

Sulla razionalità delle involuzioni piane.*)

Nota di

GUIDO CASTELNUOVO a Roma.

Se le coordinate del punto generico di una superficie F si possono rappresentare come funzioni razionali di due parametri, vale a dire (introducendo coordinate omogenee) se tra un punto (x_1, x_2, x_3, x_4) di F ed un punto (α, β, γ) di un piano passano quattro relazioni del tipo

$$(1) \quad \varrho x_i = f_i(\alpha, \beta, \gamma) \quad (i=1, 2, 3, 4)$$

dove le f sono forme di uno stesso grado, allora ad un punto generico (α, β, γ) del piano corrisponde *un solo* punto x di F . Viceversa ad un punto x di F corrispondono uno o più punti del piano, secondo che le quattro equazioni

$$(2) \quad f_i(\alpha, \beta, \gamma) = \varrho f_i(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$$

non ammettono altre soluzioni oltre alla

$$\alpha : \beta : \gamma = \alpha_0 : \beta_0 : \gamma_0,$$

oppure ammettono altre soluzioni. Nel primo caso tra i punti della superficie ed i punti del piano passa una corrispondenza algebrica *biunivoca*, la superficie è rappresentabile punto per punto sopra un piano, è (come diremo brevemente) *razionale*. Nel secondo caso, detto $n \geq 2$ il numero delle soluzioni (α, β, γ) delle equazioni (2) (compresa la soluzione $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$), si ottengono al variare di $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0) \propto^2$ gruppi di n punti di un piano, tali che un punto generico del piano appartiene ad un solo gruppo; se diamo il nome di *involuzione piana d'ordine n* al sistema degli \propto^2 gruppi, possiamo dire che la superficie F è rappresentabile biunivocamente sui gruppi di una involuzione piana.

Ora si può domandare: *Sarà possibile, anche in questo secondo caso, di stabilire una corrispondenza algebrica biunivoca fra i punti di F e i punti di un piano?* o in altre parole: *si potranno rappresentare*

*) Un estratto di questa Nota trovasi inserito, sotto lo stesso titolo, nei Rendic. dell' Accad. dei Lincei, ottobre 1893.

(elemento per elemento) i gruppi di una involuzione piana d'ordine n sui punti di un piano? La questione qui proposta ammette una risposta affermativa; ciò mi propongo di dimostrare nel presente lavoro.

Le involuzioni piane, che finora i geometri hanno considerato sotto tale aspetto, sono (quasi esclusivamente) quelle di ordine $n = 2$; esse offrono subito un mezzo di studio che non si applica nelle involuzioni superiori. Infatti una involuzione di secondo ordine nel piano (o in qualsiasi altra forma algebrica) definisce una corrispondenza birazionale involutoria che muta ogni punto nel punto coniugato; sicchè la teoria delle corrispondenze birazionali dà gli elementi per lo studio di quelle involuzioni.

Partendo da questo concetto il Sig. Bertini in un lavoro importante*) si è proposto di determinare quali siano i tipi irriducibili di involuzioni piane di secondo ordine, quei tipi cioè che non possono dedursi l'uno dall'altro mediante trasformazioni birazionali, ma che mediante tali trasformazioni possono condurre ad ogni involuzione di secondo ordine. Il Bertini trova che i nominati tipi sono i quattro seguenti.

a) *Omologia involutoria*;

b) *Involuzione proveniente da una trasformazione piana involutoria di Jonquières* (che lascia inalterate, o accoppia, le rette di un determinato fascio);

c) *Involuzione costituita dalle coppie di intersezioni delle cubiche passanti per sette punti fissi*;

d) *Involuzione determinata dalle coppie di punti che presentano una sola condizione alle curve del settimo ordine con otto punti doppi fissi*.

I tipi qui riuniti, dànno, come si vede facilmente**), involuzioni razionali; quindi per le involuzioni di coppie di punti, la questione a cui la presente Nota è dedicata, dovrebbe ritenersi come risolta, se i risultati del Sig. Bertini non fossero stati ottenuti, come lo stesso autore avverte, sotto restrizioni, che sarebbe troppo lungo l'enunciar qui. Ora quelle restrizioni possono forse esser tolte con qualche modificazione ai procedimenti del Sig. Bertini; ma il ragionamento si complicherebbe certo in guisa da render consigliabile la ricerca di un metodo più semplice.

*) *Ricerche sulle trasformazioni univoche involutorie nel piano* (Annali di Matem. Serie II^a, Tomo 8^o, 1877); si veda pure un secondo lavoro dello stesso A. *Sulle trasformazioni univoche piane* (Rendic. Istituto Lombardo, 1880).

**) Nöther, *Ueber die ein-zweideutigen Ebenentransformationen* (Sitzungsb. d. phys. med. Societät, Erlangen 1878); Lüroth, *Rationale Flächen und involutorische Transformationen* (Freiburg 1889); Bertini, *Deduzione delle trasformazioni* ... (Rend. Ist. Lomb. 1889).

Un metodo più semplice e più generale (perchè si applica alle trasformazioni birazionali cicliche d'indice anche superiore a 2) fu proposto qualche anno dopo (1885) dal Sig. Kantor*); per la sua importanza credo opportuno di darne qui un cenno. A base della ricerca sta un teorema fondamentale nella *geometria sul piano* (geometria il cui gruppo fondamentale di operazioni è il gruppo delle trasformazioni Cremoniane): *Se una trasformazione Cremoniana tra due piani muta la curva C del primo piano nella curva C_1 del secondo piano, la trasformazione muta il sistema aggiunto puro a C nel sistema aggiunto puro a C_1* ; dove per *sistema aggiunto puro* ad una curva C di ordine n e genere $p > 1$, si deve intendere il sistema lineare ∞^{p-1} delle curve di ordine $n-3$ aggiunte a C , dalle quali si sia staccata (se esiste) ogni curva che formi parte di tutte le aggiunte stesse, (quando siano riduttibili)**). Data ora una trasformazione birazionale ciclica del piano, si costruisca (ciò è possibile in infiniti modi) un sistema lineare di curve $|C|$, il quale sia mutato in sè dalla trasformazione. Allora la trasformazione dovrà mutare in sè anche il sistema $|C'|$ aggiunto puro a $|C|$, poi il sistema $|C''|$ aggiunto puro a $|C'|$, e così via. Siccome gli ordini dei successivi aggiunti vanno decrescendo, l'operazione avrà un termine. Valendosi degli ultimi sistemi a cui si arriva, si riesce a dimostrare che:

Ogni trasformazione birazionale ciclica del piano può sempre ridursi (mediante trasformazioni birazionali) ad una trasformazione la quale muti in sè uno dei seguenti sistemi lineari:

- a) *la rete delle rette (collineazione);*
- b) *un fascio di rette (trasformazione di Jonquières);*

*) *Sur une théorie des courbes et des surfaces admettant des correspondances univoques* (Comptes rendus de l'Acad. d. Sciences, février 1885).

**) Il teorema si dimostra nel modo più semplice ricorrendo alle note formole che legano i caratteri di una curva algebrica ai caratteri della curva trasformata mediante una trasformazione Cremoniana; si veda a questo proposito il § 31 della Nota del Sig. Nöther, *Rationale Ausführung der Operationen* . . . (Math. Ann. 23, 1883). Alcune applicazioni di quel teorema alla geometria sul piano (diverse dalle applicazioni del Kantor) si trovano nelle mie *Ricerche generali sopra i sistemi lineari* (Memorie dell' Accad. d. Scienze di Torino, serie II, tomo 42; 1891), nelle quali accenno di volo alla Nota del Kantor, perchè di questa ebbi conoscenza soltanto durante la correzione delle bozze di stampa. Ma non ho difficoltà a ripetere anche qui, se il Sig. K. lo desidera, che a lui spetta indubbiamente la priorità nel concetto di servirsi dei successivi sistemi aggiunti per lo studio delle trasformazioni birazionali cicliche. Debbo però avvertire che i sistemi aggiunti d'ordine $n-3$, $n-6$. . . si trovano adoperati fino dal 1873 (precisamente per una dimostrazione del teorema di Riemann-Roch) in una Nota dei Signori Brill e Nöther inserita nei Göttinger Nachrichten.

- c) un sistema ∞^r ($r > 1$) di cubiche piane con $9 - r$ punti base;
 d) un sistema ∞^2 di sestiche con otto punti base doppi.

Partendo da questo teorema si possono fissare tutti i tipi di trasformazioni birazionali cicliche di indice n (per $n = 2$ si ritrovano i tipi del Bertini). A tale ricerca è dedicata una Memoria del Sig. Kantor presentata nel 1883 ad un concorso bandito dall' Accademia delle Scienze di Napoli, e premiata; però modificata in seguito da l'autore, almeno nella parte contenente i risultati a cui qui alludo, la quale trovasi inserita nel volume dagli Atti di quell' Accademia che fu pubblicato nei primi mesi del 1892*). La Memoria è ricca di importanti risultati, e di procedimenti ingegnosi coi quali il problema viene trattato sotto diversi aspetti; però varie lacune che qua e là si avvertono, lasciano la persuasione che sul problema delle trasformazioni cicliche non sia detta ancora l'ultima parola, e il desiderio di veder trattata nuovamente l'importante questione con maggior chiarezza ed uniformità.

Per chiudere questa rassegna dei lavori pubblicati sinora intorno al tema della razionalità delle involuzioni piane, debbo ricordare una Nota (già citata) del Sig. Lüroth, il quale, avendo già dimostrata la razionalità delle involuzioni sulla retta**), nel nuovo lavoro (1889) cerca di trattare in modo analogo il problema delle involuzioni piane, e riesce a dimostrare la razionalità delle involuzioni d'ordine 2 (tipi di Bertini), e di una particolare involuzione del terzo ordine derivante da una trasformazione ciclica d'indice 3.

Quando mi sono proposto di dimostrare la razionalità delle involuzioni piane d'ordine qualunque, non potevo far grande assegnamento sui lavori nominati, poichè questi occupandosi di involuzioni provenienti da trasformazioni birazionali cicliche, si valevano delle note proprietà delle trasformazioni Cremoniane, le quali non intervengono nelle involuzioni generali. Ho dovuto perciò ricorrere ad altri concetti che ora esporrò brevemente.

Volendo esaminare se la superficie F , i cui punti rappresentano i gruppi di una involuzione, è razionale, conviene di fissar l'attenzione sui sistemi lineari di curve che giacciono su F , e di cercare se a tali sistemi si applichino le proprietà più spiccate appartenenti ai sistemi lineari di curve sul piano; in secondo luogo si deve esaminare se alcune

*) *Premiers fondements pour une théorie des transformations périodiques univoques*, 4^{me} partie, (Atti dell' Acc. di Napoli serie II, vol 4^o). Le prime tre parti della Memoria si riferiscono alle trasformazioni cicliche più semplici (dal punto di vista proiettivo) e sono inserite nel vol. 1^o (serie II, 1888) della stessa raccolta.

**) *Beweis eines Satzes über rationale Curven* (Math. Annalen Bd. 9).

di queste proprietà siano *caratteristiche per una superficie razionale*, bastino cioè a decidere se la superficie sulla quale valgono, sia razionale. La prima ricerca (alla quale è dedicato il Capitolo I del presente lavoro) è resa facile dal fatto che un sistema lineare di curve su F , ha per corrispondente sul piano un sistema lineare di curve *appartenente alla data involuzione*, (vale a dire un sistema lineare tale che le sue curve passanti per un punto generico del piano, passano per tutto quel gruppo della involuzione a cui il dato punto appartiene); e dei sistemi lineari di curve piane sono note le principali proprietà. Così si trovano le due seguenti proposizioni sulla superficie F :

1) *Se un sistema lineare di curve giacenti sulla superficie F è normale**, allora la serie lineare (di gruppi) *segata sopra una curva generica del sistema dalle rimanenti curve è completa* (è una Vollschaar).

