

## Loxodromen und kürzeste Linien auf dem Kreisring.

Von **Anton Puchta** in Czernowitz.

A. Loxodrome. Durch Rotation des Kreises, dessen Gleichung  $(x - a)^2 + z^2 = b^2$  um die  $z$ -Achse entsteht bekanntlich die als Kreisring oder Wulst bezeichnete Fläche

$$(x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - b^2) + 4a^2 z^2 = 4a^2 b^2.$$

Die letzte Gleichung ist, wie sehr leicht einzusehen, äquivalent dem System

$$\left. \begin{aligned} x &= (a - b \cos u) \cos v \\ y &= (a - b \cos u) \sin v \\ z &= b \sin u \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

In (1) bezeichnen  $v = \text{Cst}$  und  $u = \text{Cst}$  Kreise, die ich als Meridiane, resp. Parallelkreise trenne. Die ersteren werden durch die Ebenen  $y = x \tan v$ , die letzteren durch die Ebenen  $z = b \sin u$  aus dem Wulste herausgeschnitten. Irgend eine andere Curve auf dem Ringe ist gegeben durch eine Gleichung

$$u = \varphi(v) \dots \quad (2)$$

Sucht man die Curve (2), welche sämtliche Parallelkreise unter einem Winkel  $\alpha$  — also die Meridiane unter einem Winkel  $\frac{\pi}{2} - \alpha$  — schneidet, so ergibt sich hierfür die Differentialgleichung

$$\cos \alpha = \frac{a - b \cos u}{\sqrt{b^2 \left(\frac{du}{dv}\right)^2 + (a - b \cos u)^2}} \quad (3)$$

oder integriert

$$\text{tang } \frac{u}{2} = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \text{ tang } \left\{ \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2b} v \text{ tang } \alpha + C \right\} \quad (4)$$

Da der Ring durch eine beliebige Rotation um die  $z$ -Achse in sich übergeht — analytisch ausgedrückt tritt  $v + C$  an Stelle von  $v$  ein — so kann in (4) ohne weiteres  $C = 0$  gesetzt werden.

Die Annahme  $C = 0$  besagt also, dass ich an Stelle sämtlicher parallelen Curven nur jene herausfasse, welche durch den Punkt  $x = a - b$ ,  $y = z = 0$   $A$  hindurchgeht. Es erhellt sofort, dass die Meridiane und Parallelkreise specielle Loxodrome sind, für  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , resp.  $\alpha = 0$ . Am interessantesten sind wohl jene Loxodrome, welche sich schließen, also den Ring in gewisser Weise umwinden. In Bezug auf das Umwinden hat man zwei Arten, und natürlich ihre Combination zu unterscheiden. Nämlich der Ring kann umwunden werden im Sinne der Meridiane, d. h. indem alle Parallelkreise einmal getroffen werden — ich werde eine solche Umwindung als  $U_v$  bezeichnen oder im Sinne der Parallelkreise, indem alle Meridiane einmal getroffen werden, ich bezeichne eine solche Umwindung mit  $U_u$ . Die allgemeinste Umwindung ist natürlich dann als Combination beider Arten zu bezeichnen als  $m U_v + n U_u$ .

Wie lautet nun die Gleichung der Loxodrome, die durch den Punkt  $A$  geht und die in jedem der beiden Sinne einmal den Ring umwindet? Offenbar passiert sie außer  $A$  auch den Punkt  $B$ , d. h.  $x = -a - b$ ,  $y = z = 0$ .  $B$ , d. h. man hat aus (4) für  $C = 0$   $v = \pi$ ,  $u = \pi$ , letzteres, da in diesem Punkte  $z = b \sin u$  das erstemal wieder verschwinden soll,  $\tan \alpha$  zu berechnen und findet also  $\tan \alpha = \pm \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ , wobei den beiden Vorzeichen entgegengesetzt gewundene Loxodrome entsprechen, oder die Curve  $1 \cdot U_v + 1 \cdot U_u$  hat nach (4) die Gleichung:

$$\tan \frac{u}{2} = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \tan \frac{v}{2}.$$

In genau derselben Weise erkennt man, dass die Curve  $2 U_v + 1 \cdot U_u$  die Gleichung hat:

$$\tan \frac{u}{2} = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \tan v, \quad \text{wobei} \quad \tan \alpha = \frac{2b}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Allgemein: Die Gleichung der Loxodrome  $n U_v + 1 \cdot U_u$  lautet:

$$\tan \frac{u}{2} = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \tan \frac{nv}{2} \dots (5) \quad \text{mit} \quad \tan \alpha = \frac{nb}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

