

## 10.

## Quelques théorèmes de géométrie.

(Par Mr. L. J. Magnus à Berlin.)

Dans un article inséré p. 51. du présent volume j'ai donné une méthode, pour tirer de théorèmes connus sur des coniques des autres théorèmes sur des lignes courbes du même degré. Mais la même méthode suffit pour tirer de ces mêmes théorèmes connus des théorèmes sur des courbes d'un degré plus élevé; et comme l'application de la méthode n'a aucune difficulté, je me borne seulement à en donner quelques résultats qui se rapportent à des courbes dont les géomètres se sont occupés déjà depuis tant de siècles.

Soient données

1°. une cardioïde dont l'équation en coord. rect. est

$$(y^2 + x^2)^2 - 4a(y^2 + x^2)x - 4a^2y^2 = 0;$$

2°. une cissoïde dont l'équation en coord. rect. est

$$(y^2 + x^2)x - ay^2 = 0;$$

3°. une lemniscate dont l'équation en coord. rect. est

$$(y^2 + x^2)^2 + a^2(y^2 - x^2) = 0.$$

Désignons le point de rebroussement de la cardioïde; celui de la cissoïde; et le centre de la lemniscate par  $p_1$ .

I. Soit élevée au point de rebroussement  $p_1$  de la *cardioïde* une perpendiculaire  $D$  à l'axe des abscisses. Soit  $p$  un point quelconque de la courbe, tirez la corde  $pp_1$ , élevez par son point milieu une droite perpendiculaire à cette corde qui coupera en général la droite  $D$  dans un point  $q$ , joignez  $p$  et  $q$ , enfin nommez  $m$  et  $n$  les droites qui divisent en deux parties égales les angles formés par les droites  $pq$  et  $pp_1$ ; de ces droites  $m$  et  $n$  l'une sera la tangente et l'autre la normale de la courbe au point  $p$ .

II. Soient élevées deux perpendiculaires  $D, D'$  à l'axe de la *cissoïde*, l'une par le point de rebroussement  $p_1$  et l'autre par le point de l'axe dont l'abscisse est égale à  $2a$ . De même soient élevées deux perpendiculaires  $D, D'$  à l'axe de la *lemniscate* par deux points de cette axe dont les abscisses sont égales respectivement à  $+\frac{a}{\sqrt{8}}$  et  $-\frac{a}{\sqrt{8}}$ .

Soit  $p$  un point quelconque de l'une de ces deux courbes, tirez la corde  $pp_1$ , élevez par son point milieu une droite perpendiculaire à cette corde, qui coupera en général les deux droites  $D, D'$  en deux points  $q$  et  $q_1$ , joignez  $pq$  et  $pq_1$ , enfin nommez  $m$  et  $n$  les deux droites qui divisent en deux parties égales les angles formés par les droites  $pq, pq_1$ ; de ces droites  $m$  et  $n$  l'une sera la tangente et l'autre la normale de la courbe au point  $p$ .

III. Si par un point fixe  $p$  pris arbitrairement dans le plan de l'une de ces trois courbes ci-dessus nommées et par le point  $p_1$  on fait passer un cercle  $C_1$ , il coupera la courbe tout au plus encore en deux points  $a$  et  $b$ . Si de plus on décrit deux cercles  $C_2, C_3$  passant tous deux par le point  $p_1$ , dont l'un touche la courbe au point  $a$  et l'autre au point  $b$ , ces deux cercles  $C_2, C_3$  se couperont en un second point  $q$ . Si ensuite on fait varier le rayon du cercle  $C_1$ , les rayons des cercles  $C_2, C_3$  varieront aussi. Alors le point  $q$  décrira une courbe qui sera un cercle passant par le point  $p_1$ .

IV. Réciproquement, si le second point d'intersection  $q$  de deux cercles  $C_2, C_3$  qui passent par le point  $p_1$  et dont l'un touche une des trois courbes en un point  $a$  et l'autre en un point  $b$ , se meut sur une circonférence d'un cercle fixe qui passe par le point  $p_1$ : tous les cercles qu'on peut faire passer par les deux points variables  $a$  et  $b$  et par le point fixe  $p_1$  iront passer par un second point fixe  $p$ .

V. Si l'on prend sur une des trois courbes deux points quelconques  $p_2, p_3$ , et que par ces points on décrive une suite de cercles: chacun de ces cercles coupera la courbe tout au plus encore en deux points  $a, b$ . Or, si l'on décrit une nouvelle suite de cercles dont chacun passe par le point  $p_1$  et par une couple de points  $a, b$ : tous les cercles de cette suite se toucheront au point  $p_1$ .

VI. Si l'on décrit un cercle  $C_1$  touchant une des trois courbes en un point quelconque  $p$  de manière qu'il ait deux autres points  $q, q_1$  de commun avec cette courbe, si par les points  $q, q_1$  et  $p_1$  on fait passer un second cercle  $C_2$ , et par les points  $p$  et  $p_1$  un troisième cercle  $C_3$  qui touche le cercle  $C_2$  au point  $p_1$ : ce troisième cercle  $C_3$  coupera la courbe tout au plus encore en un point  $q_3$ . Or, si l'on décrit un quatrième cercle  $C_4$  passant par les points  $p$  et  $q_3$  et touchant le cercle  $C_1$  au point  $p$ , ce cercle  $C_4$  sera le cercle osculateur de la courbe au point  $p$ .