2) *Sulla superficie F esiste un sistema lineare la cui dimensione supera il genere della curva generica.*

Ciascuna delle due proprietà, presa a sè, non basta certo a caratterizzare una superficie razionale; perchè la 1) appartiene (a quanto pare), oltre che alle superficie razionali, anche a tutte le superficie generali di genere (Flächengeschlecht) superiore a zero, non però alle rigate irrazionali; e la 2) appartiene a tutte le rigate, ma non appartiene alle superficie di genere superiore a zero. Ora si può chiedere *se ogni superficie la quale presenti insieme le proprietà 1) e 2) sia razionale*. Ecco una questione, nella quale più non si parla di involuzioni piane, ma dalla cui risposta dipende quella del problema sulle involuzioni. Alla questione si può dare una risposta affermativa, come è dimostrato nel Capitolo II. E la dimostrazione si fonda sul fatto che l'esistenza del sistema 2) sulla superficie F trae con sè l'esistenza di un secondo sistema lineare su F che ha la stessa proprietà del sistema primitivo, ma il genere (della curva generica) inferiore. Con questo procedimento di riduzione applicato più volte, si arriva finalmente ad un sistema lineare sulla superficie F , il quale ha un genere così basso che la razionalità di F segue senz' altro; e segue quindi la razionalità della involuzione piana.

Come si vedrà, la razionalità della involuzione si dimostra, senza assegnare i tipi irriducibili a cui si possono ridurre le involuzioni di dato ordine; rimane dunque ancora aperto (per $n > 2$) il problema dei tipi, il quale forse per n elevato ammetterà soluzioni alquanto complicate. Piuttosto la via che io seguo, conduce subito a proprietà proiettive

*) Si dice che un sistema lineare di curve ∞^r è *normale*, quando non esiste un sistema ∞^{r+1} che lo contenga ed abbia lo stesso grado (numero delle intersezioni variabili di due curve generiche) del sistema proposto. Questa definizione si trova nelle *Ricerche di geometria sulle superficie algebriche* (1, 2) del Sig. Enriques (Memorie dell' Acc. d. Scienze di Torino, serie II, tomo 44; 1893).

delle involuzioni di dato ordine e di data classe (classe è il numero delle coppie di punti che stanno contemporaneamente in un gruppo della involuzione ed in una retta assegnata); si trova ad es. un limite superiore all'ordine di una involuzione di data classe (> 0), e si costruiscono le involuzioni delle prime classi. Ma queste ricerche saranno esposte in un altro lavoro.

Capitolo I.

1. Per *involuzione piana d'ordine $n (\geq 2)$* si intende una varietà algebrica doppiamente infinita di gruppi di n punti (mutuamente coniugati) sopra un piano, varietà tale che un punto generico del piano appartenga ad uno e ad uno solo di quei gruppi.

Con ciò non si esclude l'esistenza di punti particolari (*fondamentali*) in numero finito, ciascuno dei quali appartiene ad ∞^1 gruppi della involuzione*). Gli ∞^1 gruppi di $n - 1$ punti coniugati di un punto fondamentale riempiono una curva algebrica (*fondamentale*) che può esser semplice o composta, ed aver tra le sue componenti anche dei punti (quando ogni gruppo contenente il punto fondamentale abbia qualche altro dei suoi punti in una posizione fissa). L'ordine della curva fondamentale corrispondente ad un punto fondamentale (cioè il numero dei punti coniugati a questo che stanno sopra una retta generica) può dirsi ordine del punto fondamentale.

*) Che i punti fondamentali siano in numero finito, può esser dedotto dalle equazioni rappresentative della involuzione, nel seguente modo. Consideriamo tre equazioni (in coordinate piane non omogenee) del tipo

$$(1) \quad \frac{f_i(\alpha, \beta)}{f_4(\alpha, \beta)} = \frac{f_i(\alpha_0, \beta_0)}{f_4(\alpha_0, \beta_0)} \quad (i = 1, 2, 3)$$

dove f_1, f_2, f_3, f_4 sono funzioni razionali intere; attribuendo ad α_0, β_0 determinati valori si ottengono tre equazioni in α, β le quali ammettono un certo numero n di soluzioni, e tra queste è compresa la soluzione (α_0, β_0) ; gli n punti (α, β) costituiscono il gruppo della involuzione determinato dal punto (α_0, β_0) (si vedano a questo proposito le prime righe della prefazione). Ora dalle tre equazioni è possibile di dedurre mediante operazioni razionali (eliminazione di α o β , ricerca di massimo comun divisore, e divisione per $\alpha - \alpha_0$ o $\beta - \beta_0$) due equazioni del tipo

$$(2) \quad \begin{cases} A_0 \alpha^{n-1} + A_1 \alpha^{n-2} + \dots + A_{n-1} = 0, \\ B_0 \beta^{n-1} + B_1 \beta^{n-2} + \dots + B_{n-1} = 0 \end{cases}$$

(dove i coefficienti sono funzioni intere di α_0, β_0), le quali abbiano come radici rispettivamente le coordinate α e le coordinate β degli $n - 1$ punti coniugati con (α_0, β_0) . Un punto fondamentale (α_0, β_0) deve annullare colle sue coordinate tutti i coefficienti di una almeno delle equazioni (2). E poichè si possono ritenere soppressi i polinomi fattori comuni di tutte le A , e quelli di tutte le B , si vede che i punti fondamentali sono certo in numero finito.

2. Mentre un punto si muove lungo una curva qualsiasi C nel piano di una involuzione I d'ordine n , gli $n - 1$ punti coniugati descrivono una curva C' (semplice o composta), che dicesi *coniugata* o *trasformata* di C nella trasformazione $(n - 1, n - 1)$ che la I definisce.

Se la curva C passa per un punto fondamentale di I , la curva fondamentale corrispondente può essere inclusa in C' o esserne esclusa, secondo la convenzione che piace di fare. Noi ci atterremo alla seconda soluzione (come per le trasformazioni Cremoniane), e riterremo che nella trasformata di una curva non debbano entrare curve fondamentali*).

In particolare una retta generica R ha una curva coniugata R' di un certo ordine ϱ , avente in ogni punto fondamentale una molteplicità uguale all'ordine di quel punto; al variare di R si ottengono così ∞^2 curve R' d'ordine ϱ e comportantisi ugualmente nei punti fondamentali, che sono i soli punti del piano comuni a tutte le R' .

Quando si conosca il valore di ϱ e siano noti gli ordini di tutti i punti fondamentali, allora si possono calcolare l'ordine e le molteplicità (nei punti fondamentali) della curva C' trasformata di una curva C , in funzione degli analoghi caratteri di C . Infatti l'ordine di C' è il numero delle intersezioni (esterne ai punti fondamentali) della curva C con una curva R' coniugata ad una retta R ; mentre la molteplicità di C' in un dato punto fondamentale è il numero delle intersezioni di C colla curva fondamentale corrispondente, purchè si tenga il debito conto delle intersezioni che cadono nei punti fondamentali.

Ora queste relazioni si potrebbero tradurre in formole senza difficoltà; ma a noi basta una osservazione che discende subito dalle cose dette. Se dopo di aver calcolato l'ordine e le molteplicità della curva C' trasformata di C , noi sostituiamo a C una seconda curva che abbia lo stesso ordine di C e si comporti come C in ciascun punto fondamentale**), la trasformata di questa seconda curva avrà, come è chiaro,

*) La equazione di C' si ottiene, come è chiaro, eliminando α_0, β_0 tra la equazione $\varphi(\alpha_0, \beta_0) = 0$ di C e le due equazioni (2) della nota precedente; e sopprimendo nella risultante i fattori che rappresentano curve fondamentali (se vi entrano).

**) La locuzione *due curve si comportano identicamente in un gruppo di punti*, ha (come è noto) un significato preciso. Nella ipotesi di molteplicità ordinarie vuol dire infatti che ciascun punto del gruppo è multiplo tante volte per la prima curva quanto per la seconda. Se invece le due curve hanno singolarità straordinarie nei punti del gruppo, si esige che esista una trasformazione birazionale, la quale muti le due curve in due curve di uno stesso ordine, dotate di soli punti multipli ordinari, ed aventi molteplicità uguali in ogni punto che sia o trasformato di un punto del gruppo, o punto fondamentale della trasformazione nel secondo piano.

lo stesso ordine di C' , e come C' si comporterà in ciascun punto fondamentale. Diremo dunque:

Due curve di uno stesso ordine le quali si comportino in identico modo nei punti fondamentali di I , hanno come trasformate due curve di uno stesso ordine comportantisi in uno stesso modo nei punti fondamentali.

3. Fra una curva C e la sua trasformata C' passa una tal relazione che ad ogni punto di C corrispondono $n - 1$ punti di C' , ed ogni punto di C' proviene da un solo punto di C . Se però C passa per $i (\leq n)$ punti di un gruppo di I , ciascuno di questi giace sulla C' , e considerato sopra essa, ha per corrispondenti in C i rimanenti $i - 1$ punti, ed è quindi multiplo secondo $i - 1$ per C' ; mentre ciascuno degli $n - i$ punti che compiono il gruppo, ha per corrispondenti su C i primi i punti, ed è quindi multiplo secondo i per C' .*).

Ne viene in particolare che se C contiene gli n punti di un gruppo generico di I come punti semplici (o r -upli), i punti stessi sono $(n - 1)$ -upli (rispettiv. $(n - 1) r$ -upli) per C' . E se C' contiene ∞^1 gruppi di I (che non abbiano punti fissi comuni a tutti i gruppi), la C' coincide colla C contata $n - 1$ volte.

4. Un luogo algebrico di ∞^1 gruppi della involuzione I sarà detto *curva appartenente alla involuzione (Involutionscurve)*; tale è per esempio la curva composta di una curva generica C e della sua trasformata C' . Fra le curve appartenenti alla involuzione I noi però non consideriamo (per maggiore semplicità) le curve fondamentali; supponiamo dunque che due gruppi distinti di I giacenti sopra una curva appartenente ad I non abbiano punti comuni.

Noi possiamo ora enunciar così l'ultima osservazione del n° precedente:

Una curva appartenente alla involuzione ha come trasformata se stessa contata $n - 1$ volte.

Ed altre proprietà discendono subito dalla definizione. Così se una curva appartenente alla I ha un punto multiplo (non fondamentale), la curva ha come equimultiplo ciascuno degli $n - 1$ punti ad esso coniugati. E due curve appartenenti ad I si segano (oltre che nei punti fondamentali) soltanto in gruppi della involuzione.

Esistono pure sistemi lineari di cui ogni curva appartiene alla involuzione, o brevemente *sistemi appartenenti alla involuzione***). Le

*) E viceversa, ogni punto i -uplo di C' che non sia fondamentale per I , ha i tra i suoi coniugati sulla curva C .

**) Un esempio di sistema lineare appartenente alla involuzione, è offerto

osservazioni precedenti danno subito le prime proprietà di tali sistemi. Così si vede che se un sistema appartenente ad I ha (fuori dei punti fondamentali di I) altri punti base, questi formano uno o più gruppi di I , essendo equimultipli due punti base appartenenti ad uno stesso gruppo; che le curve del sistema passanti per un punto generico del piano passano in conseguenza per gli $n - 1$ punti coniugati; e che due curve generiche del sistema si segano (fuori dei punti base) soltanto in gruppi di I .