In (5) ist  $n$  eine ganze Zahl und ergibt sich nach bekannter Formel für das Bogenelement  $ds$  der Wert  $\sqrt{b^2 + \frac{a^2 - b^2}{n^2}} \cdot du$ ,

und daher für die Länge der ganzen Curve, da  $u$  von 0 bis  $n \cdot 2\pi$  wächst:  $2n\pi \sqrt{b^2 + \frac{a^2 - b^2}{n^2}}$ . Dies Resultat war vorauszusehen, indem sich eine Umwindung hierbei asymptotisch einem Meridian nähert, also für  $n = \infty$  die Länge hat  $2b\pi$ .

Ebenso ergibt sich, dass die Loxodrome vom Typus  $m \cdot U_v + n \cdot U_u$  die Gleichung hat:

$$\tan \frac{u}{2} = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \tan \frac{mv}{2n} \quad (8) \text{ mit } \tan \alpha = \frac{bm}{n\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Die Gestalt dieser Curven kann unmittelbar angegeben werden, denn denkt man sich dieselben auf die  $x\hat{y}$ -Ebene projiziert, so erhält man, wenn  $OA$  der Radius des kleinsten,  $OB$  der Radius des größten Parallelkreises ist und die Curventheile mit  $+z$  stark, die mit negativem  $z$  punktiert gezeichnet werden, für  $m=3$   $n=1$  die Figur I, für  $m=1$   $n=2$  die Figur II und für  $m=3$   $n=2$  die Figur III.

Fig. 1.

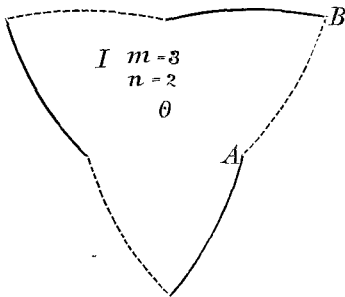


Fig. 2.

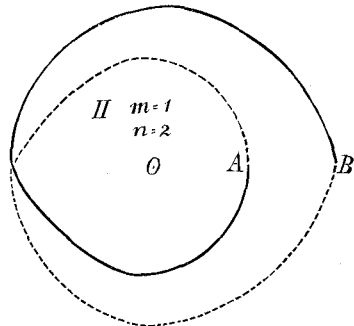
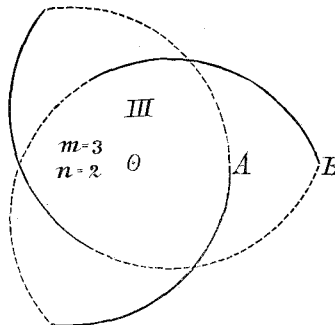


Fig. 3.



Man erkennt aus (5) oder (8) sofort unter Berücksichtigung von (1), dass die Substitution von  $-v$  statt  $+v$  äquivalent ist

für die Loxodrome der Substitution von  $+x$ ,  $-y$ ,  $-z$  an Stelle von  $+x$ ,  $+y$ ,  $+z$ . Da ferner der Ring durch eine beliebige Rotation um die  $z$ -Achse in sich übergeht, so ergibt sich in Bezug auf die Loxodrome (7), d. h. den Typus  $n \cdot U_v + 1 \cdot U_u$  der Satz:

„Die Loxodromen (5) übergehen durch  $2n$ -Drehungen in sich, oder sind in der Terminologie F. Kleins („Ikosaëder und die Gleichung 5. Grades“) vom Doppelpyramiden-Typus.“

Zunächst nämlich hat man  $n-1$ -Drehungen um die  $z$ -Achse, durch die Winkel  $\frac{2\pi}{n}$ ,  $2 \cdot \frac{2\pi}{n}$ ,  $3 \cdot \frac{2\pi}{n} \dots (n-1) \frac{2\pi}{n}$ , die die Curve in sich überführen — also eine Substitution der Periode  $n$  — und hierzu treten  $n$ -Drehungen um die Geraden  $z=0$ ,  $y=x \tan \frac{m\pi}{n}$  für  $m=0, 1, 2, \dots n-1$  durch die Winkel  $\pi$  — also der Periode 2. Also mit Hinzunahme der Identität in der That  $2n$  Substitutionen. Ich behaupte ferner:

