

den ganzen Umfang des Rohres bis auf zwei Stellen von je 0<sup>cm</sup>,5 durchschneiden. Durch diese Schlitzte läßt sich eine Platte hin- und herschieben, welche in der Mitte eine durch s'Gravesand'sche Schneiden verschließbare Oeffnung hat. Die Schneiden sind von außen durch eine Schraube beweglich, und gestatten eine beliebige Verengerung der Spalte. Auch ich kann die Beobachtung von Vierordt nur bestätigen, daß gerade diese Abblendungsvorrichtung sehr viel zur Schärfe der Resultate beiträgt, ja daß ohne sie eine genaue Beobachtung gar nicht möglich wäre.

Es lassen sich nun nicht bloß Lösungen von Farbstoffen nach der hier angeführten Methode vergleichen, sondern man kann dieselbe auf die verschiedensten Aufgaben der quantitativen Spectralanalyse ausdehnen. Doch würde es zu weit führen, wenn ich mich über die engsten Grenzen hinausbewegen wollte. Vorstehendes hatte nur den Zweck ein allgemeines Bild der angewandten Untersuchungsmethode zu geben und behalte ich mir für später vor, genauere Angaben, sowie meine näheren Versuche mitzutheilen.

Ich arbeite schon seit 1½ Jahren in dieser Weise und kann nur versichern, daß mich die Ergebnisse des angegebenen Verfahrens in hohem Grade befriedigt haben.

Nimptsch 20. März 1873.

## V. *Zur Dioptrik eines Systems centrirter Kugelflächen; von Victor von Lang.*

1. Das Nachfolgende ist im Wesentlichen eine Reproduction eines in den Sitzungsberichten der Wiener Akademie Bd. 63 S. 666 erschienenen Aufsatzes. Nur zur Ableitung der nachfolgenden Gleichung (8) habe ich hier einen directeren Weg eingeschlagen, wodurch der Zweck der

citirten Abhandlung, eine möglichst einfache Ableitung der dioptrischen Grundformeln im Anschlusse an die Darstellung von Helmholtz zu geben, noch besser wie ich glaube erfüllt wird. Der Vollständigkeit halber will ich auch hier mit einer brechenden Kugelfläche beginnen.

2. Es sey  $o$  der Mittelpunkt und  $r$  der Radius der brechenden Kugelfläche; ein Lichtstrahl, der vom Punkte  $s$  des ersten Mediums ausgeht, treffe die Kugelfläche in  $c$ , die Axe  $so$  aber nach der Brechung in  $t$ . Sind dann  $n_1$ ,  $n_2$  die Brechungsquotienten der beiden Medien, so hat man (Fig. 11 Taf. I)

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin sco}{\sin tco} = \frac{\sin sco}{\sin cos} \cdot \frac{\sin cot}{\sin tco} = \frac{so}{sc} \cdot \frac{tc}{to} \quad \dots (1).$$

Vernachlässigt man nun zweite und höhere Potenzen des Bogens  $bc$ , so wird  $bc$  senkrecht zu  $st$  und die Längen  $sc$ ,  $tc$  werden gleich  $sb$ ,  $tb$ , da sich die Quadrate dieser Linien nur um das Quadrat von  $bc$  unterscheiden. Man erhält so für das *anharmonische* Verhältniß der Punkte  $o$ ,  $t$  zu den Punkten  $b$ ,  $o$  den von der Größe des Winkels  $cso$  unabhängigen Werth

$$\frac{sb}{tb} : \frac{so}{to} = \frac{n_1}{n_2} \quad \dots \dots \dots (2).$$

$t$  ist also das Bild von  $s$

3. Sind  $p$ ,  $q$  die Durchschnitte der in den Punkten  $s$ ,  $t$  zur Axe  $st$  senkrechten Ebene mit der Geraden  $co$ , so giebt die letzte Gleichung, wenn man jedes Glied des linken Theils mit  $\cos pos$  multiplicirt

$$\frac{pc}{qc} : \frac{po}{qo} = \frac{n_1}{n_2} \quad \dots \dots \dots (3).$$

Die Punkte  $p$  und  $q$  sind also ebenfalls conjugirte Bildpunkte, und die von ebenen Objecten entworfenen Bilder müssen daher wieder eben und ähnlich seyn.