Ma le più importanti proprietà dei sistemi appartenenti ad una involuzione si fondano sopra i due lemmi dei n° 5 e 6, che servono di base alla nostra ricerca.

5. Consideriamo un fascio $|C|$ di curve irriducibili*); per lo scopo che ci proponiamo possiamo supporre (senza introdurre restrizioni) di aver già trasformato il fascio (se occorre) in modo che i suoi punti base siano tutti punti multipli ordinari con tangenti distinte da curva a curva. Facciamo ora la ipotesi che nel fascio si trovino due curve D, E appartenenti alla involuzione I , e comportantisi in ciascun punto fondamentale di I come la curva generica del fascio. Non è escluso che il fascio abbia punti base esterni ai punti fondamentali di I , ma dalla ipotesi fatta segue che se tra quei punti base si trova un punto ad es. r -uplo ($r \geq 1$), saranno pure punti base r -upli gli $n - 1$ punti coniugati (n° 4).

Ciò premesso trasformiamo le curve del fascio mediante la I . La curva D intanto (n° 4) ha come trasformata sè stessa contata $n - 1$ volte, cioè una curva $(n - 1) D$ la quale si comporta in modo perfettamente determinato nei punti fondamentali di I , e passa $(n - 1)r$ volte per ciascuno degli n punti base r -upli nominati; (e altrettanto dicasi della E). D'altra parte la curva generica C del fascio ha come trasformata (n° 2) una curva C' che ha l'ordine della $(n - 1) D$, e come questa si comporta nei punti fondamentali di I ; e la C' passa

dalla definizione analitica di involuzione che trovasi nella prefazione. Infatti il sistema ∞^3

$$\sum_{i=1}^{i=4} \lambda_i f_i(\alpha, \beta, \gamma) = 0$$

ha la proprietà che le sue curve passanti per un punto generico $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ del piano passano in conseguenza per gli $n - 1$ punti coniugati (α, β, γ) definiti mediante le equazioni

$$f_i(\alpha, \beta, \gamma) = \varrho f_i(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0).$$

Altri esempi si troveranno in seguito.

*) Nel seguito quando si parla di un sistema lineare di curve, si sottintende che la curva generica del sistema è irriducibile.

anch' essa $(n-1)r$ volte per quei punti base r -upli (in virtù del n° 3). Ne viene che C' sega $(n-1)D$, ossia D , *soltanto* nei punti base del fascio $|C|$ *); e quindi che C' sega la curva generica di $|C|$ (la quale in quei punti base si comporta come D) *soltanto nei punti base stessi*. Dunque la curva (irriducibile) del fascio $|C|$ che passa per un punto generico di C' , forma parte di C' ; la C' si spezza in $n-1$ curve del fascio $|C|$, e la curva somma $C+C'$ (che appartiene ad I) è composta di n curve del fascio stesso.

Ora sulle n componenti si possono fare due ipotesi:

1) O le n componenti coincidono ed allora *ciascuna curva del fascio $|C|$ appartiene alla involuzione I* ;

2) O ciò non accade; chiamiamo $C, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$ le n componenti. Per ipotesi una di esse C ha come trasformata la curva composta delle rimanenti $n-1$; quindi il punto generico α di C ha i suoi coniugati distribuiti sulle curve C_1, C_2, \dots, C_{n-1} ; ed è chiaro (per ragioni di simmetria) che uno dei coniugati, ad es. α_1 , dovrà trovarsi su C_1 , un altro α_2 su C_2, \dots e l'ultimo α_{n-1} su C_{n-1} ; ogni gruppo di I avente uno dei suoi punti sopra una delle n curve *mutuamente coniugate* C, C_1, \dots, C_{n-1} , ha un punto su ciascuna delle rimanenti. Sicchè due qualunque delle curve coniugate sono punteggiate univocamente**); e gli ∞^1 gruppi di n curve coniugate formano entro al fascio una involuzione, in cui la D e la E sono elementi n -upli. Ora entro ad una forma di prima specie (fascio), i gruppi di una involuzione d'ordine n dotata di due elementi n -upli D ed E sono (come è noto) i cicli di una proiettività ciclica Π di indice n , della quale D ed E sono gli elementi uniti. Se poi insieme alla Π che muta ogni curva C del fascio in una determinata curva (ad es.) C_1 del fascio stesso, noi consideriamo la corrispondenza univoca la quale, come fu già osservato, muta ogni punto α di C in un determinato punto α_1 di C_1 , noi veniamo a costruire una trasformazione birazionale

*) Lo si vede subito sia calcolando il numero delle intersezioni di C' e di $(n-1)D$ in funzione dell'ordine di C e delle sue molteplicità nei punti base; sia osservando che ogni punto non fondamentale comune a C' e $(n-1)D$ ha uno dei suoi coniugati tanto su C , quanto su D .

**) Qui si suppone tacitamente che le n curve C, C_1, \dots, C_{n-1} siano tutte distinte; però (oltre alla 1)) si potrebbe far la ipotesi che ciascuna di esse coincidesse con $h-1$ delle rimanenti (essendo h un divisore di n). Allora ogni gruppo di I si comporrebbe di $\frac{n}{h}$ gruppi di h punti appartenenti ad una involuzione I' d'ordine h ; e la I si potrebbe considerare come una involuzione d'ordine $\frac{n}{h}$ costruita sopra I' . Ora, dato lo scopo finale delle nostre ricerche, è chiaro che si possono escludere queste *involuzioni di involuzioni*, senza introdurre con ciò restrizioni.

(α, α_1) del piano, ciclica d'indice n ; essa dà come trasformati di un punto mediante le sue successive potenze i punti di un gruppo di I . La involuzione I che in tal modo proviene da una trasformazione birazionale ciclica, si dirà brevemente una *involuzione ciclica*.

Con questa locuzione il teorema ora dimostrato può enunciarsi:

a) *Se in un fascio si trovano due curve appartenenti ad una involuzione, allora ogni curva del fascio appartiene alla involuzione, a meno che questa non sia ciclica, nel qual caso può darsi che quelle due sole curve appartengano alla involuzione*; è chiaro però che se tre curve del fascio appartengono alla involuzione ciclica, ogni curva del fascio appartiene alla involuzione (perchè la Π è allora la identità).

Il teorema si estende subito ad un sistema lineare qualsiasi:

b) *Se in un sistema lineare ∞^r si trovano $r + 1$ curve linearmente indipendenti che appartengano ad una involuzione, allora ogni curva del sistema appartiene alla involuzione, a meno che questa non sia ciclica*. Nell'ultimo caso la trasformazione birazionale ciclica che genera la involuzione, muta il sistema lineare in sè stesso, e può considerarsi quindi come una proiettività ciclica in uno spazio lineare a r dimensioni S_r , i cui elementi sono le curve del sistema. Gli elementi uniti della proiettività, vale a dire le curve del sistema appartenenti alla involuzione, o sono soltanto $r + 1$, oppure formano uno o più sistemi lineari; e due sistemi distinti non hanno curve comuni.

Tenendo conto di queste considerazioni possiamo in fine enunciare il teorema:

c) *Se due sistemi lineari di curve aventi lo stesso ordine e comportantisi ugualmente negli stessi punti base, appartengono ad una involuzione, allora il sistema lineare di quell'ordine e della minima dimensione contenente quei due appartiene tutto alla involuzione, se questa non è ciclica; e la stessa conclusione si può trarre anche se la involuzione è ciclica, purchè si sappia che i due sistemi abbiano almeno una curva comune*)*.

6. Una lieve modificazione nel ragionamento del n° 5 ci conduce ad un altro teorema fondamentale per noi.

Si abbia di nuovo un fascio di curve $|C|$, e questa volta si sappia che alla involuzione appartiene una curva D del fascio (la quale si comporti come la curva generica nei punti fondamentali di I). Si sappia inoltre che quei punti base di $|C|$, che non cadono tra i punti fondamentali, formano uno o più gruppi di I (essendo ciascun gruppo

*) Si ricordi che in questi teoremi le curve che appartengono alla involuzione debbono comportarsi nei punti fondamentali di I come la curva generica del sistema.

composto di punti base equimultipli), dei quali gruppi uno almeno si componga di punti base *semplici* e distinti $a, a_1, a_2, \dots a_{n-1}$ *).

Ora coll' identico ragionamento fatto al n° 5, si vede subito che la trasformata C' della curva C generica del fascio si spezza in $n - 1$ curve del fascio stesso. Queste o coincidono con C , ed allora *ogni curva del fascio appartiene ad I*; oppure, se sono distinte da C , indichiamole con $C_1, C_2, \dots C_{n-1}$. Nell' ultima ipotesi si riconosce (come al n° 5) che due qualunque tra le n curve coniugate $C, C_1, \dots C_{n-1}$ sono punteggiate univocamente (essendo coniugati nella I due punti corrispondenti); e che gli ∞^1 gruppi di n curve che si ottengono al variare di C formano una involuzione, della quale si conosce ora un solo elemento n -uplo D . Però anche questa volta l'involuzione è prodotta da una proiettività ciclica Π di indice n , e per dimostrarlo si ricorre al seguente ragionamento.

Al punto base semplice a considerato come elemento della curva C corrisponde sulla curva C_1 (punteggiata univocamente) un punto che deve esser coniugato ad a nella I, e quindi deve trovarsi tra i punti $a_1, a_2, \dots a_{n-1}$; sia ad es. a_1 . Le tangenti a C e C_1 in a, a_1 rispettiv. si corrispondono in quella proiettività tra i fasci di rette a, a_1 che è individuata dalle direzioni (punti infinitamente vicini ad a, a_1) coniugate nella I. Se adunque si fa variare con continuità la curva C nel fascio $|C|$, varierà con continuità nel fascio stesso la curva coniugata C_1 , e le due curve C, C_1 descriveranno (come le loro tangenti in a, a_1) due forme proiettive. Indichiamo con P_1 la proiettività, entro al fascio $|C|$, la quale muta C in C_1 , ogni curva del fascio in una coniugata, quindi ogni gruppo di n curve coniugate in sè stesso; P_1 sarà ciclica secondo un divisore di n (n incluso, 1 escluso). Ora se P_1 è ciclica proprio secondo n , allora sostituendo P_1 a Π nel ragionamento del n° 5 si trova anche qui che I è ciclica.

Se poi P_1 è ciclica secondo un divisore di n , diverso da n , si osservi anzitutto che la curva D è uno degli elementi uniti di P_1 ; l'altro elemento unito E sarà evidentemente l'ultimo elemento polare dell' elemento D rispetto al gruppo generico di n curve del fascio $C, C_1, \dots C_{n-1}$ coniugate nell' involuzione. Si sostituisca ora nel ragionamento precedente a C_1 la curva C_2 , o la $C_3 \dots$, o la C_{n-1} ; si ottengono così n proiettività distinte P (identità), $P_1, P_2, \dots P_{n-1}$ entro al fascio $|C|$, le quali sono tutte cicliche secondo un divisore di n ed hanno come elementi uniti D ed E . Si vede subito allora (per esempio badando alle caratteristiche delle proiettività, che sono radici n -esime di 1) che le n proiettività sono le successive potenze di una tra esse Π ,

*) L'ultima ipotesi, dei punti base semplici, non sembra necessaria, ma è sufficiente per le applicazioni che faremo del teorema, e ne rende più facile la dimostrazione.

la quale è ciclica secondo n ; e si conclude nuovamente che la involuzione I è ciclica. Possiamo dunque enunciare il teorema:

Se in un fascio (di curve contenente una curva appartenente alla involuzione I , quei punti base che non cadono tra i punti fondamentali di I costituiscono uno o più gruppi di I (un gruppo almeno composto di punti base semplici e distinti), allora od ogni curva del fascio appartiene alla involuzione, oppure un'altra sola curva del fascio appartiene alla involuzione, la quale in tal caso è ciclica.