VII. Soient  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$  six points pris arbitrairement sur une des trois courbes. Si l'on décrit six cercles  $p_1 a_1 a_2, p_1 a_2 a_3, p_1 a_3 a_4, p_1 a_4 a_5, p_1 a_5 a_6, p_1 a_6 a_1$  qui passent par le point  $p_1$  et qui joignent respectivement deux points consécutifs sur la courbe: le second point d'intersection du 1<sup>er</sup> et du 4<sup>me</sup>, celui du 2<sup>me</sup> et du 5<sup>me</sup> et celui du 3<sup>me</sup> et du 6<sup>me</sup> seront situés sur la circonférence d'un cercle qui passe par le point  $p_1$ .

VIII. Soient  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$  six points pris arbitrairement sur une des trois courbes. Soient décrit six cercles  $C_1, C_2, \dots, C_6$  qui passent par le point  $p_1$  et qui touchent la courbe respectivement aux points  $a_1, a_2, \dots, a_6$ , et soient désignés les deuxièmes points d'intersection des cercles consécutifs par  $b_1, b_2, \dots, b_6$ . Si l'on décrit les trois cercles  $p_1 b_1 b_4, p_1 b_2 b_5, p_1 b_3 b_6$  qui passent par le point  $p_1$  et qui joignent respectivement les points  $b_1$  et  $b_4, b_2$  et  $b_5, b_3$  et  $b_6$ : ces trois cercles auront un même second point d'intersection.

Le théorème suivant est également un résultat de l'application de notre méthode.

Soient  $S$  et  $\Sigma$  deux spirales logarithmiques égales, situées dans un même plan, ayant le même pôle  $A$  et faisant leurs révolutions en sens contraire. Désignons une révolution quelconque de la spirale  $S$  par  $r_0$ , les révolutions *extérieures* qui suivent la révolution  $r_0$  par  $r_1, r_2, r_3$  etc., et les révolutions *intérieures* qui la précèdent par  $r_{-1}, r_{-2}, r_{-3}$  etc. Désignons de plus une révolution quelconque de la spirale  $\Sigma$  par  $\xi_0$ , les révolutions *intérieures* qui précèdent la révolution  $\xi_0$  par  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  etc., et les révolutions *extérieures* qui la suivent par  $\xi_{-1}, \xi_{-2}, \xi_{-3}$  etc.

Cela posé, si l'on tire une droite quelconque dans le plan des deux courbes, elle coupera une infinité de révolutions de la spirale  $S$ , et chacune d'elles en deux points. Si l'on désigne les deux points d'intersection de cette droite et de chacune de ces révolutions respectivement par  $a_0, b_0; a_1, b_1; a_{-1}, b_{-1}; a_2, b_2; \dots$ , si l'on joint le pôle  $A$  et chacun de ces points d'intersection par des droites qu'on imagine être prolongées indéfiniment au delà de ces points d'intersection; chacune de ces droites coupera chacune des révolutions de la spirale  $\Sigma$  en un seul point. Si l'on désigne le point d'intersection de la droite  $Aa_m$  ou  $Ab_m$  et de la révolution  $\xi_n$  par  $\alpha_{m,n}$  ou  $\beta_{m,n}$ , on peut former une infinité de séries de points d'intersection, dont chacune est composée d'une infinité de points  $\alpha_{m,n}, \beta_{m,n}$  de sorte que les indices  $m, n$  des points d'une même série ont une

différence constante. Tous les points de chaque série seront situés sur une même circonférence d'un cercle, et tous ces cercles se toucheront au point  $A$ .

Réciproquement, si l'on décrit un cercle par le pôle  $A$ , il coupera une infinité de révolutions de la spirale  $S$ , et chacune d'elles en deux points. Si l'on désigne les deux points d'intersection de ce cercle et de chacune de ces révolutions respectivement par  $c_0, d_0; c_1, d_1; c_{-1}, d_{-1}; c_2, d_2; \text{etc.}$ ; si l'on joint le pôle  $A$  et chacun de ces points d'intersection par des droites, qu'on imagine être prolongées indéfiniment au delà de ces points d'intersection: chacune de ces droites coupera chacune des révolutions de la spirale  $\Sigma$  en un seul point. Si l'on désigne le point d'intersection de la droite  $Ac_m$  ou  $Ad_m$  et de la révolution  $\xi_n$  par  $\gamma_{m,n}$  ou  $\delta_{m,n}$ , on peut former une infinité de séries de points d'intersection, dont chacune est composée d'une infinité de points  $\gamma_{m,n}, \delta_{m,n}$ , de sorte que les indices  $m, n$  des points d'une même série ont une différence constante. Tous les points de chaque série seront situés sur une même droite, et toutes ces droites seront parallèles entr'elles.