4. Durch die Punkte  $p$ ,  $q$  kann das constante Größenverhältniß ( $\beta_1 : \beta_2$ ) von Object und Bild für die conjugirten Punkte  $s$ ,  $t$  gefunden werden. Nennen wir nämlich  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  die Winkel, welche der Lichtstrahl  $sct$  vor

und nach der Brechung mit der Axe, immer in demselben Sinne gerechnet, bildet, so giebt bei der eingeführten Näherung Gleichung (2)

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{bc}{\tan \alpha_1} \cdot \frac{\tan(180^\circ - \alpha_2)}{bc} : \frac{\beta_2}{\beta_1}$$

und daher

$$n_1 \beta_1 \tan \alpha_1 = n_2 \beta_2 \tan \alpha_2 \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

5. Das in §. 3 erhaltene Resultat gilt nun unmittelbar auch für ein System centrirter Kugelflächen, wenn nur das ebene Object senkrecht zur Axe des Systems ist. Kennt man aber für ein solches System die Lage zweier conjugirter Axenpunkte ( $s, t$ ), das Bildgrößenverhältniß ( $\beta_1 : \beta_2$ ) in diesen zwei Punkten und noch die Lage der beiden Brennpunkte  $P_1, P_2$ , so kann man für einen beliebigen Punkt  $x$  das Bild  $y$  durch folgende Construction finden (Fig. 12 Taf. I).

Wir ziehen von  $x$  aus einen Strahl parallel der Axe  $st$  und einen Strahl der durch den ersten Brennpunkt  $P_1$  hindurchgeht. Diese beiden Strahlen sollen die Bildebene von  $s$  in den Punkten  $h, m$  schneiden; nach der letzten Brechung müssen dann diese Strahlen durch die Bilder  $k, n$  der Punkte  $h, m$  hindurchgehen. Diese Bilder werden in der Bildebene von  $t$  liegen, so zwar, daß der Aehnlichkeit der Bilder zufolge

$$\frac{hs}{ms} = \frac{tk}{tn} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

ist, wobei die Punkte  $x, y, h, k, m, n$  sämmtlich in einer Ebene liegen, die auch die Axe  $st$  enthält.

6. Setzen wir nun zur Abkürzung

$$\begin{array}{ll} P_1 s = H_1 & t P_2 = H_2 \\ P_1 p = l_1 & q P_2 = l_2 \end{array}$$

so hat man zufolge der Aehnlichkeit der Dreiecke

$$\left. \begin{array}{l} \frac{hs}{ms} = \frac{xp}{ms} = \frac{P_1 p}{P_1 s} = \frac{l_1}{H_1} \\ \frac{tk}{tn} = \frac{tk}{qy} = \frac{t P_2}{q P_2} = \frac{H_2}{l_2} \end{array} \right\} . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

und mit Rücksicht auf Gleichung (5) somit

$$H_1 H_2 = l_1 l_2. \quad (7).$$

Nennt man die Entfernungen der Punkte  $p, q$  von  $s, t$  etwa  $h_1, h_2$  und rechnet alle Entfernungen im ersten Medium von  $s$  entgegengesetzt der Lichtbewegung, im letzten Medium von  $t$  parallel derselben, so hat man statt der letzten Gleichung

$$H_1 H_2 = (H_1 - h_1) (H_2 - h_2),$$

woraus leicht

$$\frac{H_1}{h_1} + \frac{H_2}{h_2} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

folgt.