7. Per fare uno studio più profondo dei sistemi lineari appartenenti ad una involuzione giovano le considerazioni seguenti.

Gli elementi di una involuzione I sono i gruppi di n punti che ad essa appartengono; se noi vogliamo studiare gli enti costituiti da quegli elementi, ci conviene, per poter applicare il linguaggio ordinario, di chiamar *punti* gli elementi di I , e di considerare quindi la I come una varietà costituita da ∞^2 punti, come una *superficie* I ; però, se si preferisce, per *superficie* I si può intendere nel seguito una superficie (nel senso ordinario), i cui punti siano in corrispondenza biunivoca coi gruppi (elementi) della involuzione, (poichè le proprietà di cui dobbiamo occuparci sono invariabili per trasformazioni biunivoche). In ogni caso tra la superficie I ed il piano punteggiato sostegno della involuzione passa una ben determinata corrispondenza $(1, n)$.

Ad ogni curva Γ della superficie I corrisponde nel piano una curva C appartenente alla involuzione, e viceversa; i generi π , p di Γ e C sono in generale distinti, e precisamente π è il genere della involuzione ∞^1 costituita dai gruppi di I giacenti su C . Ad un sistema lineare $\infty^r |\Gamma|$ di curve appartenente alla superficie I corrisponde nel piano un sistema lineare $\infty^r |C|$ appartenente alla involuzione I ; e viceversa. I due sistemi hanno la stessa dimensione r , ed hanno come generi rispettivamente π e p . Se poi due curve Γ (di $|\Gamma|$) generiche si segano (fuori dei punti base di $|\Gamma|$) in Δ punti (variabili colle curve), i Δn punti del piano che ad essi corrispondono (nella corrispondenza $(1, n)$) costituiscono la intersezione (fuori dei punti base di $|C|$) di due curve C ; valendoci di una locuzione comunemente adottata noi diremo che Δ è il *grado* del sistema $|\Gamma|$, e $D = \Delta n$ è il *grado* del sistema $|C|$.

Insieme con questi caratteri (dimensione, genere, grado) va considerato nello studio di un sistema lineare un ente invariabilmente collegato col sistema: la *serie caratteristica* segata sopra una curva generica del sistema dalle rimanenti curve*); serie che per il sistema

*) L'importanza di questa serie nello studio dei sistemi lineari di curve risulta dalle mie *Ricerche generali sopra i sistemi lineari di curve piane* (n° 18 e seg.), loc. cit.; e per i sistemi sulle superficie dalle citate *Ricerche* del Sig. Enriques.

$|\Gamma|$ è una g_{Δ}^{r-1} (tracciata sopra un ente Γ di genere π), mentre per il sistema $|C|$ è una $g_D^{r-1} \equiv g_{\Delta}^{r-1}$, (appartenente ad una curva C di genere π). La corrispondenza $(1, n)$ già nominata, la quale muta una curva Γ in una curva C , muta la prima serie caratteristica nella seconda.

Fra le superficie riferibili biunivocamente alla involuzione (alle quali tutte si applicano le considerazioni precedenti) ve n'è una (se $r > 1$) la quale può dirsi *rappresentabile sulla I mediante il sistema* $|\Gamma|$; essa si ottiene stabilendo una corrispondenza proiettiva fra le curve (elementi) di $|\Gamma|$ e gli iperpiani S_{r-1} di uno spazio a r dimensioni S_r , e considerando in S_r il luogo di un punto centro di ∞^{r-1} iperpiani le cui immagini Γ passano per un elemento di I . Il luogo stesso è una superficie di S_r che ha l'ordine Δ , ed il genere della sezione iperpianale generica π ; la serie segata su quella sezione (di S_{r-1}) mediante gli spazi S_{r-2} è una g_{Δ}^{r-1} che (rispetto a trasformazioni biunivoche) può ritenersi identica alla serie caratteristica di $|\Gamma|$ *).

8. Riprendiamo il sistema $\infty^r |C|$ sul piano, ed il suo corrispondente $|\Gamma|$ sulla superficie I .

Facendo astrazione per un momento dalla involuzione, chiamiamo $|C_1|$ il sistema di tutte le curve piane che hanno l'ordine di C , e come C si comportano nei punti base di $|C|$; il sistema $|C_1|$ (la cui dimensione è $\geq r$) si dice ordinariamente *determinato completamente dai punti base*, e può anche dirsi *sistema normale* poichè possiede la proprietà caratteristica di un sistema normale, che consiste nel non esser contenuto in un sistema dello stesso grado e di dimensione superiore**).

Non si può asserire che il sistema $|C_1|$ appartenga esso pure alla involuzione; ma in ogni caso entro a $|C_1|$ possono esistere sistemi appartenenti alla involuzione e contenenti $|C|$. Fra questi sistemi quello $|C'|$ che ha la dimensione massima, contiene i rimanenti in virtù del teorema c) n° 5; il sistema $|\Gamma'|$ che gli corrisponde sulla superficie I è un sistema normale***), anzi (n° 5, c) il sistema normale individuato da $|\Gamma|$.

*) Si può osservare che la superficie di S_r risulta multipla quando le ∞^{r-1} curve Γ che passano per un elemento di I , passano in conseguenza per altri elementi determinati dal primo e con esso variabili.

**) Il nome di sistema lineare *normale* sopra una superficie fu introdotto dal Sig. Enriques (*Ricerche di geometria sulle superficie*, 1, 2 loc. cit.) suggerito dal fatto che una superficie di S_r rappresentabile sulla primitiva mediante un sistema lineare *normale* ∞^r , non può ottenersi come proiezione da una superficie dello stesso ordine di S_{r+1} , è dunque (secondo una locuzione già adottata) una superficie *normale* per S_r .

***) Che il vocabolo normale sia anche qui adoperato nel senso suesposto si potrebbe dimostrare facilmente in modo diretto. Ma si può anche accettare

Il teorema citato del n° 5 ci dà subito la seguente proprietà di un sistema normale su I :

Se nel piano di una involuzione I si hanno due sistemi lineari di curve $|C'|$, $|C''|$ appartenenti alla involuzione, aventi lo stesso ordine e comportantisi ugualmente nei punti base (che si suppongono siano gli stessi per i due sistemi), e se dei due sistemi $|\Gamma'|$, $|\Gamma''|$, che a quelli corrispondono sulla superficie I , il primo è normale, allora esso contiene il secondo, e quindi $|C'|$ contiene $|C''|$, quando la involuzione non è ciclica; e la stessa conclusione si può trarre, anche quando la involuzione è ciclica, purchè si conosca almeno una curva comune ai due sistemi. Se infatti $|\Gamma'|$ non contenesse $|\Gamma''|$, e quindi $|C'|$ non contenesse $|C''|$, allora (n° 5, c)) esisterebbe nel piano un sistema appartenente alla involuzione, contenente $|C'|$ (e $|C''|$), e contenuto nel sistema lineare $|C_1|$ determinato dai punti base di $|C'|$; il che non è possibile perchè si è supposto che $|\Gamma'|$ sia un sistema normale.

10. È noto che un sistema lineare normale situato sul piano ha la serie caratteristica completa*). Ora mi propongo di mostrare come la stessa proprietà spetti ai sistemi normali giacenti sulla superficie I , e costituisca un primo carattere fondamentale di questa superficie.

Sia $|\Gamma|$ un sistema lineare normale ∞^r giacente sulla superficie I , e sia $|C|$ il sistema appartenente alla involuzione che sul piano corrisponde a $|\Gamma|$; indichiamo poi con $|C_1|$ il sistema ∞^{r+q} ($q \geq 0$) di tutte le curve che hanno l'ordine di C e come C si comportano nei punti base del sistema $|C|$.

Sopra la curva C generica di $|C|$ noi abbiamo da considerare le seguenti due serie

l) serie g_D^{r-1} caratteristica di $|C|$ (segata su C dalle rimanenti curve di $|C|$) che noi indicheremo brevemente con l ;

l_1) serie g_D^{r+q-1} caratteristica di $|C_1|$ (segata su C dalle rimanenti curve di $|C_1|$), serie completa (contenente l) che noi indicheremo con l_1 .

E sulla curva Γ della superficie I che corrisponde a C (in una corrispondenza $(1, n)$) consideriamo le due serie

λ) serie g_A^{r-1} caratteristica di $|\Gamma|$ (segata su Γ dalle rimanenti curve di $|\Gamma|$) che noi indicheremo con λ ;

provvisoriamente il vocabolo come una definizione, e dedurre poi dal teorema del n° 10 che la nuova definizione del caso particolare è d'accordo colla definizione generale della nota precedente.

Sopra una qualsiasi superficie un dato sistema lineare *individua* il sistema normale (dello stesso grado e dello stesso genere) che lo contiene; questa proposizione che nel nostro caso possiamo dimostrare ricorrendo al n° 5, c), si troverà dimostrata in generale nella citata memoria del Sig. Enriques, (n° 2).

*) V. le mie *Ricerche generali sopra i sistemi lineari* (n° 18) loc. cit.

λ_1) serie g_d completa che contiene λ ed indicheremo con λ_1 .

Noi dobbiamo dimostrare che λ è completa ossia che coincide con λ_1 ; in altri termini che ogni gruppo Λ_1 di λ_1 è un gruppo Λ di λ .

Ricordiamo perciò che la corrispondenza $(1, n)$ che muta Γ in C , muta la serie λ nella serie l (n° 7), e quindi muta la serie λ_1 (contenente λ) in una serie che contiene l , ed è contenuta nella serie completa l_1 (contenente l)*). Dunque il gruppo generico Λ_1 di λ_1 è trasformato dalla corrispondenza $(1, n)$ in un gruppo L_1 contenuto in l_1 ; e tutto sta a dimostrare che L_1 appartiene anzi alla serie l , poichè da questo segue subito che Λ_1 appartiene a λ , è un gruppo Λ .

Per il gruppo L_1 (come per ogni altro gruppo di l_1 serie caratteristica di $|C_1|$) passa un fascio di curve di $|C_1|$ al quale appartiene anche C , e che perciò indicheremo con (C, C_1) . Se noi riusciamo a dimostrare che tutto quel fascio (o, basterebbe, un'altra sua curva C_1 oltre a C) appartiene al sistema $|C|$, allora ne segue che il gruppo L_1 giace nella serie caratteristica l del sistema $|C|$, e segue quindi (per ciò che sopra si è detto) il teorema da dimostrarsi.

Ora per vedere che ogni curva del fascio (C, C_1) appartiene a $|C|$, osserviamo anzitutto che tra le curve del fascio si trova la C primitiva, la quale appartiene per ipotesi alla involuzione; in secondo luogo che i punti base del fascio esterni ai punti base di $|C|$ sono i punti (base semplici) del gruppo L_1 , il quale (essendo il trasformato di Λ_1) si compone di Δ gruppi della involuzione. Al fascio stesso possiamo adunque applicare il teorema del n° 6**); il quale ci dice che se I non è ciclica ogni curva del fascio (C, C_1) appartiene alla involuzione; e se I è ciclica almeno una seconda curva C_1 del fascio (oltre a C) appartiene alla involuzione.