„Alle Loxodrome (7) oder (8) sind algebraische Curven, und zwar (8) von der Ordnung  $n(2m+2)$  — also (7) von der Ordnung  $2n+2$  —, welche sich rational durch einen Parameter  $t$  darstellen lassen.“

Beweis: Ich setze für die Curve (8) — also  $m U_v + n U_u$  —  $\tan \frac{v}{2n} = t$ , dann wird, unter Beachtung der bekannten Formeln

$$\tan \alpha = x, \quad \tan l \alpha = \frac{x(l_1 - l_3 x^2 + l_5 x^4 - \dots)}{1 - l_2 x^2 + l_4 x^4 - \dots},$$

wobei  $l_k$  der  $k^{\text{te}}$  Binomialcoefficient ist für die  $l^{\text{te}}$  Potenz,  $\tan \frac{v}{2}$  eine rationale gebrochene Function von  $t$ , des Grades  $n$ , also  $\tan \frac{u}{2}$  nach (8) eine in  $t$  rationale gebrochene Function des Grades  $mn$ , daher  $\cos u$  und  $\sin u$  vom Grade  $2mn$  und da  $\cos v$  und  $\sin v$  in  $t$  rational vom Grade  $2n$  ist, so ist in (1) für die Loxodrome (8):  $x$  rational in  $t$  vom Grade  $2mn+2n$ , ebenso  $y$ , und  $z$  vom Grade  $2mn$ . Combiniert man also (1) mit der Gleichung  $Ax + By + Cz + D = 0$ , so gibt dies für  $t$  eine Gleichung des Grades  $2mn+2n$ , d. h. die Loxodrome ist eine Raumeurve der Ordnung  $2mn+2n$  w. b. w. s.

Es ist selbstverständlich, dass es neben den bisher betrachteten Loxodromen, welche algebraische Curven waren, auch transcendente gibt; in der That braucht man in (7) nur für  $n$  eine irrationale Zahl, z. B.  $\sqrt{2}$  setzen, um die Gleichung einer solchen Loxodrome, welche eine transcendente Curve ist, zu gewinnen.

## B. Kürzeste Linien auf dem Kreisring.

Aus dem System (1) ergibt sich für die Normale des Ringes im Punkte  $u, v$  oder  $xyz$ , wenn  $\varrho$  den Abstand eines beliebigen Punktes der Normale von ihrem Fußpunkt bezeichnet, das Gleichungssystem:

$$\xi = x + \varrho \cos u \cos v, \quad \eta = y + \varrho \sin v \cos u, \quad \zeta = z - \varrho \sin u \quad (9)$$

Es sei nun  $u = \psi(v)$  eine beliebige Curve des Ringes, dann hat man bekanntlich für ihre Schmiegungebene im Punkte  $u, v$  die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \xi - x & \eta - y & \zeta - z \\ \frac{dx}{dv} & \frac{dy}{dv} & \frac{dz}{dv} \\ \frac{d^2x}{dv^2} & \frac{d^2y}{dv^2} & \frac{d^2z}{dv^2} \end{vmatrix} = 0 \quad (10)$$

worin zu setzen ist:

$$\frac{dx}{dv} = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{du}{dv} + \frac{\partial x}{\partial v} \text{ etc. und } \frac{du}{dv} = \psi'(v) \text{ ist.}$$

Nun sind die kürzesten Linien auf einer beliebigen Fläche bekanntlich dadurch charakterisiert, dass ihre Schmiegungebene immer durch die Flächennormale geht. Ersetzt man daher in (10)  $\xi - x, \eta - y, \zeta - z$  durch ihre Werte aus (9) und berechnet  $\frac{dx}{dv}$  etc. nach (1), so übergeht (10) in die Differentialgleichung der kürzesten Linien auf dem Ring, und zwar erhält man

$$\frac{d^2u}{dv^2} - \frac{2b \sin u}{a - b \cos u} \left( \frac{du}{dv} \right)^2 - \frac{1}{b} (a - b \cos u) \sin u = 0 \dots (K)$$

