10. *Zwei Wärmeleitungsprobleme;* *von O. Chwolson.*

Actinometrische Studien führten mich zu den folgenden beiden Problemen, deren Lösung vielleicht auch sonst noch practische Verwerthung finden dürfte.

I. Problem. Stationärer Wärmezustand eines geraden Kreiscylinders, dessen eine Grundfläche bestrahlt wird. Es seien: δ die Länge des Cylinders, R der Radius des Querschnitts (der Grundflächen), q die Wärmemenge, welche von der Flächeneinheit der Grundfläche $x = 0$ in der Zeiteinheit absorbirt wird, k der Coefficient der inneren Wärmeleitung, h der Coefficient der äusseren Wärmeleitung an der bestrahlten Grundfläche; $p = q/k$; $b = h/k$; h_1 der Coefficient der äusseren Wärmeleitung an der Seitenfläche und an der nichtbestrahlten Grundfläche ($x = \delta$); $b_1 = h_1/k$. Die Temperatur des äusseren Raumes sei gleich Null. Die stationäre Temperatur V eines Punctes, der sich in der Entfernung x von der bestrahlten Grundfläche und in der Entfernung r von der Axe des Cylinders befindet, genügt der Gleichung:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} = 0 \tag{1}$$

Die Grenzbedingungen lauten

$$\left\{\begin{aligned} p &= -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x=0} + b\,(V)_{x=0} \\ -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x=\delta} &= b_1\,(V)_{x=\delta} \\ -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r=R} &= b_1\,(V)_{r=R} \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Der Gleichung (1) genügt

$$V = \sum_i \left[\alpha_i e^{-m_i x} + \beta_i e^{-m_i x}\right] \Upsilon_0(m_i r), \tag{3}$$

wo Υ_0 die Bessel'sche Function vom Grade Null ist. Die dritte

Bedingung giebt, wenn man $m_i = z_i / R$ und $b_1 R = c$ setzt, die Gleichung

$$(4) \qquad z_i\, \Upsilon_1(z_i) = c\, \Upsilon_0(z_i),$$

wo Υ_1 die Bessel'sche Function vom Grade eins ist. Für einen Metallcylinder von nicht exorbitanter Dicke ist c ein kleiner Bruch; wir nehmen die Grammkalorie, das Centimeter und die Minute als Einheiten. Ein Kupfercylinder (h_1 etwa 0,03, k etwa 30, also $b_1 = 0{,}001$) müsste eine Dicke von 2 dm haben ($R = 10$), damit $c = 0{,}01$ würde.

Ich habe die Wurzeln der Gleichung (4) vor längerer Zeit in einer anderen Arbeit[1]) untersucht und gezeigt, dass für die *erste* Wurzel ein sehr angenäherter Werth vermittelst der Formel

$$(5) \qquad z_1 = \sqrt{\frac{8c}{4+c}}$$

gefunden werden kann; der zugehörige Werth $\Upsilon_0(z_1)$ ist gleich $16/(4+c)^2$. Die ferneren Wurzeln der Gleichung (4) sind bei Metallcylindern in sehr geringer Abhängigkeit von c und zwar kann man setzen[2]) $z_2 = 3{,}832$, $z_3 = 7{,}016$, $z_4 = 10{,}174$, $z_5 = 13{,}324$, $z_6 = 16{,}471$, $z_7 = 19{,}616$. Für $c = 0{,}01$ ist $z_1 = 0{,}141245$.

Die zweite der Gleichungen (2) giebt für die α_i und β_i die Bedingung

$$(6) \qquad (b_1 - m_i)\, e^{-m_i \delta} \alpha_i + (b_1 + m_i)\, e^{-m_i \delta} \beta_i = 0.$$

Um die erste der Gleichungen (2) zu benutzen, muss man die Constante p in eine Reihe nach den $\Upsilon_0(m_i r)$ zerlegen, was sich nach bekannten Methoden[3]) leicht ausführen lässt. Man erhält so die zweite Bedingung:

$$(7) \qquad (b + m_i)\, \alpha_i + (b - m_i)\, \beta_i = \frac{2cp}{R^2 (m_i^2 + b_1^2)\, \Upsilon_0(m_i R)}$$

Werden α_i und β_i aus (6) und (7) bestimmt und in (3) eingesetzt, so erhält man für V endgültig

$$(8) \qquad V = \frac{2cp}{R^2} \sum_i \frac{F_i(x)\, \Upsilon_0(m_i r)}{M_i},$$

wo

1) O. Chwolson, Mémoires de l'Acad. Imp. des Sc. de St. Petersb. (7) **37**. Nr. 12. Cap. III. p. 21—25.

2) l. c. p. 22.

3) l. c. Formeln (53), (56) und (67).

$$(9)\qquad F_i(x) = (m_i + b_1)\, e^{m_i(\delta - x)} + (m_i - b_1)\, e^{-m_i(\delta - x)}$$

und

$$(10)\qquad \begin{cases} M_i = (b_1^2 + m_i^2)\, T_0(m_i R) \Big\{ (m_i + b)(m_i + b_1)\, e^{m_i \delta} - \\ \qquad - (m_i - b)(m_i - b_1)\, e^{-m\delta} \Big\}. \end{cases}$$

Für den *allgemeineren Fall*, dass die nicht bestrahlte Grundfläche eine andere äussere Wärmeleitung (h_2) besitzt, als die Seitenfläche (h_1), würde sich V nur wenig ändern. Statt b_1 würde $b_2 = h_2/k$ stehen: erstens in $F_i(x)$, zweitens innerhalb der grossen Klammern in M_i; b_1 würde verbleiben im ersten Factor von M_i und im Factor $c = b_1 R$.