1° caso; *la I non sia ciclica*. — Poichè allora tutto il fascio appartiene alla involuzione, e d'altra parte il sistema $|\Gamma|$, corrispondente a $|C|$, è normale (per ipotesi), ne viene (n° 8) che il fascio stesso (C, C_1) è contenuto entro a $|C|$; risultato che a noi bastava per poter concludere il teorema.

2° caso; *la I sia ciclica*, sia quindi generata da una trasformazione birazionale ciclica T . Nel fascio nominato consideriamo quella (o una) seconda curva C_1 che (oltre a C) appartiene alla involuzione. Tutto si riduce (come sopra si disse) a dimostrare che C_1 giace nel sistema $|C|$. Perciò consideriamo una curva generica C_0 del sistema $|C|$ distinta da C , e formiamo il fascio (C_0, C_1) , il quale dalla trasformazione T

*) Nel caso $q = 0$ in cui l ed l_1 coincidono, la trasformata di λ_1 coincide con l trasformata di λ , e quindi λ_1 coincide con λ come si vuol dimostrare. Il ragionamento del testo contempla però insieme i due casi $q \geq 0$.

**) Si osservi infatti che i punti base di $|C|$ esterni ai punti fondamentali di I formano uno o più gruppi di I (n° 4).

è mutato in sè stesso (perchè la T muta in sè tanto C_2 quanto C_1); se noi riusciamo a dimostrare che *ogni curva del fascio* (C_0, C_1) è *mutata in sè stessa dalla T* , ossia che il fascio appartiene alla involuzione, allora segue che il fascio, e quindi C_1 , è contenuto entro al sistema $|C|$ ($n^0 8$), al che appunto noi vogliamo arrivare. Consideriamo perciò i tre gruppi L_0, L_1, L_2 segati sulla curva C da C_0 , da C_1 e da una curva generica C_2 del fascio (C_0, C_1) . I due gruppi L_0 ed L_1 provengono, mediante la corrispondenza $(1, n)$, da due gruppi Λ_0, Λ_1 della serie λ_1 ; dunque anche L_2 , che appartiene alla serie semplicemente infinita determinata da L_0, L_1 , dovrà provenire da un gruppo Λ_2 di λ_1 (gruppo della serie definita da Λ_0, Λ_1). Ne viene che L_2 (si compone di Δ gruppi di I e quindi) è mutato in sè stesso dalla trasformazione T , e che la curva C_2 del fascio (C_0, C_1) , la quale passa per L_2 , è mutata (in una curva del fascio stesso passante per L_2 ossia) in sè stessa dalla T , e questo appunto a noi bastava sapere. Così il teorema proposto rimane dimostrato anche nel 2° caso. E possiamo enunciare la *prima proprietà fondamentale della superficie I**):

Un sistema lineare normale giacente sopra la superficie I ha la serie caratteristica completa.

O sotto forma proiettiva:

Ogni superficie (di uno spazio S_r) i cui punti corrispondano biunivocamente ai gruppi di una involuzione piana, od ha per sezioni iperpianali (con S_{r-1}) curve normali, od è proiezione di una superficie (normale) dello stesso ordine, di uno spazio più elevato, avente come sezioni iperpianali curve normali.

Un corollario del teorema fondamentale si deduce subito applicando alla serie caratteristica $g_{\Delta-1}^r$ di un sistema normale $|\Gamma|$ una nota proprietà della geometria sopra una curva:

Se un sistema lineare normale di genere π giacente sulla superficie I ha la dimensione $r > \pi$ oppure il grado $\Delta > 2\pi - 2$, allora tra i suoi caratteri π, r, Δ passa la relazione

$$\Delta = \pi + r - 1.$$

10. Che tra gli infiniti sistemi lineari giacenti sulla superficie I, si trovino di quelli aventi la dimensione r superiore al genere π , sarà ora dimostrato con un esempio.

Nel piano della involuzione noi abbiamo già considerato ($n^0 2$) quelle curve R' , che sono le trasformate delle rette R nella trasformazione piana determinata da I. Le ∞^2 curve $R + R'$ (composte di una retta e della curva trasformata) appartengono alla involuzione. Consideriamo ora nel piano il sistema lineare che ha l'ordine (della curva generica)

*) Per *superficie I* si può intendere (come già dissi) ogni superficie i cui punti corrispondano biunivocamente ai gruppi della involuzione.

uguale all'ordine di $R + R'$, ed ha la minima dimensione tra quelli che contengono tutte le curve $R + R'$ (dimensione certo superiore a 2 perchè per due punti del piano passa più di una curva $R + R'$), sistema i cui punti base cadono soltanto nei punti fondamentali di I (n° 2). Il nominato sistema lineare (che è completamente determinato dalle ∞^2 curve $R + R'$) è irriducibile*), ed appartiene tutto alla involuzione. Ciò infatti risulta senz'altro dal teorema b) del n° 5 se la involuzione non è ciclica; mentre il teorema stesso, se la involuzione è ciclica, potrebbe lasciare il sospetto che le ∞^2 curve $R + R'$ (appartenenti alla involuzione) si distribuissero in due o più sistemi lineari staccati, costituiti da curve appartenenti alla involuzione; ma nel caso presente questo spezzamento non è possibile per la continuità che regna nella varietà ∞^2 delle curve $R + R'$, sicchè anche in questo ultimo caso il sistema lineare determinato dalle $R + R'$ appartiene alla involuzione.

Il sistema lineare che ad esso corrisponde sulla superficie I o è normale, oppure è contenuto in un sistema normale che esso determina (n° 8); quest'ultimo sistema noi indicheremo con $|\Gamma|$, e chiameremo $|C|$ il sistema lineare che gli corrisponde nel piano; noi vogliamo determinare i caratteri di $|\Gamma|$.

Intanto (n° 8) la curva generica C di $|C|$ ha l'ordine di $R + R'$, e come questa curva si comporta nei punti fondamentali della involuzione. Ora l'ordine di R' si può calcolare facilmente in funzione dei seguenti due numeri (caratteri *proiettivi* della involuzione piana):

ν numero delle coppie di punti coniugati nella involuzione che giacciono sopra una retta generica (*classe* della involuzione, estendendo un termine introdotto dal Caporali);

k ordine della *curva unita* K , luogo di un punto che trovasi infinitamente vicino ad uno dei suoi coniugati.

Una retta generica R è segata dalla curva trasformata R' soltanto nelle ν coppie di punti coniugati giacenti su R e nelle k intersezioni di R con K ; totalmente in $2\nu + k$ punti (che, come è facile assicurarsi, sono semplici per R'), dunque l'ordine di $R + R'$ ossia di C è

$$2\nu + k + 1.$$

Due curve C si segano in un certo numero Δ di gruppi della involuzione, numero che non varia sostituendo ad una delle C (o ad entrambe) una curva spezzata $R + R'$. Ora un gruppo di I che stia

*) Per un noto teorema del Sig. Bertini (Rendic. Istituto Lombardo 1882; si veda pure Lüroth, Math. Ann. Bd. 42) la curva generica del sistema non potrebbe spezzarsi che in più curve di uno stesso fascio (insieme forse ad una parte fissa), oppure in una curva fissa ed in una curva irriducibile variabile in un sistema lineare; ed entrambi i casi si escludono subito pel sistema qui considerato.

su $R + R'$, ha uno dei suoi punti sulla retta R e viceversa; sicchè Δ coincide col numero dei punti che una C ha su R , ossia con $2\nu + k + 1$. Dunque:

Il grado del sistema $|\Gamma|$ (sulla superficie I) è

$$\Delta = 2\nu + k + 1;$$

(mentre il grado di $|C|$ è Δn).

Per calcolare il genere π di Γ ci conviene di ricorrere a quella superficie F che è rappresentabile sulla I mediante il sistema $|\Gamma|$ ($n^\circ 7$). La F è una superficie *semplice**) di un certo spazio S_r ($r > 2$), ha l'ordine Δ , e la curva sezione iperpianale (con un S_{r-1} generico) di genere π .

Tra le sezioni iperpianali Γ di F , che corrispondono tutte (in una corrispondenza $(1, n)$) alle curve piane C , si trovano ∞^2 che hanno per immagini le curve $R + R'$; ad ogni punto di una Γ_0 tra esse corrisponde un sol punto di una retta R , e viceversa; quindi (se la retta R è generica) quella curva Γ_0 è irriducibile e *razionale*. Però la curva Γ_0 possiede dei punti multipli, che sono semplici per F e quindi semplici per una sezione iperpianale generica di F . Infatti un punto di F , al quale corrisponda nel piano un gruppo della involuzione avente *due* dei suoi punti su R , è punto doppio di Γ_0 , ma evidentemente punto semplice di F (poichè quel gruppo non offre particolarità rispetto alla involuzione). Sicchè Γ_0 intanto possiede ν punti doppi che sono semplici per F , e provengono quindi da contatti (semplici) dell' iperpiano contenente Γ_0 colla superficie F . D' altra parte il ragionamento ora fatto prova che nessun altro punto semplice di F può esser multiplo per Γ_0 . E si vede pur subito che Γ_0 non può passare per un punto multiplo *isolato* di F , poichè (Γ_0 essendo una curva generica tra le ∞^2 corrispondenti alle $R + R'$) per quel punto multiplo passerebbero tutte le Γ_0 , le quali si segherebbero a due a due in meno di Δ punti variabili; e quindi in meno di Δn punti variabili si segherebbero due curve piane $R + R'$, contro a ciò che prima si disse. Dunque (oltre ai punti multipli che possono eventualmente trovarsi sulla sezione iperpianale generica Γ in causa delle curve multiple di F) la curva Γ_0 possiede soltanto ν punti doppi provenienti da ν contatti semplici del suo iperpiano con F . Ora si osservi che un contatto semplice di un iperpiano con una superficie produce un abbassamento di *una* unità nel genere della corrispondente sezione, (quando questa, come nel caso

*) Non accade infatti che le ∞^{r-1} curve C passanti per un gruppo generico della involuzione passino in conseguenza per altri gruppi variabili col primo, come si sorge considerando quelle C che si spezzano in una retta R e nella curva coniugata R' .

presente, non si spezza*)); quindi il genere di Γ supera di ν unità il genere di Γ_0 (che è zero); ossia:

*Il genere del sistema $|\Gamma|$ è ν (classe della involuzione)**).*

Ora poichè tra il grado

$$\Delta = 2\nu + k + 1$$

ed il genere $\pi = \nu$ di $|\Gamma|$ passa la relazione

$$\Delta > 2\pi - 2$$

(perchè $k \geq 0$), ne viene (per l'ultimo teorema del n° 9) che la *dimensione di $|\Gamma|$ è*

$$r = \Delta - \pi + 1 = \nu + k + 2;$$

e quindi $r > \pi$. Resta dunque dimostrata la *seconda proprietà fondamentale della superficie I*:

Sopra la superficie I esiste un sistema lineare (normale) avente la dimensione superiore al genere.

Anzi le considerazioni di natura proiettiva che ci hanno servito per costruire un tal sistema, lasciano apparire l'esistenza di infiniti sistemi analoghi.

Lo studio della superficie I che gode le due proprietà fondamentali trovate (n° 9, 10), forma l'argomento del *secondo Capitolo*.

*) Lo si vede proiettando la superficie nello spazio ordinario in guisa che quell'iperpiano tangente si proietti in un piano tangente.