Diese Differentialgleichung kann nun auf unendlich viele Arten — natürlich mit demselben Resultat — integriert werden. Am einfachsten gestaltet sich die Rechnung, wenn man setzt  $a - b \cos u = x, \frac{du}{dv} = \varphi(x)$ ; dann folgt:  $\frac{d^2u}{dv^2} = \varphi(x) \frac{d\varphi(x)}{dx} \cdot \sin u$  und (K) lautet jetzt

$$\varphi(x) \frac{d\varphi(x)}{dx} - \frac{2}{x} [\varphi(x)]^2 = \frac{x}{b^2} \text{ oder } \varphi(x) = \sqrt{y} \text{ gesetzt:}$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x} y = \frac{x}{b^2} \dots (K).$$

Die bekannten Regeln geben jetzt sofort

$$y = x^2 \left[ C x^2 - \frac{1}{b^2} \right]$$

und daher folgt durch Substitution:

$$\frac{du}{dv} = \varphi(u) = (a - b \cos u) \sqrt{C(a - b \cos u) - \frac{1}{l^2}}.$$

Demnach gibt eine einfache Quadratur schließlich:

$$v = \int \frac{du}{(a - b \cos u) \sqrt{C(a - b \cos u)^2 - \frac{1}{l^2}}} + C_1 \dots (L).$$

(L) also ist das allgemeine Integral von  $K$ , und dabei sind  $C$  und  $C_1$  die beiden Integrationsconstanten. Daher hat man das Resultat:

„Sämtliche kürzeste Linien auf dem Ringe (1) sind durch (1) gegeben, wenn hierin für  $v$  der Wert aus (L) substituiert wird.“

Um (K) zu integrieren, hätte man z. B. auch setzen können  $\tan u = x$  oder  $\sin u = x$  etc., nur wäre die Zwischenrechnung etwas complicierter. Das Integral in (L) ist bekanntlich ein elliptisches dritter Gattung, wie z. B.  $\cos u = \frac{1-x^2}{1+x^2}$  sofort ergibt. Ehe ich auf (L) selbst eingehe, bemerke ich, dass aus (K) folgt, dass alle Parallelkreise  $u = \beta$ , worin  $\beta$  eine Wurzel der Gleichungen  $a - b \cos u = 0$   $\sin u = 0$  ist, ebenfalls kürzeste Linien, und zwar singuläre sind. Für die zwei Kreise  $u = 0$ ,  $u = \pi$  erhellt dies schon aus Gründen der Symmetrie. Für die Gleichung  $a - b \cos u = 0$  ist  $\beta$ , falls  $a > b$  ist, imaginär, für  $a < b$  aber reell. Im letzten Fall durchdringt der Ring sich selbst längs der zwei Parallelkreise  $z = \pm \sqrt{b^2 - a^2}$ ; also auch im Falle  $a > b$  hat der Ring außer den zwei reellen Parallelkreisen  $u = 0$ ,  $u = \pi$  noch den dritten  $z = \pm \sqrt{b^2 - a^2}$  zu kürzesten Linien, nur ist der letzte imaginär.

Da der Ring durch eine beliebige Drehung um die  $z$ -Achse, d. h. die Substitution  $v = v' + \alpha$  für beliebiges  $\alpha$  in sich übergeht, so kann man einen der zwei Punkte, welche durch eine kürzeste Linie verbunden werden sollen, im Meridian  $v = 0$  annehmen, d. h. in (L)  $C_1 = 0$  setzen,  $C$  ist dann durch den zweiten gegebenen Punkt der kürzesten Linie bestimmt. Für  $C = \infty$  gibt (L)  $v = C_1$ , d. h. sämtliche Meridiane. Es mögen die beiden Fixpunkte durch  $v_0, u_0, v_1, u_1$  gegeben sein, sie sollen  $P_0$  und  $P_1$  heißen und es soll der erste im Meridian  $v = 0 = v_0$  liegen und  $u_1 > u_0$  sein. Denkt man sich dann in (1) für  $v$  den Wert aus (L) eingesetzt —  $C_1$  ist jetzt gleich Null — und  $u$  von  $u_0$  bis  $u_1$  zu nehmen, so bewegt sich der Punkt auf einer kürzesten Linie von  $P_0$  nach  $P_1$ . Aus (L) ergibt sich aber folgende fundamentale Bemerkung, wenn wir uns  $C$  fixiert