7. Um auch den zweiten Theil der gestellten Aufgabe zu lösen, bemerken wir vorerst, daß Gleichung (4) auch für das erste und letzte Medium eines Systems centrirter Kugelflächen gelten muß. Diese Gleichung gilt ja für jede einzelne Fläche, so daß, wenn wir einen bestimmten Strahl ins Auge fassen, bei der Addition dieser Gleichungen sich alle Glieder bis auf das erste und letzte wegheben.

Es schneide nun ein Strahl (Fig. 13 Taf. I), der durch die conjugirten Axenpunkte  $s, t$  des ersten und letzten Mediums unter den Winkeln  $\alpha_1, \alpha_2$  zur Axe  $st$  hindurchgeht, im ersten Medium die erste Brennebene in  $d$ , im letzten Medium die zweite Brennebene in  $e$ . Zieht man dann den Strahl  $df$  parallel zur Axe, so muß derselbe natürlich im letzten Medium durch den zweiten Brennpunkt  $P_2$  hindurchgehen und muß parallel dem Strahl  $te$  seyn, da ja beide durch denselben Punkt  $d$  der ersten Brennebene hindurchgehen.

Schneidet nun der Strahl  $df$  die Bildebene  $s$  im Punkte  $f$ , und nach der letzten Brechung die Bildebene  $t$  im Punkte  $g$ , so sind auch  $f$  und  $g$  conjugirte Punkte, und es ist daher, wenn  $\beta_1 : \beta_2$  das Bildgrößenverhältniß für die Punkte  $s, t$  bedeutet

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{fs}{gt} = \frac{dP_1}{eP_2} = \frac{P_1 s \cdot \tan \alpha_1}{t P_2 \cdot \tan \alpha_2}.$$

Hieraus folgt wegen der Gleichung (4), wenn wir noch von der früheren Bezeichnung Gebrauch machen

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{H_1 \tan \alpha_1}{H_2 \tan \alpha_2} = \frac{H_1}{H_2} \frac{n_2 \beta_2}{n_1 \beta_1}$$

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = - \sqrt{\frac{H_1}{H_2} \frac{n_2}{n_1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = - \sqrt{\frac{H_2}{H_1} \frac{n_2}{n_1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10),$$

da hier, wie aus dem speciellen Falle einer Kugelfläche hervorgeht, die Wurzel mit negativem Zeichen zu nehmen ist.

Durch Gleichung (9) ist auch der zweite Theil unserer Aufgabe gelöst.

8. In der angegebenen Bildconstruction ist es natürlich zweckmäßig, solche Punkte  $s$ ,  $r$  zu wählen, für welche das Verhältniß  $\beta_1 : \beta_2$  ein einfaches wird. Setzt man  $\beta_1 = \beta_2$ , so erhält man die sogenannten *Hauptpunkte*, von welchen die Brennpunkte um die Größen  $F_1$ ,  $F_2$ , die sogenannten *Hauptbrennweiten*, entfernt seyn sollen. Die Gleichung (9) wird in diesem Falle

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

Für den allgemeinen Fall hat man aber jetzt

$$\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^2 = \frac{H_1 F_2}{H_2 F_1}$$

und da zufolge Gleichung (7) auch

$$H_1 H_2 = F_1 F_2$$

seyn muß:

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = - \frac{H_1}{F_1} = - \frac{F_2}{H_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = - \frac{F_1}{H_1} = - \frac{H_2}{F_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

Diese Gleichungen lehren unter anderem, daß, wenn die conjugirten Punkte  $p$ ,  $q$  mit den Punkten  $s$ ,  $r$  gleiches, aber entgegengesetztes Bildgrößenverhältniß haben, die Punkte  $p$ ,  $q$  symmetrisch mit  $s$ ,  $r$  gegen die Brennpunkte

liegen; auch ist für beide Punktepaare das Verhältniß  $\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2}$  gleich und entgegengesetzt.