**) Allo stesso risultato si arriva con un altro ragionamento che, sebbene meno semplice del precedente, ha il vantaggio di operare nel piano. Siano p e p' i generi delle curve piane C ed R' , di ordini rispettivi $2\nu + k + 1$, $2\nu + k$. Si trova subito che il genere di una curva che abbia l'ordine $2\nu + k + 1$ ed abbia gli stessi punti multipli di R' , è $p' + 2\nu + k - 1$. Ora C ha quell'ordine e quelle molteplicità, fatta eccezione per i $\nu(n-2)$ punti, che sono coniugati alle ν coppie di I giacenti su R , i quali sono doppi per R' (n° 3), ma non giacciono sulla C generica; dunque

$$p = p' + 2\nu + k - 1 + \nu(n-2) = p' + k + \nu n - 1.$$

La involuzione d'ordine n e genere π giacente su C ha (per la formola di Zeuthen)

$$2p - 2 = n(2\pi - 2)$$

punti doppi, i quali costituiscono le intersezioni (fuori dei punti fondamentali) di C colla curva unita K (includendo in K anche quei punti fondamentali, se esistono, che riescono uniti per la involuzione ω^1 sopra la C generica). Lo stesso numero di intersezioni ha con K la curva $R + R'$, ma $2k$ tra queste sono assorbite dai k punti di K giacenti su R , e quindi su R' ; le rimanenti intersezioni sono punti doppi per la involuzione ω^1 razionale d'ordine $n-1$ giacente su R' ; dunque

$$2p - 2 = n(2\pi - 2) - 2k = 2p' - 2 + 2(n-1).$$

Ora tenendo conto della relazione fra p e p' ed eseguendo alcune semplici riduzioni, si trova di nuovo $\pi = \nu$.

Capitolo II.

11. Nel Capitolo I° abbiamo dimostrato che ogni superficie I , i cui punti si possano riferire biunivocamente ai gruppi di una involuzione piana, gode le due seguenti proprietà (invariantive per trasformazioni biunivoche):

1) Ogni sistema lineare normale di curve giacenti su I ha la serie caratteristica completa;

2) Su I esiste un sistema lineare (normale) di curve la cui dimensione supera il genere. Questo sistema sarà indicato in seguito con $|\Gamma|$, e indicheremo con r , π , Δ , la dimensione, il genere, il grado di $|\Gamma|$; per ipotesi è

$$r > \pi,$$

donde segue (n° 9)

$$\Delta = \pi + r - 1,$$

ed anche

$$2\pi - 1 < \Delta < 2r - 1.$$

Noi in questo capitolo vogliamo dimostrare (senza più valerci della involuzione piana) che ogni superficie la quale possenga le proprietà 1), 2), è razionale, vale a dire riferibile punto per punto al piano; e con ciò avremo dimostrato la razionalità della involuzione, ed avremo raggiunto lo scopo che ci siamo prefissi.

12. È utile osservare anzitutto che la proprietà 1) esclude dalle nostre ricerche tutte le rigate non razionali, e le superficie che ad esse sono riferibili (biunivocamente). Infatti una superficie che appartenga ad uno spazio a r dimensioni S_r e sia normale, se è riferibile alla I , ha (per la 1) come sezioni iperpianali (cioè in S_{r-1}) curve normali. Ma è noto d'altra parte che nell'insieme di tutte le rigate di genere $p > 0$ riferibili tra loro, ne esistono alcune (per es. quelle che hanno l'ordine $n > 2p - 2$ e non sono coniche) le quali pur essendo normali, hanno per sezioni iperpianali curve non normali*).

13. Ciò premesso, noi possiamo subito dimostrare la razionalità della superficie I pei valori $\pi = 0, 1, 2$.

Infatti se $\pi = 0$ la I possiede un sistema lineare $|\Gamma|$ almeno ∞^1 di curve razionali, ed è quindi razionale per un noto teorema del Sig. Nöther**).

*) Il Sig. Segre dimostra infatti in due modi diversi (*Ricerche sulle rigate ellittiche*, n° 2, Atti dell' Accad. d. Scienze di Torino, vol XXI; *Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglées*, n° 14, Mathem. Annalen Bd. 34) che una rigata d'ordine $n > 2p - 2$ ($p > 0$) avente per sezioni curve normali (quindi appartenente ad un S_{n-p+1}) è necessariamente un cono.

**) Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen (Mathem. Annalen Bd. 3).

Se invece $\pi = 1$ allora è

$$r \geq 2, \quad \Delta = r.$$

Quindi o $r \geq 3$, e allora la I è rappresentabile biunivocamente sopra una superficie d'ordine $\Delta = r$ di S_r , superficie che (avendo noi escluse le rigate ellittiche) è razionale*); oppure $r = 2$, $\Delta = 2$, e stabilendo allora una corrispondenza proiettiva tra gli elementi (curve) del sistema $|\Gamma|$ e le rette di un piano, si vengono a rappresentare sopra ogni punto del piano due punti della superficie, comuni ad ∞^1 curve Γ , si viene a rappresentar la I sopra un piano doppio. Ogni retta del piano contata due volte rappresenta una curva ellittica Γ , e possiede quindi quattro punti di diramazione. La curva limite (*Uebergangscurve*) del piano doppio è adunque del *quarto ordine*. Ora è noto che un piano doppio con una quartica limite è rappresentabile sul piano semplice**) (o eccezionalmente sul cono cubico, il che nel caso presente va escluso in virtù dell'osservazione fatta al n° 12). Dunque la F è rappresentabile sul piano semplice, anche se $\pi = 1$, $r = 2$.

14. Veniamo ora al caso $\pi = 2$; dovremo veramente ricorrere a ragionamenti che ci serviranno per π qualunque, ma il premetterli ora renderà più chiara la trattazione del caso generale. Supponiamo anzitutto che il sistema $|\Gamma|$ di genere 2, di dimensione $r \geq 3$ e di grado $\Delta = r + 1$, abbia la proprietà che le ∞^{r-1} sue curve passanti per un punto generico della superficie I non abbiano tutte in comune altri punti, variabili col primo. Allora la superficie I può riferirsi biunivocamente ad una superficie F di uno spazio S_r , superficie avente l'ordine $r + 1$ e le sezioni iperpianali di genere 2. Proiettando la F da $r - 3$ (se $r > 3$) suoi punti generici sullo spazio S_3 , si ottiene una superficie del *quarto ordine* a sezioni piane di genere 2, cioè una superficie del quarto ordine con retta doppia, la quale (essendo escluse le rigate) è certo razionale***). Sicchè nella prima ipotesi fatta sul sistema $|\Gamma|$, la I è razionale.

Supponiamo in secondo luogo che le ∞^{r-1} curve di $|\Gamma|$ passanti per un punto generico di I , passino tutte in conseguenza per altri $\mu - 1$ (≥ 1) punti determinati dal primo e con esso variabili. Allora la serie caratteristica g_{r+1}^{r-1} segata sopra una Γ dalle rimanenti avrà ogni suo gruppo composto di $r - 1$ (o più) sottogruppi di μ punti appartenenti ad una involuzione ∞^1 . Sarà dunque

*) Del Pezzo, *Sulle superficie dell' n° ordine immerse nello spazio di n dimensioni* (Rendic. Circolo Matem. di Palermo, t. I).

**) Clebsch, *Ueber den Zusammenhangeiner Klasse von Flächenabbildungen etc.* (Mathem. Annalen Bd. 3); Nöther, *Ueber die ein-zweideutigen Ebenentransformationen* (Sitzungsber. d. physik. medic. Soc. zu Erlangen, 1878).

***) Clebsch, *Ueber die Abbildung algebraischer Flächen* (Math. Ann. Bd. 1).

$$r + 1 \geq \mu(r-1),$$

il che (tenendo conto della $r \geq 3$) porta $\mu = 2$, $r = 3$, $\Delta = 4$. La serie caratteristica è dunque una g_4^2 , ed ogni suo gruppo si compone di due gruppi della serie g_2^1 che la Γ (di genere 2) sostiene; in altre parole le $\infty^2 \Gamma$ passanti per un punto generico di I passano tutte per un secondo punto, che su ciascuna di quelle Γ è coniugato del primo punto. Le ∞^2 coppie di punti coniugati sulla superficie I si possono rappresentare sopra una superficie di ordine $\frac{\Delta}{2} = 2$ di S_3 , sopra una quadrica, le cui sezioni piane contate due volte rappresentano le curve Γ . Ciascuna conica sezione contiene adunque 6 punti di diramazione, ed il luogo di questi è una curva del 6° ordine.

La superficie I può dunque rappresentarsi sopra una *quadrica doppia con una sestica limite*. Ora è facile dimostrare che una tal quadrica doppia è razionale. Infatti se la quadrica è *generale*, allora ogni sua retta è segata in un numero pari di punti dalla curva limite (chè altrimenti quella retta contata due volte non potrebbe rappresentare una curva di I); quindi (dovendo escludersi il caso in cui la curva limite si spezza in sei rette di un sistema, poichè allora la I sarebbe una rigata di genere 2) vi sarà sulla quadrica un sistema di rette secanti in *due* soli punti la curva limite, ed in corrispondenza vi sarà sulla superficie I un sistema lineare ∞^1 di curve razionali; e tanto basta per asserire che la I è *razionale* (per un teorema già citato del Nöther). Oppure la quadrica è un *cono*; se la sestica limite passa per il vertice (due o quattro volte), le generatrici del cono rappresentano curve razionali di I , e quindi di nuovo la I è razionale; se la sestica non passa per il vertice, ma sega tre volte ogni generatrice (e quindi il vertice è punto limite isolato), il cono doppio viene proiettato da un suo punto generico in un *piano doppio dotato di una sestica limite avente due punti tripli infinitamente vicini*; ma un tal piano doppio si può rappresentare sul piano semplice*), sicchè anche in quest' ultimo caso la I è una superficie *razionale*. E si può concludere infine che se il sistema $|\Gamma|$ giacente sulla superficie I ha il genere 2, la I è certo razionale.

15. E passiamo al caso generale $\pi > 2$. La dimostrazione del teorema che una superficie I godente le proprietà 1), 2) (n° 11) è razionale, si fonda sopra i tre lemmi seguenti:

a) *Se una superficie I contiene un sistema lineare $|\Gamma|$ normale di dimensione $r > \pi (> 2)$ (e soddisfa inoltre alla proprietà 1), la*

*) Nöther, *Ueber die ein-zweideutigen Ebenentransformationen* loc. cit.; *Ueber eine Classe von auf die einfache Ebene abbildbaren Doppelsebenen* (Mathem. Annalen Bd. 33).

superficie contiene pure un sistema lineare $|\Gamma'| \infty^{\pi-1}$, le cui curve segano sopra ogni curva di $|\Gamma|$ la serie canonica $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$; il sistema $|\Gamma'|$ si dirà sistema aggiunto a $|\Gamma|$.

b) Se la curva generica del sistema aggiunto si spezza, lo spezzamento avviene in $\pi - 1$ curve razionali appartenenti ad un sistema lineare ∞^1 .

c) Se invece la curva generica del sistema aggiunto è irriducibile, il suo genere è $\pi' \leq \pi - 2$; ed il sistema aggiunto ha quindi (come $|\Gamma|$) la dimensione superiore al genere ($\pi - 1 > \pi'$)*).

Le dimostrazioni dei tre lemmi procedono diversamente (cfr. n° 14), secondo che il sistema $\infty^r |\Gamma|$ presenta la proprietà che le ∞^{r-1} sue curve passanti per un punto generico della superficie non hanno comuni in conseguenza altri punti determinati dal primo, o presenta la proprietà opposta. Noi cominceremo ad occuparci della prima ipotesi.