denken: Da die Quadratwurzel in  $(L)$  sowohl positiv als negativ genommen werden kann und der Ausdruck rechts beim Übergange des  $u$  von  $u_0$  zu  $u_1$ , um eine continuierliche Folge von Werten des  $v$  zu bilden, das Vorzeichen nicht zu ändern braucht, so gibt es für jeden bestimmten Wert von  $C$  zwei kürzeste Linien, die von  $P_0$  nach  $P_1$  führen, und zwar ist im allgemeinen nicht die eine der beiden kürzesten etwa eine Ergänzung der anderen, obgleich dies im speciellen Falle sein kann, z. B. wenn  $P_0$  und  $P_1$  auf dem Parallelkreis  $u = 0$  liegen, sondern es folgt aus  $(L)$ , dass die zwei kürzesten Linien zwischen  $P_0$  und  $P_1$  den Koordinatenanfangspunkt in entgegengesetztem Sinne umkreisen, wenn nicht  $C = \infty$  ist, wo man einen Meridian hat. Man könnte hierfür den experimentellen Nachweis liefern, indem man auf einer möglichst glatten Ringfläche, und zwar auf der Innenseite in  $P_0$  und  $P_1$  einen biegsamen und dehnbaren Faden fixiert, welcher geschlossen ist und den Koordinatenanfangspunkt einmal umkreist, die beiden Theile desselben würden dann nach einem bekannten Satze Bögen der erwähnten zwei kürzesten Linien angeben, für einen bestimmten Wert des  $C$ . Aus der Gleichung  $(L)$  folgt aber weiter, da sie für  $C - C_1 = 0$  angenommen — transcendent ist, das wichtige Resultat: „Auf der Ringfläche (1) gibt es zwischen zwei Fixpunkten  $P_0$  und  $P_1$  im allgemeinen unendlich viele kürzeste Linien“, die sämmtlich in dem Typus  $mU_v + nU_u$  enthalten sind und experimentell wieder durch einen Faden nachgewiesen werden könnten, der den Ring, ehe er in die Endlage übergeht, in den früher angegebenen zwei Umwindungsarten umschlingt. Jedes specielle Wertsystem von  $m$  und  $n$  fixiert daher eine specielle kürzeste Linie oder genauer gesprochen zwei solche.

Um absolut jeden Zweifel an der Richtigkeit der Behauptung auszuschließen, denke man sich zwei Punkte  $P_0$  und  $P_1$  auf dem Meridian  $v = 0$ ; die eine kürzeste Linie ist dann offenbar der Meridian und die zweite hat eine der Curven in Figur II ähnliche Gestalt, dabei verläuft der zwischen  $P_0$  und  $P_1$  gespannte dehnbare und biegsame Faden das erstemal auf der Außenseite, das zweitemal auf der Innenseite des Ringes. Es ist selbstverständlich, dass, von speciellen kürzesten Linien abgesehen, dieselben im allgemeinen transcendent sind, wie dies aus  $(L)$  folgt und also jede sich unendlich oft um den Ring windet, dass man diese unendlich vielen kürzesten Linien zwischen zwei Fixpunkten  $P_0$  und  $P_1$  aber von einander trennen kann, und zwar nach den Zahlen  $m$  und  $n$ , welche angeben, wieviele Windungen, sei es  $U_v$  sei es  $U_u$ , eine specielle kürzeste Linie zwischen  $P_0$  und  $P_1$  besitzt. Genau in derselben Weise kann man die kürzesten Linien auf einem Ringe finden, der einen elliptischen Querschnitt zum Meridian hat, und zwar scheint

mir der Grund hierfür in der Gleichheit des Geschlechtes beider Flächen zu liegen. Ungleich schwieriger dürfte die Auffindung der kürzesten Linien auf den Flächen von nächst höherem Geschlechte sein, ich meine einen Doppelring, da schon die Aufstellung der Gleichung eines solchen Doppelringes, wobei natürlich Selbstdurchdringungscurven ausgeschlossen sind, einige Schwierigkeit zu bieten scheint. Weniger schwierig scheint es dagegen zu sein, einen allgemeinen Satz anzugeben, der die Anzahl der kürzesten Linien zwischen zwei Fixpunkten abhängig macht vom Geschlecht der Fläche, und damit dürfte ein wichtiger Punkt für die Integration der Differentialgleichung der kürzesten Linien auf solchen Flächen von höherem Geschlecht gegeben sein. Hierüber vielleicht später. Ich bemerke noch, dass  $(L)$  für  $C = 0$  eine kürzeste Linie gibt, die zugleich eine Loxodrome ist.

Czernowitz, Beginn December 1889.

---