Geht dagegen für die Punkte  $p, q$  das Bildgrößenverhältniß  $v$  über in  $v'$ , so giebt die Gleichung (12) nach der früheren Bezeichnung

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= F_1 (v - v') \\ h_2 &= F_2 \left( \frac{1}{v} - \frac{1}{v'} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots (14),$$

welche Gleichungen, wie Töpler<sup>1)</sup> gezeigt hat, zur Bestimmung der Brennweiten verwendet werden können.

Den *positiven Hauptpunkten* entsprechen zwei *negative*, für welche das Bildgrößenverhältniß gleich  $-1$  wird, und die nach dem eben Gesagten, gegen die Brennpunkte die entgegengesetzte Lage der positiven Hauptpunkte haben.

9. *Knotenpunkte* heißen diejenigen conjugirten Punkte, für welche  $\alpha_1 = \alpha_2$  wird. Sind  $G_1, G_2$  die Entfernungen der Brennpunkte von den Knotenpunkten, so geben die Gleichungen (12) sogleich

$$G_2 = F_1, G_1 = F_2 \quad (15).$$

Es liegen also die Knotenpunkte symmetrisch mit Hauptpunkten gegen die Brennpunkte. Den *positiven Knotenpunkten* entsprechen wieder zwei *negative* mit entgegengesetzter Lage gegen die Brennpunkte, für welche  $\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = -1$  ist. Zur Construction der Bilder lassen sich auch die Knotenpunkte mit Vortheil verwenden.

10. Aus der Gleichung (8) erhält man

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{h_1 - H_1}{H_2}$$

und somit, wenn die Punkte  $p, q$  unendlich nahe an  $s, t$  liegen

$$\lim \left[ \frac{h_1}{h_2} \right] = - \frac{H_1}{H_2} \dots \dots (16),$$

welchen Ausdruck Töpler „das Bildgrößenverhältniß der Tiefendimensionen“ für die Punkte  $s, t$  nennt. Die Divi-

1) Diese Ann. Bd. 142, S. 232.

sion der Gleichungen (16) und (9) giebt aber mit Rücksicht auf Gleichung (10) für das „Verhältniß der räumlichen Verzerrung“

$$W = \left[ \frac{h_1}{h_2} \right] : \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\tan \alpha_2}{\tan \alpha_1} \quad . . . \quad (17).$$

Der Ausdruck (16) giebt auch die sogenannte Fokaltiefe; hat nämlich dieser Ausdruck einen großen Werth, so werden im Punkte  $t$  auch noch Punkte ziemlich gut ausgebildet, die vor oder hinter dem Punkte  $s$  liegen. Bei der eingeführten Näherung läßt sich aber die Fokaltiefe nicht unabhängig von dem Bildgrößenverhältniß ( $\beta_1 : \beta_2$ ) ändern.

## VI. *Rückwirkung von Nebenströmen in einer unveränderten Schließung auf den Hauptstrom der leydenr Batterie; von P. Riefs.*

(Akad. Monatsber. Januar 1872.)

**D**er Nebenstrom der Batterie wirkt schwächend auf den ihn erregenden Hauptstrom zurück. Die Rückwirkung, welche nach einander eine Reihe von Nebenströmen ausübt, die durch Veränderung ihrer Leitung mehr und mehr geschwächt werden, durchläuft zwei Phasen. In der ersten Phase, die mit der vollkommensten Leitung des Nebenstroms ohne merkliche Schwächung des Hauptstroms beginnt, nimmt die Rückwirkung zu, derzufolge die erregenden Hauptströme an Stärke abnehmen; in der zweiten Phase nimmt die Rückwirkung ab, die Hauptströme werden desto kräftiger, je schwächer der wirkende Nebenstrom ist. Greifen wir von dieser Reihe von Nebenströmen zwei heraus, so entspricht, wenn sie der ersten Phase zugehören, der schwächere Nebenstrom einem schwächeren Haupt-