16. *Prima ipotesi.* — Noi supponiamo dunque, finchè non si dichiari il contrario, che le ∞^{r-1} curve di $|\Gamma|$ passanti per un punto generico della superficie I non abbiano in comune altri punti variabili col primo. In questa ipotesi si può costruire in uno spazio a r dimensioni S_r una superficie F , la quale sia riferita biunivocamente alla superficie I , e venga segata dagli iperpiani S_{r-1} nel sistema lineare che corrisponde a $|\Gamma|$, e che continueremo ad indicare con $|\Gamma|$. L'ordine della F sarà

$$\Delta = \pi + r - 1,$$

e $\pi < r$ sarà il genere della sua sezione iperpianale (curva normale non speciale**)).

Sulla F noi vogliamo costruire un sistema lineare $\infty^{\pi-1}$ di curve Γ' secanti la serie canonica $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$ sulla sezione iperpianale Γ di F ; l'ordine di Γ' dovrà dunque essere $2\pi - 2$.

Per procedere nel modo più semplice conviene di ridursi allo spazio ordinario S_3 ; proietteremo perciò la F da $r - 3$ ($r > 3$) suoi punti sopra S_3 . Per fissare gli $r - 3$ centri di proiezione, consideriamo una sezione generica di F , cioè una curva Γ normale non speciale d'ordine Δ appartenente ad S_{r-1} , e su questa prendiamo $r - 3$ punti generici, vale a dire linearmente indipendenti (appartenenti cioè ad un S_{r-4}), e

*) È facile riconoscere (badando al n° 14) che il teorema a) vale anche per $\pi = 2$, che il teorema b) perde in quel caso il suo significato, e che il teorema c) cade solo nell'ultima ipotesi fatta al n° 14, alla quale corrisponde il valore $\pi' = 1 = \pi - 1$.

**) Seguendo il Sig. Segre dicesi *non speciale* (rispett. speciale) una curva di S_d sulla quale gli iperpiani S_{d-1} seghino una serie non speciale (o speciale).

tali che la curva Γ venga da essi proiettata *univocamente* in una curva Γ_0 di S_2 , la quale adunque avrà l'ordine

$$\Delta - (r-3) = \pi + 2,$$

e il genere π , e sarà essa pure (in virtù di noti teoremi) una curva normale non speciale. Ne segue che la proiezione (univoca) di F da quegli $r-3$ punti è una superficie F_0 dello spazio ordinario S_3 , le cui sezioni piane irriducibili sono *curve normali non speciali d'ordine $\pi+2$ e genere π* . Esisteranno forse anche piani secanti la F_0 in curve spezzate, ma in ogni caso si vede subito (e ciò a noi basta) che per una retta generica di S_3 non passa nessuno di tali piani*).

Ora noi cominceremo a costruire su F_0 un sistema lineare $\infty^{\pi-1}$ di curve secanti la serie canonica $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$ sopra la sezione piana generica Γ_0 di F_0 .

Nel piano di Γ_0 la serie canonica è segata dalle curve d'ordine

$$(\pi+2) - 3 = \pi - 1$$

aggiunte a Γ_0 (che ha l'ordine $\pi+2$). Per fissare un gruppo della serie, o, ciò che fa lo stesso, una di tali curve, basta assegnare nel piano di Γ_0 $\pi-1$ punti generici; e questi punti si possono anche prendere sopra una retta generica s del piano; giacchè se per $\pi-1$ punti di s passassero (più di una e quindi) infinite curve aggiunte d'ordine $\pi-1$, una tra queste conterrebbe la s , e quindi il gruppo segato da s su Γ_0 sarebbe *speciale*, mentre abbiamo visto che la sezione Γ_0 è una curva *non speciale*. Ora facciamo ruotare il piano di Γ_0 intorno ad s , e per ogni posizione del piano segniamo la curva aggiunta d'ordine $\pi-1$ passante per quei $\pi-1$ punti di s , che supponiamo fissi. Otteniamo così ∞^1 curve d'ordine $\pi-1$ sui piani del fascio s , le quali segano tutte la retta s negli *stessi* $\pi-1$ punti. Queste curve costituiscono una superficie Φ , la quale, come ora mostreremo, è d'ordine $\pi-1$. Se infatti Φ fosse d'ordine superiore, essa dovrebbe contenere una o più volte la retta s , e quindi un piano (almeno) per s dovrebbe segare la Φ nella retta s , contata una volta di più che nella intersezione col piano generico del fascio, ed in una curva residua d'ordine $\pi-2$. Ma allora (ragionando come prima) si troverebbe che quel piano per s segherebbe la F_0 in una curva *speciale*; mentre noi sappiamo che ogni sezione piana irriducibile di F_0 è una *curva non speciale*, e sappiamo d'altra parte che per una retta generica s non passano piani secanti F_0 in curve riducibili. Dunque la Φ è proprio d'ordine $\pi-1$, come si era asserito.

*) Infatti una superficie di S_3 che ammetta ∞^2 sezioni piane riducibili è rigata od è la superficie di Steiner ($\pi=0$), casi entrambi da escludersi; (si veda in proposito la mia Nota *Sulle superficie algebriche irriducibili che ammettono un sistema doppiamente infinito di sezioni piane riducibili*, Rendic. Accad. d. Lincei, gennaio 1894).

Ad ogni gruppo di $\pi - 1$ punti di s corrisponde una superficie Φ , la quale sega sopra ogni piano per s una curva d'ordine $\pi - 1$ aggiunta alla sezione di quel piano con F_0 ; le $\infty^{\pi-1} \Phi$ che così si ottengono, formano, come è chiaro, un sistema lineare. Ognuna di esse sega F_0 (oltre che lungo la curva multipla) in una curva Γ_0' che venendo incontrata da ogni piano per s in $2\pi - 2$ punti, ha l'ordine $2\pi - 2$. Si ottiene adunque su F_0 un sistema lineare $\infty^{\pi-1}$ di curve d'ordine $2\pi - 2$, le quali segano sopra ogni sezione piana Γ_0 di F_0 (anche se il piano di Γ_0 non passa per s) una serie $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$, quindi la serie canonica di Γ_0 . E così intanto rimane dimostrata l'esistenza di un sistema lineare $|\Gamma_0'|$ secante la serie canonica sulle ∞^3 curve Γ_0 .

Torniamo ora alla superficie F di S_r , dalla quale abbiamo ottenuto la F_0 mediante proiezione (da $r - 3$ centri), e consideriamo su F quelle $\infty^{\pi-1}$ curve Γ' che hanno per proiezioni le curve Γ_0' . Se per ciascuno degli $r - 3$ centri di proiezione la Γ' passa α (≥ 0) volte, l'ordine di Γ' è $2\pi - 2 + \alpha(r - 3)$; e la Γ_0' sega in α punti ciascuna delle $r - 3$ rette che stanno su F_0 , e rappresentano i centri di proiezione (o meglio i punti ad essi infinitamente vicini). Ora un piano condotto per una di tali rette sega la F_0 lungo una curva che ha il genere $\pi - 1$ (perchè proiezione della sezione di F con un iperpiano tangente ad F nel corrispondente centro di proiezione); e quella curva piana di genere $\pi - 1$ viene incontrata dalle $\infty^{\pi-1} \Gamma_0'$ in una serie $g_{2\pi-2-\alpha}^{\pi-1}$. La serie è non speciale (perchè la dimensione uguaglia il genere della curva sostegno); quindi

$$2\pi - 2 - \alpha \geq (\pi - 1) + (\pi - 1),$$

ossia $\alpha = 0$. Ne viene che le $\infty^{\pi-1}$ curve Γ' esistenti su F hanno proprio l'ordine $2\pi - 2$; e segano in conseguenza la serie canonica $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$ sopra ogni sezione iperpianale di F . L'esistenza del sistema lineare $|\Gamma'|$ dotato di questa proprietà (sistema aggiunto) era appunto affermata dal lemma a), il quale rimane dunque dimostrato completamente.

17. Il lemma b) contempla il caso che ciascuna curva del sistema aggiunto $|\Gamma'|$ si spezzi; come può avvenire lo spezzamento?

È noto*) che la curva generica di un sistema lineare ∞^k giacente sopra una superficie non può spezzarsi che in una parte fissa (comune a tutte le curve) ed in una parte variabile irriduttibile, oppure in un certo numero $\geq k$ di curve appartenenti ad uno stesso fascio (sistema ∞^1 , razionale o no, tale che per ogni punto della superficie passa una sola curva) più forse una parte fissa. Ora sulla F di S_r le $\infty^{\pi-1}$ curve Γ' d'ordine $2\pi - 2$ non possono contenere tutte una stessa parte

*) Enriques, *Ricerche* citate; I, 1.

fissa, poichè la serie canonica, segata dalle Γ' sopra una sezione iperpianale Γ , non può aver punti fissi (comuni a tutti i suoi gruppi). Resta la seconda ipotesi che la Γ' si spezzi in (almeno) $\pi - 1$ curve di un fascio; ma poichè la F non è rigata (n° 12), le curve del fascio devono esser coniche, le quali prese a $\pi - 1$ per volta daranno le $\infty^{\pi-1} \Gamma'$. Dunque la serie ∞^1 delle coniche è lineare; come del resto risulta dal fatto che nel caso presente la sezione iperpianale Γ è iperellittica (perchè i gruppi di $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$ contenenti un punto di Γ contengono in conseguenza uno stesso secondo punto).

Sotto forma invariantiva si può dunque asserire che se la curva generica del sistema aggiunto a $|\Gamma|$ si spezza, lo spezzamento avviene in $\pi - 1$ curve razionali appartenenti ad un sistema lineare ∞^1 ; e ciò precisamente diceva il lemma b).

18. Passiamo ora a dimostrare il lemma c); supponiamo adunque questa volta che la curva generica Γ' del sistema aggiunto sia irriducibile, e cerchiamo un limite superiore al suo genere π' .

Indichiamo perciò con S_ϱ ($\varrho \leq r$) lo spazio a cui appartiene la curva Γ' d'ordine $2\pi - 2$ tracciata sulla superficie F ; poichè la Γ' determina sulla sezione iperpianale Γ di F un gruppo generico della serie canonica $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$, ne viene che ogni gruppo di questa serie dovrà appartenere ad uno spazio $S_{\varrho-1}$. D'altra parte $\pi - 1$ punti del gruppo possono prendersi ad arbitrio sulla Γ di S_{r-1} (dove $r - 1 > \pi - 1$), e quindi appartengono ad uno spazio con $\pi - 2$ dimensioni; segue dunque $\varrho - 1 \geq \pi - 2$ ossia $\varrho \geq \pi - 1$. Ma non può esser nemmeno $\varrho = \pi - 1$ ossia $\varrho - 1 = \pi - 2$, poichè in tal caso accadrebbe che lo spazio determinato da $\pi - 1$ punti generici di Γ segherebbe ulteriormente Γ in altri punti (che coi primi completerebbero un gruppo canonico); e ciò è impossibile, perchè entro ad S_{r-1} , lo spazio di $r - 2$ (o meno, quindi anche di $\pi - 1$) punti generici di una curva Γ (appartenente ad S_{r-1}) non sega ulteriormente la curva*). Dunque si conclude che $\varrho \geq \pi$; donde segue che Γ' appartenente ad S_ϱ ed avente l'ordine $2\pi - 2 < 2\varrho$, è una curva non speciale. Si può

*) Si veda ad es. Bertini, *Intorno ad alcuni teoremi della geometria sopra una curva algebrica*, n° 2 (Atti dell' Accad. d. Scienze di Torino, vol. 26).