Für eine unendliche bestrahlte Platte ($R = \infty$) von der Dicke δ lässt sich V als lineare Function von x sehr leicht bestimmen und zwar ist

$$(11)\qquad V = p\,\frac{1 + b_1(\delta - x)}{b + b_1 + b\, b_1\, \delta}.$$

In der That geht (8) für $R = \infty$ in (9) über.

Für Metallcylinder wird m_2 stets gross sein gegen m_1, da, wie wir oben sahen, z_2 gross ist gegen z_1. Infolgedessen sind in (8) alle Glieder (die Vorzeichen derselben wechseln) verschwindend klein gegen das erste. Wir können also

$$(12)\qquad V = \frac{2\, c\, p\, F_1(x)\, T_0(m_1 r)}{R^2 M_1}$$

setzen, wo $F_1(x)$ und M_1 aus (9) und (10) gefunden werden. Wir haben in diesem Falle nur die eine Wurzel $z_1 = m_1 R$ mit Hülfe von (5) zu berechnen; der Werth von $T_0(m_1 R) = T_0(z_1)$ ist oben ebenfalls angegeben.

II. *Problem. Variabeler Wärmezustand eines unendlich langen Drahtes, der an einen Körper M gelöthet ist, dessen Temperatur* V_0 *eine gegebene Function* $f(t)$ *der Zeit ist, wobei* $f(o) = 0$ *sein soll.* Es sei ϱ der Radius des Drahtes, $\varkappa$ der Coefficient der inneren. h der der äusseren Wärmeleitung, β die Dichte, γ die specifische Wärme des Drahtes; V die Temperatur in einem Querschnitt des Drahtes, der sich in der Entfernung x vom Körper M befindet; $Q\,dt$ die Wärmemenge, die in der Zeit dt aus dem Körper M in den Draht fiiesst, also Q die Intensität des übergehenden Wärmestromes. Setzen wir $a^2 = \varkappa/\beta\gamma$ und $b = 2h/\varrho\beta\gamma$, so muss V der Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - b V \tag{13}$$

genügen.[1] Die Grenzbedingungen lauten

$$(V)_{t=0} = 0 \qquad (V)_{x=0} = V_0 = f(t). \tag{14}$$

Ferner ist

$$Q = -\pi \varrho^2 \varkappa \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x=0}. \tag{14}$$

Setzen wir mit Poisson $V = U e^{-bt}$, so erhalten wir für U Gleichungen, deren Lösung Riemann[2]) gegeben hat. Für V finden wir den Ausdruck

$$V = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} f\left(t - \frac{x^2}{4a^2\gamma^2}\right) e^{-\frac{b x^2}{4 a^2 \gamma^2} - \gamma^2} d\gamma. \tag{16}$$

Führen wir die neue Variable $\lambda = x / 2 a \gamma$ ein und beachten wir, dass $f(o) = 0$ ist, so wird

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x=0} = -\frac{2}{a\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\sqrt{t}} e^{-b\lambda^2} \{ b f(t - \lambda^2) + f'(t - \lambda^2)\} d\lambda. \tag{17}$$

Diese Formel gibt für jede Function $f(t)$ mit Hülfe der Formel (15) die Intensität Q des aus dem Körper in den Draht übergehenden Wärmestromes.

Bezeichnen wir mit H die fictive äussere Wärmeleitung, durch welche die Anwesenheit des Drahtes ersetzt gedacht werden kann, so ist $Q = \pi \varrho^2 V_0 H$ und folglich

$$H = -\frac{\varkappa}{V_0} \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x=0}. \tag{18}$$

Bei der Ausrechnung von (17) wird man wohl meist auf das Kramp'sche Integral stossen. Setzen wir

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^k e^{-\lambda^2} d\lambda = \omega(k). \tag{19}$$

---

1) Poisson, Théorie mathematique de la chaleur. Paris 1835. p. 264, Formel (19).

2) Riemann, Partielle Differentialgleichungen. p. 131. Braunschweig 1869.

Die ausführlichste Tabelle dieses Integrals ist von A. Markoff[1]) berechnet. Am Ende der unten citirten Schrift sind die Werthe von $\omega(k)$ angegeben (p. 91—98).

Es sei beispielsweise

$$V_0 = f(t) = A(1 - e^{-mt}). \tag{20}$$

Aus (17) erhält man

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x=0} = -A\sqrt{\frac{2h}{\varrho\varkappa}}\left\{\omega(\sqrt{bt}) - \sqrt{1-\frac{m}{b}}\,e^{-mt}\omega\left(\sqrt{(b-m)t}\right)\right\}. \tag{21}$$

(15) und (18) ergeben dann Q und H, wenn man für V_0 noch (20) einsetzt.

Der Draht sei aus Kupfer und 1 mm dick; es ist

$$\varrho = 0{,}05, \quad \varkappa = 30, \quad h = 0{,}03, \quad \beta = 8{,}9, \quad \gamma = 0{,}094,$$

also $b = 1{,}44$; es sei ferner $m = 0{,}3$ (die Einheiten sind Grammcalorie, Centimeter, Minute). Der Ausdruck in den Klammern in (21) wird

$$\omega(1{,}2\sqrt{t}) - 0{,}886\,e^{-0{,}3t}\omega(1{,}063\sqrt{t})$$

und lässt sich leicht für jedes t mit Hülfe der oben erwähnten Tafeln berechnen. Es ist

$t =$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	2	3	4	∞ Min.
$\frac{H}{h} =$	804	346	298	264	228	216	210	200.

St. Petersburg, November 1893.

1) A. Markoff, Table des Valeurs de l'Integrale $\int_k^\infty e^{-t^2}dt$. St. Petersburg 1888.