Wurzel

$$= A\alpha\beta + B(\alpha+\beta) + C \text{ (vgl. Gauss Seite 46)}$$

ist, unter α, β zwei Wurzeln von f, unter A, B, C beliebige Constante verstanden.

aufgefasst als Gleichung für u^2, oder auch als Gleichung für u, nach Voraussetzungen (1) eine Wurzel. Bezeichnen wir dieselbe durch v, so entsteht die Identität

$$R_{f(x),\, P(x,v)} = 0,$$

welche zeigt, dass $f(x)$ und $P(x, v)$ einen gemeinsamen Factor besitzen, *dass also* $f(x)$ *in Factoren zerfällbar ist.*

Aus dieser Thatsache kann nun folgendermassen einfach gefolgert werden, dass f eine Wurzel besitzt, also schliesslich in lineare Factoren zerfällbar ist*). Ich unterscheide drei Fälle.

1) Der Factor, den $f(x)$ mit $P(x, v)$ gemein hat, sei reell, $= g(x)$. Dann ist

$$f(x) = g(x) \cdot h(x),$$

wo $h(x)$ ebenfalls reell. Der Grad mindestens eines dieser Factoren enthält den Factor zwei in keiner höheren Potenz als n; dieser Factor ergiebt also, nach Voraussetzung (2), gleich Null gesetzt, eine Wurzel, und also hat auch $f(x) = 0$ eine Wurzel.

2) Der Factor, welchen $f(x)$ mit $P(x, v)$ gemein hat, sei imaginär gleich $\varphi(x)$ aber sein Grad kleiner als $\frac{n}{2}$. So enthält $f(x)$ selbstverständlich auch den conjugirt imaginären Factor $\psi(x)$. Die beiden Factoren φ, ψ können ihrerseits einen reellen Factor gemein haben; dann hat man eine Zerlegung von $f(x)$ von der Art, die wir gerade betrachtet haben. Sind aber φ, ψ relativ prim, so setze man einfach $\varphi \cdot \psi = g(x)$ und man hat wieder, da f nur auf eine Weise in Primfactoren zerlegbar ist,

$$f(x) = g(x) \cdot h(x),$$

unter g, h reelle Functionen verstanden, so dass auch dann der soeben entwickelte Schluss in Kraft tritt.

3) Der Factor, welchen $f(x)$ und $P(x, v)$ gemein haben, sei imaginär, gleich $\varphi(x)$, sein Grad gleich $\frac{n}{2}$. Bezeichnet dann wieder $\psi(x)$ die conjugirt imaginäre Function, so braucht wiederum nur der Fall erörtert zu werden, wo φ, ψ relativ prim sind und man für sie keine weitere Zerlegung in niedere Factoren kennt. Dann ist**) also

$$f(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x)$$

und nun schliesse man folgendermassen:

Da $\varphi(x)$ imaginär, so hat v einen complexen (nicht verschwindenden) Werth:

$$v = \alpha + i\beta.$$

*) Man vergl. dazu die relativ umständliche Erörterung, deren Gauss bei seinem Beweise bedarf.

**) Als Coëfficienten der höchsten Potenz von x in φ und ψ setze ich die 1 voraus.

Betrachten wir dann:

$$f(x+v) = \varphi(x+v) \cdot \psi(x+v).$$

Da $f(x+v) = f(x) + v \cdot P(x, v)$, so enthält $f(x+v)$ ebenfalls den Factor $\varphi(x)$. Mit Rücksicht auf die Voraussetzungen, denen wir φ, ψ unterwerfen durften, muss daher $\varphi(x)$ mit $\varphi(x+v)$ oder mit $\psi(x+v)$ identisch sein. Aber der Ausdruck $\varphi(x+v) - \varphi(x)$ hat als Coëfficienten von $x^{\frac{n}{2}-1}$ die Grösse $\frac{nv}{2}$, verschwindet also nicht. Daher ist:

$$\varphi(x) = \psi(x+v) = \psi(x+\alpha+i\beta).$$

Ersetzt man hierin x durch $x - \alpha - i\beta$, ändert andererseits das Verzeichen von i, wodurch φ in ψ übergeht, so entstehen die Relationen:

$$\varphi(x-\alpha-i\beta) = \psi(x),$$
$$\varphi(x+\alpha-i\beta) = \psi(x).$$

Mithin verschwindet der Ausdruck:

$$\varphi(x+\alpha-i\beta) - \varphi(x-\alpha-i\beta)$$

und also der Coëfficient von $x^{\frac{n}{2}-1}$ in ihm, d. h. $n\alpha$. Also ist $\alpha = 0$ und die Function

$$\varphi\left(x - \frac{i\beta}{2}\right) = \psi\left(x + \frac{i\beta}{2}\right)$$

ändert ihren Werth mit i nicht, hat also nur reelle Coëfficienten. Ihr Grad $\frac{n}{2}$ besitzt den Factor 2 in einer niederen Potenz als n; mithin hat die Gleichung:

$$\varphi\left(x - \frac{i\beta}{2}\right) = 0$$

nach Voraussetzung (1) eine Wurzel; ein Gleiches gilt für $\varphi(x) = 0$ und also auch für $f(x) = 0$.