Ciò che a noi interessa, si può anche dimostrare osservando che se ogni gruppo canonico di Γ appartenesse ad un $S_{\pi-2}$, la stessa proprietà spetterebbe ad ogni gruppo canonico sulla curva d'ordine $2\pi - 1$ di $S_{\pi-1}$ che si ottiene proiettando la Γ (d'ordine $\pi + r - 1$ di S_{r-1}) da $r - \pi$ suoi punti. Ma lo spazio $S_{\pi-2}$ di un gruppo canonico segherebbe la curva proiezione ulteriormente in un punto, pel quale dovrebbero passare gli $S_{\pi-2}$ di tutti gli altri gruppi canonici (in virtù del *Restsatz*), quindi i gruppi canonici sarebbero $\infty^{\pi-2}$, mentre sono realmente $\infty^{\pi-1}$.

quindi scrivere la relazione che lega il genere e l'ordine di una curva non speciale colla dimensione dello spazio a cui la curva appartiene; relazione che nel nostro caso è

$$\pi' \leq (2\pi - 2) - \varrho,$$

dove π' è il genere di Γ' .

Aggiungendo a questa l'altra relazione $\pi \leq \varrho$ si trova

$$\pi' \leq \pi - 2;$$

la quale ci dice anzitutto che il genere π' di $|\Gamma'|$ è inferiore di due unità almeno al genere π di $|\Gamma|$; e in secondo luogo che la dimensione $r' = \pi - 1$ di $|\Gamma'|$ supera il genere π' del sistema stesso, proprietà questa perfettamente analoga alla 2) (n° 11) valida per $|\Gamma|$. E così le affermazioni del lemma c) sono tutte giustificate.

19. Dobbiamo ora dimostrare i lemmi a), b), c) (n° 15) nella *Seconda ipotesi*. — Il sistema lineare $|\Gamma| \infty^r$ goda la proprietà che le ∞^{r-1} sue curve passanti per un punto generico della superficie I abbiano comuni in conseguenza altri $\mu - 1 \geq 1$ punti, variabili col primo punto.*) Allora ragionando come nel caso particolare $\pi = 2$ (n° 14) si vede subito che ogni gruppo della serie caratteristica g_A^{r-1} di $|\Gamma|$ si deve comporre di $r - 1$ (o più) gruppi di una involuzione ∞^1 d'ordine μ ; sicchè

$$\Delta \geq \mu(r - 1);$$

d'altra parte sappiamo che $\Delta \leq 2(r - 1)$; quindi il solo caso possibile è $\mu = 2$, $\Delta = 2r - 2$, $\pi (= \Delta - r + 1) = r - 1$.

La curva Γ generica è una curva iperellittica, e $|\Gamma|$ è un sistema lineare $\infty^{\pi+1}$ di curve iperellittiche di genere π , che si segano a due a due in π coppie variabili.

Le ∞^2 coppie di punti sulla superficie I , tali che le Γ passanti per un punto di una coppia passano pure per il secondo punto, possono rappresentarsi biunivocamente sopra una superficie Σ di ordine π appartenente ad uno spazio $S_{\pi+1}$, superficie le cui sezioni iperpianali sono curve razionali, che contate due volte rappresentano le Γ . Sopra ogni sezione si trovano dunque $2\pi + 2$ punti di diramazione, ed il luogo di questi su Σ è una curva Λ d'ordine $2\pi + 2$; la superficie I è rappresentabile sulla Σ doppia, dotata della curva limite Λ .

*) Si potrebbe osservare che il sistema $|\Gamma|$, di cui al n° 10 si è dimostrata l'esistenza, soddisfa alla prima ipotesi (n° 16); parrebbe quindi che a questa si potesse limitare la discussione. Si noti però che il sistema $|\Gamma'|$ aggiunto a $|\Gamma|$ costruito al n° 16 può benissimo soddisfare alla seconda, anzichè alla prima ipotesi, sicchè ad esso dovrebbero applicarsi le considerazioni contenute nel n° 19, le quali preferisco di svolgere subito (anzichè rimandarle al momento in cui diventano necessarie) per ragioni di chiarezza.

La superficie Σ (d'ordine π appartenente a $S_{\pi+1}$) è, per un noto teorema*), rigata se $\pi \geq 4$; e nel caso $\pi = 4$, se non è rigata, è la superficie di Veronese con ∞^2 coniche secantisi a due a due in un punto variabile (rappresentata sul piano dalle ∞^5 coniche). Noi possiamo però, questa volta, escludere la superficie di Veronese, perchè la curva limite Λ sopra essa dovrebbe aver l'ordine 10, e quindi dovrebbe segare ciascuna delle ∞^2 coniche in cinque punti, mentre ogni curva algebrica irriducibile di Σ , corrispondendo ad una curva della superficie I, deve contenere un numero pari di punti di diramazione, deve dunque segare Λ in un numero pari di punti. Resta così da considerare soltanto il caso della Σ rigata, nel quale la I contiene un sistema lineare ∞^1 di curve iperellittiche rappresentate dalle generatrici di Σ contate due volte. La curva Λ sega in un certo numero pari $2h (\geq 2)$ di punti ogni generatrice della rigata.

Ora se $h = 1$ la generatrice contata due volte rappresenta una curva razionale della superficie I; le ∞^1 curve razionali che si ottengono su questa, formano un sistema lineare (quindi la I è razionale); e prese a $\pi - 1$ per volta danno su I curve (spezzate) di un sistema lineare $\infty^{\pi-1}$, le quali segano ogni curva Γ (corrispondente ad una sezione iperpianale di Σ) in $\pi - 1$ coppie della serie g_2^1 giacente su Γ , cioè in un gruppo della serie canonica di Γ . Il sistema $\infty^{\pi-1}$ qui nominato può assumersi come sistema $|\Gamma'|$ aggiunto a $|\Gamma|$; esso soddisfa ai lemmi a) e b) che rimangono così dimostrati.

Lo stesso ragionamento e la stessa conclusione valgono pure se (essendo $h > 1$) dei $2h$ punti di ogni generatrice di Σ , $2h - 1$ o $2h - 2$ si trovano riuniti in un punto di questa, perchè sempre la generatrice contata due volte rappresenterà una curva razionale di I**). Resta dunque soltanto il caso in cui almeno tre punti semplici di Λ si trovano sopra ogni generatrice, distinti dai rimanenti $2h - 3$. Allora la rigata Σ non può esser un cono, perchè altrimenti un iperpiano S_π pel vertice segherebbe la curva Λ d'ordine $2\pi + 2$ in almeno $3\pi > 2\pi + 2$ punti ($\pi > 2$). Poichè dunque la Σ non è un cono, gli $\infty^{\pi-1}$ iperpiani condotti per una sua generatrice segano su Σ (d'ordine π) un sistema $\infty^{\pi-1}$ di curve irriducibili razionali d'ordine $\pi - 1$, le quali incontrano Λ in $2\pi + 2 - 2h$ punti. A queste curve contate due volte corrispondono sulla superficie I $\infty^{\pi-1}$ curve iperellittiche di genere $\pi - h \leq \pi - 2$ formanti un sistema lineare; ognuna di esse sega una curva Γ (corrispondente ad una sezione iperpianale di Σ) in $\pi - 1$ coppie della g_2^1

*) Del Pezzo, *Sulle superficie di ordine n immerse nello spazio di $n + 1$ dimensioni* (Rendic. dell' Accad. di Napoli, 1885).

**) Si vede facilmente che questo caso è possibile soltanto se Σ è un cono il cui vertice assorbe $2h - 1$ o $2h - 2$ punti di diramazione di ciascuna generatrice.

appartenente a Γ , cioè in un gruppo della serie canonica di Γ . Dunque il sistema nominato $\infty^{\pi-1}$ sulla I può assumersi come sistema $|\Gamma'|$ aggiunto a $|\Gamma|$; ed insieme all'esistenza del sistema aggiunto (lemma a)) resta dimostrato che il suo genere $\pi' = \pi - h$ non supera $\pi - 2$ (lemma c) *).

20. Dimostrati così i lemmi a), b), c) anche nella *seconda ipotesi*, si scorderà facilmente come essi conducano subito alla dimostrazione della razionalità di I .

Sulla superficie I , soddisfacente alle due proprietà 1), 2) (n° 11), esiste per ipotesi un sistema lineare $|\Gamma|$ normale, avente la serie caratteristica completa, e la dimensione r superiore al genere π . Se $\pi \leq 2$ sappiamo già (n° 13, 14) che la I è razionale. Sia dunque $\pi > 2$; si costruisca allora il sistema lineare $|\Gamma'|$ aggiunto a $|\Gamma|$, che certamente esiste (lemma a)). Ora sono possibili due casi. O la curva generica di $|\Gamma'|$ è riduttibile, ed allora essa si spezza in $\pi - 1$ curve razionali variabili in un sistema lineare ∞^1 (lemma b)), e la superficie I contenendo un sistema lineare ∞^1 di curve razionali, è razionale. Oppure (solo caso che ci rimane da considerare) la curva generica di $|\Gamma'|$ è irriduttibile, ed ha il genere $\pi' \leq \pi - 2$ (lemma c)). Ora sarebbe facile il dimostrare che il sistema $\infty^{\pi-1} |\Gamma'|$ è normale; ma questa considerazione non è nemmeno necessaria, perchè esisterà in ogni caso un sistema lineare normale contenente $|\Gamma'|$ e da esso determinato; ed il nuovo sistema, che potremo indicare ancora con $|\Gamma'|$, avrà la dimensione $r' \geq \pi - 1$, ed il genere (per definizione, n° 8 nota) uguale a π' , quindi minore di r' . Così abbiamo riconosciuta l'esistenza sulla superficie I di un sistema lineare $|\Gamma'|$ normale, avente la serie caratteristica completa (per la 1) del n° 11), e la dimensione r' superiore al genere π' ; e sappiamo inoltre che $\pi' \leq \pi - 2$.

Questo nuovo sistema $|\Gamma'|$, che ha le stesse proprietà di $|\Gamma|$, può esser sostituito a $|\Gamma|$ nelle considerazioni precedenti. E così si continua finchè si arriva (poichè i generi dei successivi sistemi vanno decrescendo) ad un sistema $|\Gamma^i|$, del quale o la curva generica si spezza in più curve razionali di un sistema lineare ∞^1 , ed allora la I è razionale; o la curva generica è irriduttibile ed ha il genere $\pi_i \leq 2$, ed anche in questo caso la I è razionale.

Sicchè finalmente possiamo affermare che

È razionale ogni superficie la quale goda le due proprietà seguenti:

1) *Ogni sistema lineare normale di curve sulla superficie ha la serie caratteristica completa;*

*) Anzi se si osserva che le $\infty^{\pi-2}$ curve di $|\Gamma'|$ che passano per un punto di I , passano pure per il punto coniugato (che ha la stessa immagine su Σ), si deduce (ragionando come per $|\Gamma|$) che $\pi' = r' - 1 = \pi - 2$, e quindi $h = 2$.

2) *Sulla superficie esiste un sistema lineare (normale) di curve avente la dimensione superiore al genere.*

21. Per le considerazioni fatte più volte, il teorema si applica subito ad ogni superficie, i cui punti si possano riferire biunivocamente ai gruppi di una involuzione piana, o (sotto altra forma) ad una superficie il cui punto generico abbia le coordinate funzioni razionali di due parametri. Dunque:

Si può sempre stabilire una corrispondenza (algebraica) biunivoca tra i gruppi di una involuzione piana ed i punti di un piano.

Se le coordinate del punto generico di una superficie sono funzioni razionali di due parametri, la superficie è rappresentabile punto per punto sopra un piano.

Venezia, Settembre 1893.
